99. Для кожного натурального числа n, що не є повним кубом довести нерівність

$$\left\{\sqrt[3]{n}\right\} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Тут $\{x\}$ — дробова частина числа x, тобто $\{x\} = x - [x]$, де $[x]$ — найбільше ціле число, що не перевищує x.

(О. Сарана, Житомир)

100. На Острові Чудес скінченної площі живуть Їжаки. Їжак — це три відрізки із одним спільним кінцем довжини 1 фут, кути між якими рівні 120°. Відомо, що Їжаки повністю належать площині Острова і не торкаються один одного. Довести, що на Острові Чудес живе скінченне число Їжаків.

(Baltic Way)

101. Для послідовностей $\{a_n : n \geq 1\}$, $\{b_n : n \geq 1\}$, $\{c_n : n \geq 1\}$ виконані співвідношення:

$$\begin{cases} a_n &= \quad a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n &= \quad b_{n-1} - c_{n-1} \\ c_n &= -c_{n-1} - a_{n-1}. \end{cases}$$

Довести, що всі ці три послідовності, починаючи з деякого члена є послідовностями Фібоначчі.

(В. Мазорчук, Київ)

102. Довести, що для будь-яких додатніх чисел a, b, c виконується нерівність

$$\frac{a^{2000}}{b+c} + \frac{b^{2000}}{c+a} + \frac{c^{2000}}{a+b} \geq \frac{1}{2}\left(a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}\right)$$

(В. Ясінський, Вінниця)

103. Діагоналі вписаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. На променях OA та OB вибрали точки P і Q відповідно так, що $\angle DAQ = \angle CBP$. Доведіть, що точка O та середини відрізків PQ і BC лежать на одній прямій.

(В. Ясінський, Вінниця)

104. Дано трикутник ABC з кутами меншими за 120° і точка O в ньому така, що $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$. Нехай M_1, M_2, M_3 — точки перетину медіан, а H_1, H_2, H_3 — точки перетину висот у трикутниках AOB, BOC, COA відповідно. Довести, що має місце рівність:

$$\overrightarrow{M_1H_1} + \overrightarrow{M_2H_2} + \overrightarrow{M_3H_3} = -2\overrightarrow{OM},$$

де M — точка перетину медіан трикутника ABC.

(М. Курило, Липова Долина, Сумська обл.)

105. Знайти всі четвірки натуральних чисел x, y, z, t такі, що числа x, y, z — взаємно прості і
$$(x+y)(y+z)(z+x) = txyz.$$

(Румунія)

99. For every positive integer n not equal to a cube of an integer prove the inequality
$$\left\{\sqrt[3]{n}\right\} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$
Here $\{x\}$ is the fractional part of the number x, i.e. $\{x\} = x - [x]$, where $[x]$ is the maximal integer not greater than x.

(O. Sarana, Zhytomyr)

100. The Wonder Island is inhabited by Hedgehogs. Each Hedgehog consists of three segments of unit length having a common endpoint, with all three angles between them equal to $120°$. Given that all Hedgehogs are lying flat on the island and no two of them touch each other, prove that there is a finite number of Hedgehogs on Wonder Island.

(Baltic Way)

101. The sequences $\{a_n : n \geq 1\}$, $\{b_n : n \geq 1\}$, $\{c_n : n \geq 1\}$ satisfy the equalities:
$$\begin{cases} a_n &= \quad a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n &= \quad b_{n-1} - c_{n-1} \\ c_n &= -c_{n-1} - a_{n-1}. \end{cases}$$
Prove that all these three sequences are Fibonacci sequences from some place.

(V. Mazorchuk, Kyiv)

102. Prove for any positive a, b, c
$$\frac{a^{2000}}{b+c} + \frac{b^{2000}}{c+a} + \frac{c^{2000}}{a+b} \geq \frac{1}{2}\left(a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}\right)$$

(V. Yasinskyi, Vinnytsa)

103. Let O be the intersection point of the diagonals in an inscribed quadrilateral $ABCD$. The points P and Q belong to the rays OA and OB respectively and $\angle DAQ = \angle CBP$. Prove that the point O and the midpoints of the segments PQ and BC are collinear.

(V. Yasinskyi, Vinnytsa)

104. The angles of the triangle ABC are less than 120°. The point O inside the triangle is such that $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$. Let M_1, M_2, M_3 be the intersection points of the medians and let H_1, H_2, H_3 be the intersection points of the altitudes in the triangles AOB, BOC, COA respectively. Prove the equality

$$\overrightarrow{M_1H_1} + \overrightarrow{M_2H_2} + \overrightarrow{M_3H_3} = -2\overrightarrow{OM},$$

where M is the intersection point of the medians in the triangle ABC.

(M. Kurylo, Lypova Dolyna)

105. Find all positive integers x, y, z, t such, that the numbers x, y, z are pairwise relatively prime and

$$(x + y)(y + z)(z + x) = txyz.$$

(Romania)