131. Відомо, що дійсні числа a та b вибрано таким чином, що для всіх дійсних x виконується нерівність $|a\sin(x) + b\sin(2x)| \leqslant 1$. Доведіть, що для всіх дійсних x виконується нерівність $|a + 2b\cos(x)| \leqslant 2$.

(В. Ясінський, Вінниця)

132. Знайдіть усі многочлени $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, такі що для всіх натуральних n виконується рівність

$$[f(1/2)] + [f(1 + 1/2)] + \cdots + [f(n + 1/2)] = f(1) + f(2) + \cdots + f(n),$$

де $[a]$ позначає цілу частину дійсного числа a.

(А. Примак, Київ)

133. Всередині опуклого чотирикутника $ABCD$ вибрали довільним чином точку M, з якої провели перпендикуляри до прямих, які містять сторони чотирикутника: $MN \perp AB$, $MI \perp BC$, $MH \perp CD$ та $MK \perp DA$. Доведіть, що подвоєна площа чотирикутника $NIHK$ не перебільшує $MA \cdot MC + MB \cdot MD$.

(І. Нагель, Євпаторія)

134. Кола ω_1, ω_2 та ω_3 дотинаються до кола ω внутрішнім чином в точках A_1, A_2 та A_3 відповідно. Відомо також, що кола ω_1 та ω_2 дотинаються зовнішнім чином у точці B_3, кола ω_2 та ω_3 дотинаються зовнішнім чином у точці B_1, а кола ω_1 та ω_3 дотинаються зовнішнім чином у точці B_2. Доведіть, що прямі A_1B_1, A_2B_2 та A_3B_3 перетинаються в одній точці.

(О. Манзюк, Київ)

135. Послідовність $\{x_n, n \geqslant 1\}$ задається наступним чином: $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n$, $n \geqslant 1$. Доведіть, що серед елементів цієї послідовності є безліч додатних та безліч від'ємних чисел.

(О. Кукуш, Київ)

136. Знайдіть усі набори з дев'яти різних простих чисел меньших за 120, з яких можна скласти магічний квадрат 3×3, тобто таблицю, в якій суми чисел у кожному рядку, кожному стовпчику та в кожній з двох головних діагоналей збігаються.

(В. Санніков, Севастопіль)

131. It is known that real numbers a and b are chosen such that $|a\sin(x) + b\sin(2x)| \leqslant 1$ holds for all real x. Prove that $|a + 2b\cos(x)| \leqslant 2$ holds for all real x.

(V. Yasinsky, Vinnytsa)

132. Find all polynomials $f(x)$ with real coefficients such that for all positive integer n holds

$$[f(1/2)] + [f(1 + 1/2)] + \cdots + [f(n + 1/2)] = f(1) + f(2) + \cdots + f(n),$$

where $[a]$ denotes the integer part of a real number a.

(A. Prymak, Kyiv)

133. Inside a convex quadrangle, $ABCD$, a point M is chosen in an arbitrary way. Four perpendiculars have been drawn from M to the lines containing the sides of the quadrangle: $MN \perp AB$, $MI \perp BC$, $MH \perp CD$ and $MK \perp DA$. Prove, that the doubled size of the quadrangle $NIHK$ is not greater than $MA \cdot MC + MB \cdot MD$.

(I. Nagel, Evparorija)

134. Circles ω_1, ω_2 and ω_3 touch the circle ω in an inner way in points A_1, A_2 and A_3 correspondingly. It is also known that the circles ω_1 and ω_2 touch each other in an outer way in the pont B_3, circles ω_2 and ω_3 touch each other in an outer way in the pont B_1, and circles ω_1 and ω_3 touch each other in an outer way in the pont B_2. Prove that straight lines A_1B_1, A_2B_2 and A_3B_3 ave a common point.

(O. Manzjuk, Kyiv)

135. A sequence, $\{x_n, n \geqslant 1\}$, is defined as follows: $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n$, $n \geqslant 1$. Prove that it contains infinitely many positive and infinitely many negative elements.

(O. Kukush, Kyiv)

136. Find all sets consisting of nine different primes less than 120, from which one can construct a magic square 3×3, that is a table such that the sums of elements in each row, in each column and in each of two main diagonals are the same.

(V. Sannikov, Sevastopil)