113. Довести нерівність

$$\sigma(n) \leq \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n),$$

де $\sigma(n)$ — сума всіх натуральних дільників числа n, а $\tau(n)$ — їх кількість.

(В. Некрашевич, Київ)

114. На діагоналі AC опуклого чотирикутника $ABCD$ вибрали точку H так, що $BH \perp AC$. Крім того, відомо, що $AB \perp BC$ і $AO \perp DH$, де O — центр кола, описаного навколо трикутника ACD. Доведіть, що $AB = AD$.

(В. Ясінський, м. Вінниця)

115. На дошці розмірами $n \times n$ розставлено фішки так, що виконуються наступні умови:

(a) кожне поле, що не містить фішку має спільну сторону із такою, що містить;

(b) для довільної пари полів, що містять фішки існує послідовність полів, що містять фішки, що починається і закінчується в даних полях і така, що кожні два послідовних поля мають спільну сторону.

Довести, що на дошці поставлено щонайменше $(n^2 - 2)/3$ фішок.

(США, 1999)

116. В тригранний кут $OABC$ вписано сферу з центром в точці I. Відомо, що $\angle BOC + \angle AOC = 180° + \angle AOB$. Довести, що площини AOI та BOI перпендикулярні.

(М. Курило, Липова Долина, Сумської обл.)

117. Гра "Y2K" грається на смузі розмірами 1×2000 за наступними правилами. Два гравці по черзі пишуть або S або O в порожню клітинку. Виграє той, після чийого ходу з'являться три послідовні клітинки з написом SOS. Якщо всі клітини заповняться і при цьому ніде не виникне SOS, то нічия. Довести, що той, хто ходить другим має виграшну стратегію.

(США, 1999)

118. Побудуйте за допомогою циркуля та лінійки трикутник ABC, знаючи положення вершини A, середини сторони BC і точки перетину висот.

(В. Ясінський, м. Вінниця)

113. Prove the inequality

$$\sigma(n) \leq \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n),$$

where $\sigma(n)$ is the sum of all positive integral factors of n, and $\tau(n)$ is its number.

(V. Nekrashevych, Kyiv)

114. A point H belongs to the diagonal AC of a convex quadrilateral $ABCD$ and is such, that $BH \perp AC$. Prove that $AB = AD$ if $AB \perp BC$ and $AO \perp DH$, where O is the center of the circle circumscribed around the triangle ACD.

(V. Yasinskyy, Vinnytsa)

115. Some checkers placed on an $n \times n$ checkerboard satisfy the following conditions:

    (a) every square that does not contain a checker shares a side with one that does;

    (b) given any pair of squares that contain checkers, there is a sequence of squares containing checkers, starting and ending with the given squares, such that every two consecutive squares of the sequence share a side.

    Prove that at least $(n^2 - 2)/3$ checkers have been placed on the board.

(USA, 1999)

116. A sphere with center in a point I is inscribed in a trihedral angle $OABC$. Prove that the planes AOI and BOI are perpendicular if $\angle BOC + \angle AOC = 180^\circ + \angle AOB$.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna, Sumska obl.)

117. The Y2K Game is played on a 1×2000 grid as follows. Two players in turn write either an S or an O in an empty square. The first player who produces three consecutive boxes that spell SOS wins. If all boxes are filled without producing SOS then the game is a draw. Prove that the second player has a winning strategy.

(USA, 1999)

118. Construct with help of a compass and a ruler a triangle ABC knowing the vertex A, the midpoint of the side BC and the intersection point of the altitudes.

(V. Yasinskyy, Vinnytsa)