85. Знайдіть усі многочлени $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, відмінні від констант, такі що для довільного дійсного x виконується рівність

$$f(\sin(x)+\cos(x)) = f(\sin(x)) + f(\cos(x)).$$

(Є.Пенцак, Львів)

86. Доведіть, що існують попарно різні натуральні числа a, b, c та d, такі що сума цифр числа $a^2+b^2+c^2+d^2$ дорівнює 19981998.

(і.Мітельман, Одеса)

87. На дошці написано пару (m,n) натуральних чисел. За один крок дозволяється перетворити цю пару на нову, подвоївши будь-яке з цих чисел та додавши одиницю до іншого.

- Чи можливо з пари $(1,1998)$ за декілька кроків отримати пару, що складається з однакових чисел?
- Чи можливо з довільної пари чисел за декілька кроків отримати пару, що складається з чисел, модуль різниці яких дорівнює 13579?
- Чи можливо з довільної пари чисел за декілька кроків отримати пару, що складається з чисел, модуль різниці яких дорівнює фіксованому натуральному k?

(О.Крижанівський, Харків)

88. Знайдіть довжину найменьшого ребра тетраедра максимального об'єму при умові, що сума довжин деяких чотирьох його ребер дорівнює 1.

(В. Ясінський, Вінниця)

89. Доведіть, що довільний опуклий n-кутник $A_1A_2\dots A_n$, у якому $A_iA_{i+1}||A_{i-1}A_{i+2}$ та $A_{i-1}A_{i+1}||A_{i-2}A_{i+2}$ для довільного i, можна за допомогою паралельного проектування відобразити в правильний n-кутник.

(Д.Трибушний, О.Хоменко, Київ)

90. Доведіть, що найбільший спільний дільник чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ більше одиниці тоді та тільки тоді, коли існують числа $b_1, b_2 \dots, b_n$, найбільший спільний дільник яких дорівнює одиниці, такі що

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots \frac{b_n}{a_n} = K,$$

де K не ціле число.

(і. Аржанцев, Москва)

91. Двоє гравців по черзі вписують 0 та 1 в клітинки квадратної дошки роміру $n \times n$. Кожним кроком гравець може використати як 0 так і 1. Після заповнення підраховуються суми r_i та s_i чисел в i-му рядку та стовпчику дошки відповідно, $1 \leqslant i \leqslant n$ та обчислюються

$$R = \sum_{i=1}^{n} i r_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} i s_i.$$

Якщо $R > S$, то перемагає перший гравець, якщо $R \leqslant S$, то перемагає другий гравець. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу?

(В. Мазорчук, Київ)

85. Find all non-constant real polynomials $f(x)$ such that for any real x the following equality holds:

$$f(\sin(x) + \cos(x)) = f(\sin(x)) + f(\cos(x)).$$

(E.Pentsak, , Lviv)

86. Prove that there exist pairwise distinct positive integers a, b, c and d, such that the sum of digits of the number $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ equals to 19981998.

(I.Mitelman, Odessa)

87. A pair (m, n) of positive integers is written on a blackboard. In one step one can double any of these numbers and add 1 to another one.

    - Is it possible to obtain a pair of equal numbers from the pair $(1, 1998)$ using the above operation?
    - Is it possible to obtain a pair of numbers such that the absolute value of their difference is equal to 13579 from any given pair?
    - Is it possible to obtain a pair of numbers such that the absolute value of their difference is equal to k, where k is a fixed positive integer, from any given pair?

(O.Kryzhanovskyy, Harkiv)

88. Find the length of the shortest edge of a tetrahedron subject to the condition that the sum of lengths of some four edges of this tetrahedron equals to 1.

(V. Yasinskyy, Vinnytsa)

89. Prove, that any convex polygon $A_1A_2\dots A_n$ satisfying the conditions $A_iA_{i+1}||A_{i-1}A_{i+2}$ and $A_{i-1}A_{i+1}||A_{i-2}A_{i+2}$ for all i, can be mapped into a regular polygon by a parallel projection.

(D.Trybushnyy, O.Khomenko, Kyiv)

90. Prove that the greater common divisor of $a_1, a_2, \dots, a_n$ is greater that 1 if and only if there exist numbers $b_1, b_2 \dots, b_n$ whose greater common divisor is 1 such that

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots \frac{b_n}{a_n} = K,$$

where K is a non-integer.

(I. Arzantsev, Moscow)

91. Two players fill an $n \times n$ square board with 0 and 1 and each of them can use both 0 and 1. As soon as the board is filled they calculate the sums r_i and s_i of numbers in i-th row and column correspondingly for $1 \leqslant i \leqslant n$. Set

$$R = \sum_{i=1}^{n} ir_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} is_i.$$

The first player is proclaimed to be the winner if and only if $R < S$ and the second player is proclaimed to be the winner otherwise. Who will win under the right play?

(V. Mazorchuk, Kyiv)