137. Доведіть, що для довільного натурального $k > 1$ знайдуться натуральні числа $x, y < k^2$ такі, що
$$0 < \{\sqrt{x}\} - \{\sqrt{y}\} < \frac{k-1}{k(k^2-k-1)}$$
(тут $\{t\}$ позначає дробову частину дійсного числа t).

(О. Сарана, Житомиир)

138. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел a, b, c, d виконуєтсья нерівність
$$\frac{bcd}{a^3+3bcd} + \frac{cda}{b^3+3cda} + \frac{dab}{c^3+3dab} + \frac{abc}{d^3+3abc} + \leqslant 1.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

139. В трикутник ABC вписано коло, що дотикається сторін AB, BC та AC в точках X, Y та Z відповідно. З точок дотику до сторін трикутника проведено перпендикуляри $YK \perp AB$, $XP \perp AC$ та $ZQ \perp BC$. Обчисліть площу трикутника XYZ в термінах довжин відрізків XP, YK та ZQ.

(І. Нагель, Євпаторія)

140. В гострокутному трикутнику ABC на сторонах AC та AB вибрано точки B_1 та C_1 відповідно. Позначимо через X точку перетину BB_1 та CC_1, а через M середину BC. Доведіть, що X є ортоцентром $\triangle ABC$, якщо відомо, що чотирикутник AB_1XC_1 є вписаним в деяке коло та $B_1M = C_1M$.

(В.Дума, А.Примак, О. Манзюк, Київ)

141. Функція f задана на деякій відкритій множині дійсних чисел та диференційовна в усіх точках своєї області визначення, причому f' відмінна від константи. Чи може існувати таке число T, яке є періодом f' але не є періодом f?

(О. Кукуш, Київ)

142. Знайти найбільшу можливу кількість ребер в простому графі (без петель та кратних ребер) з n вершинами, кожен простий цикл якого має довжину 3 (простим циклом називається замкнений маршрут, який містить кожну вершину не більше одного разу).

(А.Бондаренко, А.Примак, Київ)

137. Prove that for any positive integer $k > 1$ there exist positive integers $x, y < k^2$ such that
$$0 < \{\sqrt{x}\} - \{\sqrt{y}\} < \frac{k-1}{k(k^2-k-1)}$$
(here $\{t\}$ denotes the fractional part of a real number t).

(O. Sarana, Zhytomyr)

138. Prove that for any positive real numbers a, b, c, d the following inequality holds
$$\frac{bcd}{a^3+3bcd} + \frac{cda}{b^3+3cda} + \frac{dab}{c^3+3dab} + \frac{abc}{d^3+3abc} + \leqslant 1.$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsa)

139. A circle inscribed in a triangle, ABC, touches the sides AB, BC and AC in points X, Y and Z respectively. The perpendiculars $YK \perp AB$, $XP \perp AC$ and $ZQ \perp BC$ are constructed. Find the area of XYZ in terms of lengths of XP, YK and ZQ.

(I. Nagel, Evpatoria)

140. The points B_1 and C_1 are chosen on the sides AC and AB respectively of an acute triangle, ABC. Let X denote the intersection point of BB_1 and CC_1 and M denote the center of BC. Prove that X is the orthocenter of $\triangle ABC$ provided the quadrangle AB_1XC_1 is inscribed in a circle and $B_1M = C_1M$.

(V.Duma, A.Prymak, O. Manzjuk, Kyiv)

141. A function, f, is defined on an open set of real numbers and has a non-constant derivative, f', defined on the same set. Can there exist a real number, T, which is a period of f' but not a period of f?

(O.Kukush, Kyiv)

142. Find the maximum possible number of edges in a simple graph (without loops and doubled edges) with n vertices such that each simple cycle of it has length 3 (a simple cycle is a closed path with contains each vertex at most once).

(A.Bondarenko, A.Prymak, Kyiv)