57. Знайдіть усі цілі розв'язки рівняння

$$3xy + 9y = 9 + 3x + x^2.$$

(Р. Ушаков, Київ)

58. Знайдіть максимум функції

$$f(x,y,z,t) = \frac{\sqrt[16]{x}\,\sqrt[8]{y}\,\sqrt[4]{z}\sqrt{t}}{1+x+2y+z+t}$$

при $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $t \geq 0$.

(О. Саран, Житомир)

59. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається сторони BC у точці E. З вершини C проведено відрізок CD, що перпендикулярний до BC та рівний за довжиною стороні CA. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник BCD, якщо $CE = 1$см., а відрізок BD на 2см. коротший за BA.

(О. Кукуш, Київ)

60. Доведіть, що для довільних додатніх чисел a, b, c, d виконується нерівність

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{10} + \left(\frac{b}{c}\right)^{10} + \left(\frac{c}{d}\right)^{10} + \left(\frac{d}{a}\right)^{10} \geq abcd\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + \frac{1}{d^4}\right).$$

(В. Петечук, Ужгород)

61. Через вершини трикутника ABC одиничної площі проведені перпендикуляри до його площини, на яких взято точки A_1, B_1, C_1 відповідно. Усі ці точки розташовано по один бік від площини ABC і відрізки AA_1, BB_1 та CC_1 рівні відповідним висотам даного трикутника. Нехай S — точка перетину площин AB_1C_1, A_1BC_1 та A_1B_1C. Знайдіть площу поверхні піраміди $SABC$.

(В. Ясінський, Вінниця)

62. Послідовність многочленів $\{P_n(x)\}$ будується таким чином: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x)$, $n \geq 0$. Чи існує така функція $f(x)$, відмінна від сталої, що $P_{1997}(f(x)) = f(1997x)$?

(І. Бобак, Луцьк)

63. Квадратна дошка 1997×1997 заповнена плюсами. Першим кроком змінюється знак у всіх клітинах, що стоять у рядках, номери яких кратні 1. Другим кроком змінюється знак у всіх клітинах, що стоять у стовпчиках, номери яких кратні 2. Третім кроком змінюється знак у всіх клітинах, що стоять у рядках, номери яких кратні 3 і так далі. Чого буде більше на дошці після 1997 кроків — плюсів чи мінусів?

(В. Мазорчук, Київ)

57. Find all integer solutions of the equation

$$3xy + 9y = 9 + 3x + x^2.$$

(R. Ushakov, Kyiv)

58. Find the maximum value of the function

$$f(x, y, z, t) = \frac{\sqrt[16]{x}\,\sqrt[8]{y}\,\sqrt[4]{z}\,\sqrt{t}}{1 + x + 2y + z + t}$$

under conditions $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $t \geq 0$.

(O. Saran, Zhytomyr)

59. A circle inscribed into triangle ABC touches side BC in a point E. Section CD is perpendicular to the plane BC and has the same length as CA. Find a radius of a circle inscribed into triangle BCD if $CE = 1$sm., and the length of BD is 2sm. more than the length of BA.

(O. Kukush, Kyiv)

60. Prove, that for any positive a, b, c, d holds

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{10} + \left(\frac{b}{c}\right)^{10} + \left(\frac{c}{d}\right)^{10} + \left(\frac{d}{a}\right)^{10} \geq abcd\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + \frac{1}{d^4}\right).$$

(V. Petechuk, Uzhgorod)

61. Given a triangle ABC. The perpendiculars to the plane ABC pass through the vertices of the triangle. Points A_1, B_1, C_1 were fixed on the corresponding perpendiculars at the following way: all of them lie at the same side with respect to ABC. Moreover, the lengths of AA_1, BB_1 та CC_1 equal to the lengths of the corresponding altitudes of ABC. Let S be an intersection point of plains AB_1C_1, A_1BC_1 and A_1B_1C. Find an area of the surface of pyramid $SABC$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsa)

62. A sequence $\{P_n(x)\}$ of polynomials is constructed at the following way: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x)$, $n \geq 0$. Does there exist a non-constant function $f(x)$ such that $P_{1997}(f(x)) = f(1997x)$?

(I. Bobak, Lutsk)

63. Square board 1997×1997 filled with pluses. By the first motion one changes all signs in the rows whose numbers are divisible by 1. By the second motion one changes all signs in the columns whose numbers are divisible by 2. By the third motion one changes all signs in the rows whose numbers are divisible by 3 and so on. What should be bigger after 1997 motions — the number of pluses on the board or the number of minuses on the board?

(V. Mazorchuk, Kyiv)