

64. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння

$$x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2.$$

(і. Бурбан, Київ)

65. Послідовність слів, кожне з яких складається з двох літер  $A$  та  $B$  будується таким чином: першим словом послідовності є  $A$ , а кожне наступне утворене з попереднього заміною кожної літери  $A$  на  $BAA$ , та кожної літери  $B$  на  $AB$ . Чи може в цій послідовності зустрітись періодичне слово, тобто слово, що має вигляд  $WW \dots W$ , для деякого слова  $W$ ?

(І. Бобак, Луцьк)

66. Доведіть нерівність:

$$\sum_{k=-1997}^{1997} \frac{\sqrt{|k+1|}}{(\sqrt{2})^{|k|}} > \sum_{k=-1997}^{1997} \frac{\sqrt{|k|}}{(\sqrt{2})^{|k|}}.$$

(О. Кукуш, Київ)

67. Планета Круговерть має форму нескінченного в обидва боки кругового циліндра радіуса  $r$ . На поверхні планети розташовано дві обсерваторії  $A$  та  $B$ , причому відрізок  $AB$  перетинає вісь циліндра та є перпендикулярним до неї. Корабель-загарбник планує відшукати таку кругову орбіту фіксованого радіусу  $R$  об'їзду планети з центром на прямій  $AB$ , площина якої містила б цю пряму, утворювала б кут  $\theta$  з віссю циліндра та мала лише одну спільну точку з поверхнею планети. Для яких значень  $\theta$  це можна зробити?

(О. Хоменко, Київ)

68. Побудуйте опуклий чотирикутник, знаючи ортогональні проекції точки перетину його діагоналей на всі чотири сторони.

(В. Ясінський, Вінниця)

69. У понеділок Робінзон Крузо написав декілька цілих чисел та навчив П'ятницю їх додавати (можливо багаторазово). Відомо, що серед тих чисел були як додатні так і від'ємні числа. У вівторок Робінзон навчив П'ятницю віднімати ті числа. Чи може П'ятниця отримати у вівторок число, якого він не міг отримати в понеділок.

(і. Аржанцев, Москва)

70. Трьох підозрюваних, один з яких лицар (завжди говорить правду), один – брехун (завжди бреше) та один нормальний (говорить і те і інше), було запитано у суді. Спочатку їх по черзі запитали: “Чи є Ви злочинцем?”, і усі відповіли “Ні”. Потім їх у такій само черзі запитали “Чи сказали Ви щойно правду?”, і усі відповіли “Так”. Нарешті, їх у тій само черзі запитали “Чи відповів попередній підозрюваний правду?”, і усі відповіли “Ні”. Чи можна визначити, хто з них злочинець, і яке його життєве кредо, якщо відомо, що він один.

(В. Мазорчук, Київ)

64. Find all integer solutions of the equation

$$x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2.$$

(I. Burban, Kyiv)

65. The sequence of words, each of which consists of two letters  $A$  and  $B$  is defined as follows: the first word is  $A$  and the next one is constructed from the previous one by substitution of each  $A$  by  $BAA$  and each  $B$  by  $AB$ . Is it possible for this sequence to contain a periodic word, that is the word of the form  $WW \dots W$  for some word  $W$ ?

(I. Bobak, Lutsk)

66. Prove the inequality:

$$\sum_{k=-1997}^{1997} \frac{\sqrt{|k+1|}}{(\sqrt{2})^{|k|}} > \sum_{k=-1997}^{1997} \frac{\sqrt{|k|}}{(\sqrt{2})^{|k|}}.$$

(O. Kukush, Kyiv)

67. The planet Round-Round has the form of an infinite in both directions cylinder of radius  $r$ . There are two observatories  $A$  and  $B$  on the planet, moreover the section  $AB$  crosses the axes of the cylinder and is perpendicular to it. The invaders are planning to find a circular orbit of the fixed radius  $R$  around this planet with the center on  $AB$  such that the plane of this orbit contains  $AB$ , forms the angle  $\theta$  with the axes and has the unique common point with planet surface. Find those  $\theta$  such that the corresponding orbit exists?

(A. Khomenko, Kyiv)

68. Construct a convex quadrangle if known are the orthogonal projection of the cross point of its diagonals on all four sides.

(V. Yasinsky, Vinnytsa)

69. On Monday Robinson Kruso wrote down some integers and taught The Friday how to add them (possibly many times). It is known that there are both positive and negative numbers among those integers. On Tuesday Robinson taught The Friday how to subtract those integers. Is it possible that The Friday can obtain on Tuesday an integer that he could not obtain on Monday?

(I. Arzantsev, Moscow)

70. Three men are suspected to commit a crime. It is known that one of them is knight (speaks only truth) another one is liar (speaks only lies) and the last is normal (can say anything), moreover, only one of them is criminal. During interrogation they were asked "Are you criminal?" and all answers were "No". Then at the same sequence they were asked "Is your previous answer truthful?" and all of them said "Yes". At last, they were asked "Is the answer of the previous man truthful?" at the same sequence and all answers were "No" again. Can you determine the criminal and say something about his creed?

(V. Mazorchuk, Kyiv)