

71. Дідусь Мазай має човен, що може везти, крім самого діда, рівно D кілограмів вантажу (не більше й не менше). На острові залишились зайці, вага кожного з яких є цілим числом кілограмів, але не більша за 12кг. Доведіть, що існує таке число D , що дідусь Мазай може перевезти за декілька разів будь-яку групу зайців, сумарна вага яких ділиться на D .

(І.Аржанцев, Д.Піонтковський, Москва)

72. Функція f визначена на множині пар натуральних чисел та набуває натуральних значень. Відомо, що $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ для довільних натуральних x, y та z . Крім того, існує таке C , що $f(x, y) < C$ для довільних натуральних x та y . Доведіть, що існує таке натуральне x , що $f(x, x) = x$.

(О. Хоменко, Київ)

73. Трапеція $ABCD$ є вписаною в коло радіуса R та описаною навколо кола радіуса r . Знайдіть відстань між центрами цих кіл.

(Р. Ушаков, Київ)

74. На сфері проведено три кола, що мають спільну точку O . Відомо, що ці кола попарно перетинаються в трьох різних точках A, B та C , які відрізняються від O . Знайдіть суму кутів “сферичного” трикутника ABC . (Кут при перетині двох ліній називається кут між дотичними до цих ліній в точці перетину).

(О. Хоменко, Київ)

75. Доведіть, що площа трикутника зі сторонами a, b та c менша за $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}$.

(В. Ясінський, Вінниця)

76. Нехай M позначає деяку множину попарно різних точок декартової площини, обидві координати яких є цілими числами. Яку максимальну кількість точок може містити M , якщо відомо, що відстань від довільної точки M до початку координат менша за відстань до будь-якої іншої точки з M ?

(і. Аржанцев, Москва)

77. Кожен з $n > 2$ міст країни сполучені однією дорогою. Задля безпеки руху МВС країни розпорядилося зробити рух на кожній з доріг одностороннім, але так, щоб кількість доріг, якими можна виїхати в будь-яке місто і кількість доріг, якими можна виїхати з нього, була не меншою за $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

а) Доведіть, що при довільному виконанні розпорядження МВС, з будь-якого міста країни в будь-яке інше місто можна буде проїхати не більше ніж по трьох дорогах.

а) Доведіть, що розпорядження МВС можна виконати так, що з будь-якого міста країни в будь-яке інше місто можна буде проїхати не більше ніж по двох дорогах.

(В. Мазорчук, Київ)

71. Grandfather Mazay has a boat that seat exactly D kg of cargo if say nothing about Mazay himself. A number of hares were forgotten on the island. A hare has a height that is integer number of kilograms and is not greater than 12kg. Prove that there exists D such that grandfather Mazay can save (by some tries) any group of hares having common height divisible by D .

(I. Arzantsev, D.Piontkovskyy, Moscow)

72. A function f is defined on the set of pairs of positive integers and has positive integer values. It is known that $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ for all positive integers x, y and z . Moreover, there exists C such that $f(x, y) < C$ for all positive integers x and y . Prove that there exists a positive integer x such that $f(x, x) = x$.

(A. Khomenko, Kyiv)

73. Trapezium $ABCD$ is inscribed into a circle of radius R and circumscribed over a circle of radius r . Find the distance between the centers of these circles.

(R. Ushakov, Kyiv)

74. Three circles containing point O were drawn on a sphere. It is known that these circles pairwise intersect each other in three different points A, B and C , which differ from O . Find the sum of angles of “spherical” triangle ABC . (An angle between two lines is the corresponding angle between the tangent lines taken in the cross point).

(A. Khomenko, Kyiv)

75. Prove that the area of a triangle with the sides a, b and c is less than $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}$.

(V. Yasinsky, Vinnytsa)

76. Let M denote a set of pairwise distinct points on the plane having integer coordinates. Find the maximal possible number of points in M under the condition that the distance between any point in M and the origin is less than the distance between this point and any other point in M ?

(I. Arzantsev, Moscow)

77. Each 2 from $n > 2$ cities of the Country are connected by one road. For the traffic safety Police give an instruction to permit only one-way traffic on each road, with the only condition that the number of roads going from any town as good as the number of roads coming to this town should not be less than $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.

a) Prove that after fulfillment of this instruction it would be possible to reach any town from any other town using not more than three roads.

a) Prove that the instruction can be fulfilled in the way such that it would be possible to reach any town from any other town using not more than two roads.

(V. Mazorchuk, Kyiv)