43. Позначимо через $P(n)$ добуток цифр натурального числа n. Доведіть, що для кожного натурального числа a послідовність (a_n), визначена правилами:

$$a_1 = a, \quad a_{k+1} = a_k + P(a_k) \text{ для всіх } k \geq 1,$$

є обмеженою.

(В. Мазорчук, Київ)

44. Доведіть, що є нескінченно багато різних відображень $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел у себе, які для всіх n задовольняють співвідношення

$$f(f(n)) = n^3 + 1997.$$

Чи є серед таких відображень взаємно однозначні?

(Є. Пенцак, Львів)

45. Доведіть, що для всіх дійсних чисел x виконується нерівність

$$1^x + 2^x + 6^x + 12^x \geq 4^x + 8^x + 9^x.$$

Для яких x має місце рівність?

(Р. Ушаков, Київ)

46. За один крок записане на дошці число a дозволяється замінити на число $1 - a$ або $a/2$. Доведіть, що яким би не було початкове число, за певну кількість кроків на дошці можна отримати число, яке відрізняється від $1/1997$ менше, ніж на 2^{-1997}.

(О. Ганюшкін, Київ)

47. Позначимо через M множину всіх тих точок координатної площини, обидві координати яких є цілими числами.

a) Доведіть, що кожну точку з M можна пофарбувати в один з двох даних кольорів таким чином, що жодна нескінченна одноколірна підмножина з M не буде симетричною ні відносно точки $A(0, 0)$ ні відносно точки $B(1, 0)$.

b) Доведіть, що для кожного розфарбування множини M, яке задовольняє умову пункту a), і для кожної точки $C(x, y)$ із M із ненульовою другою координатою y знайдеться нескінченна одноколірна множина точок, симетрична відносно C.

(І. Банах, Львів, І. Протасов, Київ)

48. Точки A, B, C і D на колі вибрали таким чином, щоб точка S перетину прямих AB та CD лежала зовні кола, а точка T перетину прямих AC та BD – всередині кола. Нехай точки M і N лежать відповідно на хордах BD і AC, а K є точкою перетину прямих ST і MN. Доведіть, що

$$\frac{MK}{KN} = \frac{TM}{TN} \cdot \frac{BD}{AC}.$$

(В. Петечук, Ужгород)

49. Всередені правильної піраміди $A_1A_2A_3\ldots A_{1997}$ із вершиною A_{1997} вибрали довільним чином точку A. Потім із цієї точки опустили перпендикуляри AB_1, $AB_2, \ldots,$ AB_{1996} на кожне з бічних ребер піраміди. Доведіть, що відрізки $A_{1997}B_1$, $A_{1997}B_2, \ldots,$ $A_{1997}B_{1996}$ можна розбити на дві групи так, щоб суми довжин відрізків у цих групах були однаковими.

(В. Ясінський, Вінниця)

43. Let $P(n)$ denotes a product of all digits of a positive integer n. Prove that for any positive integer a sequence (a_n) defined by

$$a_1 = a, \quad a_{k+1} = a_k + P(a_k) \text{ для всіх } k \geq 1,$$

is bounded.

(V. Mazorchuk, Kyiv)

44. Prove that there is infinitely many different maps $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ from the set $\mathbb{N}$ of all positive integers into itself, which for all n satisfy the following condition:

$$f(f(n)) = n^3 + 1997.$$

Can such a map be one-to-one?

(E. Pentsak, Lviv)

45. Prove that for any real x the following inequality holds:

$$1^x + 2^x + 6^x + 12^x \geq 4^x + 8^x + 9^x.$$

Find all x for which an equality holds.

(R. Ushakov, Kyiv)

46. In one step it is possible to exchange a number a drown on a blackboard with $1 - a$ or $a/2$. Prove that for any given a it is possible to obtain on a blackboard some number b which differs form $1/1997$ not more that on 2^{-1997}.

(O. Ganyushkin, Kyiv)

47. Let M denotes the set of all points on the plane which have integer coordinates.

a) Prove that it is possible to color each point from M into two given colors in such a way that any infinite set consisting of the points having the same color, is not symmetrical with respect to neither $A(0,0)$ nor $B(1,0)$.

b) Prove that for any coloring of M which satisfies condition of the case a) and for any point $C(x,y)$ with non-zero y there is infinite set consisting of the points having the same color which is symmetrical with respect to C.

(I. Banah, Lviv, I. Protasov, Kyiv)

48. Points A, B, C and D are chosen on a circle in such a way that the point S of the intersection of the lines AB and CD lies outside the circle and the point T of intersection of the lines AC and BD lies inside the circle. Let points M and N lie on chords BD and AC respectively and K denotes point of intersection of the lines ST and MN. Prove that

$$\frac{MK}{KN} = \frac{TM}{TN} \cdot \frac{BD}{AC}.$$

(V. Petechuk, Uzhgorod)

49. Inside the right pyramid $A_1A_2A_3\dots A_{1997}$ with the top A_{1997} a point A is chosen. Perpendiculars AB_1, $AB_2, \dots,$ AB_{1996} fall on the lateral sides of the pyramid. Prove that the set of sections $A_{1997}B_1$, $A_{1997}B_2, \dots,$ $A_{1997}B_{1996}$ can be divided int two parts in such a way that the sum of lengths of the sections inside each part are the same.

(V. Yasinsky, Vinnytsa)