92. Про послідовність $a_1, a_2, \ldots$ невід'ємних дійсних чисел відомо, що для всіх $n \geq 1$ $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1} - a_n$. Для яких a_1, a_2 послідовність $\{a_n\}$ буде обмеженою?, зростаючою?

(І. Бобак, Луцьк)

93. Знайдіть всі дійсні значення $x \geq 998$ для яких вираз $\left[\frac{x}{1998}\right] / \left[\frac{x}{998}\right]$ набуває свого найбільшого значення.

(В. Ясінський, Вінниця)

94. Нехай $g, h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ — дві функції (тут $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$), що задовольняють умови:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g(2n) & = & 2n+1 \\ g(2n+1) & = & 2n \\ h(2n) & = & 2g(n) \\ h(2n+1) & = & 2h(n)+1 \end{array} \right.$$

для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Позначимо $f(n) = g(h(n))$.

a) Обчислити $f(1998)$.

b) Довести, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує таке натуральне число k, що $n = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(0)\ldots))$ або $0 = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(n)\ldots))$.

(В. Некрашевич, Київ)

95. У 1896 році лорд Койн вирішив порозважатися наступним чином: з 1 січня по 31 грудня він кожного дня один раз проводив наступну операцію: навмання вибирав одну з двох коробок сірників і перекладав з неї в іншу один сірник, якщо вона була непорожня. Якщо ж вона була порожня, він перекладав сірник в неї з другої коробки. Яка ймовірність того, що після перекладання 31 грудня у обох коробках буде порівну сірників, якщо на початку в обох коробках було по a) $n = 400$ b) $n = 200$ c) $n = 100$ сірників?

(В. Мазорчук, Київ)

96. У трикутну піраміду $ABCD$ вписана сфера ω з радіусом r, яка дотикається граней ABC, BCD, CDA, DAB відповідно в точках D_1, A_1, B_1, C_1. Прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 вдруге перетинають сферу ω відповідно в точках A_2, B_2, C_2, D_2. Довести, що виконується така нерівність:

$$AA_1 \cdot A_1A_2 + BB_1 \cdot B_1B_2 + CC_1 \cdot C_1C_2 + DD_1 \cdot D_1D_2 \geq 32r^2.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

97. В трикутнику ABC ($\angle A = 60^\circ$) BM і CN — бісектриси, які перетинаються в точці I. P і Q — точки дотику кола вписаного в трикутник до сторін AB і AC відповідно. Точка O — середина відрізка NM. Доведіть, що точки P, O і Q — лежать на одній прямій.

(І. Нагель, Євпаторія)

98. Куб розбито на скінченне число паралелепіпедів з гранями паралельними граням куба. Довести, що якщо сума об'ємів куль описаних навколо цих паралелепіпедів дорівнює об'єму кулі описаної навколо куба, то всі ці паралелепіпеди — куби.

(Румунія)

92. A sequence $a_1, a_2, \dots$ of non-negative reals is given such that for all $n \geq 1$ the equality $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1} - a_n$ is fulfilled. For what values of a_1, a_2 the sequence $\{a_n\}$ will be bounded?, ascending?

(I. Bobak, Lutsk)

93. Find all the reals $x \geq 998$ for which the expression $\left[\frac{x}{1998}\right] / \left[\frac{x}{998}\right]$ is maximal.

(V. Yasinskyj, Vinnytsa)

94. Let $g, h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ be two functions (here $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$) satisfying the conditions:

$$\begin{cases} g(2n) &= 2n+1 \\ g(2n+1) &= 2n \\ h(2n) &= 2g(n) \\ h(2n+1) &= 2h(n)+1 \end{cases}$$

for all $n \in \mathbb{N}_0$. Denote $f(n) = g(h(n))$.

a) Calculate $f(1998)$.

b) Prove that for every $n \in \mathbb{N}$ there exists a positive integer k such that either $n = \underbrace{f(f(\dots f}_{k}(0)\dots))$ or $0 = \underbrace{f(f(\dots f}_{k}(n)\dots))$.

(V. Nekrashevych, Kyiv)

95. In 1896 lord Coin has decided to play a game. From the January 1 till December 31 every day he chooses among two match boxes an arbitrary one and placed a match from it to another box (if the chosen box was not empty). If the chosen box was empty then he placed a match from the other box to the chosen one. What is the probability that after the December 31 the both boxes will have an equal number of matches if at the beginning each box had a) $n = 400$ b) $n = 200$ c) $n = 100$ matches?

(V. Mazorchuk, Kyiv)

96. A tetrahedron $ABCD$ is circumscribed around a sphere ω of the radius r, tangent to the faces ABC, BCD, CDA, DAB in the points D_1, A_1, B_1, C_1 respectively. The lines AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 intersect the sphere ω for the second time at the points A_2, B_2, C_2, D_2 respectively. Prove the inequality

$$AA_1 \cdot A_1A_2 + BB_1 \cdot B_1B_2 + CC_1 \cdot C_1C_2 + DD_1 \cdot D_1D_2 \geq 32r^2.$$

(V. Yasinskyj, Vinnytsa)

97. Let BM and CN be the bisectors in the triangle ABC ($\angle A = 60°$), intersecting in the point I. Let P and Q be the tangency point of the inscribed circle to the sides AB and AC respectively. Denote by O the midpoint of the segment NM. Prove that the points P, O and $Q$are collinear.

(I. Nagel, Evpatoriya)

98. A cube is partitioned into a finite number of parallelepipeds with their faces parallel to the faces of the cube. Prove that if the sum of the volumes of the spheres circumscribed around the parallelepipeds is equal to the volume of the sphere circumscribed around the cube then all the paralellepipeds of the partition are cubes.

(Romania)