50. Доведіть, що для кожного натурального n виконується рівність

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} = \sum_{i=-n}^{n} \left(\sum_{j=0}^{[\frac{n-|i|}{2}]} \binom{n}{2j+|i|}\binom{2j+|i|}{j} \right)^2,$$

де через $[x]$ позначено цілу частину числа x, а через $\binom{n}{k}$ позначено біноміальний коефіцієнт $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(В. Мазорчук, КиЇв)

51. В гострокутному трикутнику ABC, в якому проведено висоти AM та CK і середню лінію PL, що паралельна стороні AC, кут B дорівнює $60°$. Доведіть, що пряма, яка проходить через точку B та точку перетину відрізків PL та KM, є бісектрисою кута B.

(І. Нагель, Херсон)

52. Доведіть, що для довільних дійсних чисел a, b виконуються рівності

(a) $|a| + |b| + ||a| - |b|| = |a + b| + |a - b|$;
(b) $|a| + |b| - ||a| - |b|| = ||a + b| - |a - b||$;
(c) $|a - b| - ||a| - |b|| = 2\frac{|ab| - ab}{|a| + |b| + |a+b|}$, якщо $a^2 + b^2 \neq 0$.

(Р. Ушаков, КиЇв)

53. Через точку S, яка лежить поза колом ω, проведено дві січні до кола, що перетинають його в точках A та B і C та D відповідно, причому $SA < SB$ та $SC < SD$. Позначимо через T точку перетину хорд AD та BC. Доведіть, що точка перетину дотичних до ω в точках B та D лежить на прямій ST.

(В. Петечук, Ужгород)

54. Натуральне число n назвемо надскладеним, якщо кількість дільників n більша за кількість дільників кожного натурального числа $m < n$.

(a) Знайдіть найменше натуральне n таке, що $n!$ не є надскладеним.
(b) Доведіть, що $n!$ не є надскладеним для всіх $n > 100$.

(В. Некрашевич, КиЇв)

55. Серед усіх восьмигранників з трикутними гранями, вписаних у дану кулю, знайти такий, що має найбільший об'єм.

(О. Кукуш, КиЇв)

56. Послідовність $\{x_n; n \geq 1\}$ задана таким чином:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{1996} = 0, \quad x_{1997} = 1, \quad x_{n+1997} = \frac{x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{n+1996}}{1997}, n \geq 1.$$

Доведіть, що ця послідовність збігається, та знайдіть ЇЇ границю.

(О. Кирнасівський, В. Ясінський, Вінниця)

50. Prove that for any positive integer n holds

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}=\sum_{i=-n}^{n}\left(\sum_{j=0}^{[\frac{n-|i|}{2}]}\binom{n}{2j+|i|}\binom{2j+|i|}{j}\right)^2,$$

where $[x]$ denotes the integer part of x, and $\binom{n}{k}$ denotes the binomial coefficient $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(V. Mazorchuk, Kyiv)

51. All angels of a triangle ABC are less than $90°$, moreover, angel B equals $60°$. Let AM and CK be the altitudes of ABC and P and L be the middle points of AB and CB correspondingly. Prove that the line which pass through B and the point of intersection of PL and KM is the bisector of the angel B.

(I. Nagel, Herson)

52. Prove, that for any real a, b holds

(a) $|a|+|b|+||a|-|b||=|a+b|+|a-b|$;

(b) $|a|+|b|-||a|-|b||=||a+b|-|a-b||$;

(c) $|a-b|-||a|-|b||=2\frac{|ab|-ab}{|a|+|b|+|a+b|}$, if $a^2+b^2\neq 0$.

(R. Ushakov, Kyiv)

53. Two secants to the circle ω pass through the point S lying outside ω. Let A and B, C and D be the intersection points with $SA < SB$ and $SC < SD$. Denote by T the point of intersection of the chords AD and BC. Prove, that the intersection point of two tangent lines passing through B та D belongs to ST.

(V. Petechuk, Uzhgorod)

54. We will call a positive integer n super-compound provided its number of divisors is greater than the number of divisors of any positive integer $m < n$.

(a) Find the minimal n such that $n!$ is not super-compound.

(b) Prove that $n!$ is not super-compound for any positive integer $n > 100$.

(V. Nekrashevych, Kyiv)

55. Find the polyhedron with 8 triangular sides and maximal volume which is drown in the fixed sphere.

(O. Kukush, Kyiv)

56. The sequence $\{x_n; n\geq 1\}$ is defined as follows:

$$x_1=x_2=\cdots=x_{1996}=0,\quad x_{1997}=1,\quad x_{n+1997}=\frac{x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{n+1996}}{1997}, n\geq 1.$$

Prove that it has a limit and find it.

(O. Kyrnasivskyy, V. Yasinsky, Vinnytsa)