78. Позначимо через $S(n)$ суму цифр натурального числа $n$. Чи існують такі натуральні числа $a$ та $b$, що для довільного натурального $n$ виконується нерівність $S(am) < S(bm)$?

(С.Мозговий, Київ)

79. Коло $\omega$ описане навколо гострокутного трикутника $ABC$. $AN$ та $CK$ є висотами трикутника $ABC$. Медіана $BM$ перетинає коло $\omega$ у точці $P$. Точку $Q$ вибрано на відрізку $BM$ таким чином, що $MQ = MP$. Доведіть, що точки $B$, $K$, $Q$ та $N$ лежать на одному колі.

(і.Нагель, євпаторія)

80. Знайдіть усі дійсні функції $f$, що визначені на всій множині дійсних чисел і які зодовольняють наступну умову: для довільних дійсних $x$ та $y$ значення $f(x+y)$ дорівнює або $2f(x)+f(y)$ або $f(x)+2f(y)$.

(О.Крижанівський, Харків)

81. Нехай $O$ позначає центр правильного шестикутника $A_1A_2\ldots A_6$. Всередині кожного з трикутників $OA_1A_2$, $OA_2A_3$, $\ldots$ , $OA_6A_1$ відмітили по одній точці $B_1$, $B_2$, $\ldots$ , $B_6$ відповідно таким чином, що $\angle B_1A_2B_2 = \angle B_2A_3B_3 = \ldots = \angle B_6A_1B_1 = 60^\circ$. Доведіть, що площа дванадцятикутника $A_1B_1A_2B_2\ldots A_6B_6$ не менша за половину площі шестикутника $A_1A_2\ldots A_6$.

(В. Ясінський, Вінниця)

82. Доведіть, що для всіх дійсних $x \geq 1$, $y \geq 1$ виконується нерівність

$$\frac{x^{1998}+y}{y^{1998}+x} - 1 \geq \ln \frac{(x^{1997}+1)^{\frac{1999}{1997}}}{x} - \ln \frac{(y^{1997}+1)^{\frac{1999}{1997}}}{y}.$$

(Є.Пенцак, Л.Здомський, Львів)

83. Знайдіть необхідну і достатню умову того, що ненульовим векторам $v_1$, $v_2$, $\ldots$ , $v_n$ тривимірного простору, які починаються в початку координат, можна приписати цілі числа $a_1$, $a_2$, $\ldots$ , $a_n$ відповідно так, щоб

- для всякої прямої $l$, сума чисел, які відповідають векторам, що лежать на $l$, не перевищувала третини суми усіх чисел;
- для всякої площини $\pi$, сума чисел, які відповідають векторам, що лежать у цій площини, не перевищувала двох третин суми усіх чисел.

(і. Аржанцев, Москва)

84. Два гоночні автомобілі одночасно рушають по круговому треку зі швидкостями $v_1$ та $v_2$ відповідно. Після кожного кола перший автомобіль збільшує свою швидкість вдвічи, а другий — втричі. Автомобіль вважається фаворитом, якщо знайдеться таке натуральне $N$, що цей автомобіль виграє гонку завдовжки у $n$ кіл для довільного $n > N$. При якому початковому значенні величини $a = v_1/v_2$ фаворитом буде перший автомобіль?

(В. Мазорчук, Київ)

78. Let $S(n)$ denote the sum of all digits of a positive integer $n$. Do there exist positive integers $a$ and $b$ such that for any positive integer $n$ the inequality $S(am) < S(bm)$ holds?

(S.Mozgovyy, Kyiv)

79. A circle $\omega$ is outscribed over an acute triangle $ABC$. $AN$ and $CK$ are altitudes of $ABC$. The median $BM$ crosses the circle $\omega$ in the point $P$. The point $Q$ is chosen on the section $BM$ such that $MQ = MP$. Prove that the points $B$, $K$, $Q$ are $N$ belong to the same circle.

(I.Nagel, Evpatoriya)

80. Find all real functions $f$, defined on the real line and satisfying the following condition: for any real $x$ and $y$ the value $f(x+y)$ coincides with $2f(x)+f(y)$ or with $f(x)+2f(y)$.

(O.Kryzhanovskyy, Harkiv)

81. Let $O$ denote the center of the right hexagon $A_1A_2\ldots A_6$. Inside each of the triangles $OA_1A_2$, $OA_2A_3$, ... , $OA_6A_1$ the points $B_1$, $B_2$, ... , $B_6$ are chosen correspondingly in such way that $\angle B_1A_2B_2 = \angle B_2A_3B_3 = \ldots = \angle B_6A_1B_1 = 60^\circ$. Prove that the area of the polygon $A_1B_1A_2B_2\ldots A_6B_6$ is not less than the half of the area of $A_1A_2\ldots A_6$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsa)

82. Prove that for all real $x \geq 1$, $y \geq 1$ the following inequality holds:

$$\frac{x^{1998}+y}{y^{1998}+x} - 1 \geq \ln\frac{(x^{1997}+1)^{\frac{1999}{1997}}}{x} - \ln\frac{(y^{1997}+1)^{\frac{1999}{1997}}}{y}.$$

(E.Pentsak, L.Zdomskyy, Lviv)

83. Find necessary and sufficient conditions for the following situation to be the case: to the vectors $v_1$, $v_2$, ... , $v_n$ in the space starting in the origin, it is possible to put into correspondence integers $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$ respectively in such way that

- for any line $l$, the sum of all numbers corresponding to the vectors lying on $l$, is not greater than one third of the sum of all numbers;
- for any plane $\pi$, the sum of all numbers corresponding to the vectors lying on $\pi$, is not greater than two third of the sum of all numbers.

(I. Arzantsev, Moscow)

84. Two racing cars simultaneously start on the round track with the velocities $v_1$ and $v_2$ correspondingly. After each circle the first car increases its velocity in two times and the second car — in three times. The car is said to be the favourite if there exists a positive integer $N$, such that this car wins any race in $n$ circles for any $n > N$. Find all values of $a = v_1/v_2$ such that the first car is the favourite.

(V. Mazorchuk, Kyiv)