36. Якого найменшого значення може набувати вираз

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}+\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin^2\frac{\beta}{2}},$$

якщо α, β і γ — кути трикутника?

(В. Ясінський, Вінниця)

37. Нехай $f(x)=(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)$, де всі числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ — невід'ємні. Доведіть, що

$$f'(1)\geq n(1+\sqrt[n]{f(0)})^{n-1}.$$

(і. Бурбан, Київ)

38. Нехай $n = 11\dots1$ (1996 одиничок). Чи існує така функція $f(x)$, що для всіх дійсних чисел $x\neq 0$, $x\neq 1$ виконується рівність

$$f(f(\dots(f(x))\dots))=\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^n?$$

(в лівій частині записано n-ту ітерацію f).

(і. Бобак, Луцьк)

39. Через $\binom{n}{k}$ позначимо кількість k-елементних підмножин n-елементної множини. Доведіть, що

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-2k)^m=\begin{cases}0, & \text{якщо } 0\leqslant m\leqslant n-1;\\ 2^n\cdot n!, & \text{якщо } m=n.\end{cases}$$

(М. Городній, Київ)

40. Нехай додатні числа a, b, c, d задовольняють умові

$$\frac{a}{2b-c}=\frac{2c-b}{d},$$

рівняння $a-(b+c)x+dx^2=0$ має два дійсні корені, а x_1 — більший з цих коренів. Доведіть, що співвідношення

$$x_1=\frac{a}{2b-c}=\frac{2c-b}{d}$$

виконується тоді й лише тоді, коли $b<c$.

(В. Мазорчук, Київ)

41. Нехай O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Перпендикуляр, проведений з точки A до прямої CO, перетинає пряму CB в точці M. Обчисліть $|CM|$, якщо $|CA|=a$ і $|CB|=b$.

(В. Ясінський, Вінниця)

42. Послідовність трикутників $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \ldots, \triangle A_nB_nC_n, \ldots$ будується за таким правилом: на сторонах A_nB_n, B_nC_n і C_nA_n вибираємо відповідно точки C'_n, A'_n і B'_n і позначимо через A_{n+1}, B_{n+1} і C_{n+1} відповідно точки перетину відрізків $B_nB'_n$ і $C_nC'_n$, $C_nC'_n$ і $A_nA'_n$, $B_nB'_n$ і $A_nA'_n$. Для яких початкових трикутників $A_1B_1C_1$ у цій послідовності будуть зустрічатись подібні трикутники, якщо для всіх n

a)

$$\angle A_nC_nC'_n : \angle B_nC_nC'_n = \angle C_nB_nB'_n : \angle A_nB_nB'_n = \angle B_nA_nA'_n : \angle C_nA_nA'_n = 1 : 2$$

b)

$$|C'_nA_n| : |B_nC'_n| = |A'_nB_n| : |C_nA'_n| = |B'_nC_n| : |A_nB'_n| = 1 : 2?$$

(В. Некрашевич, Д. Павлов, Київ)

36. Find the minimum value of the following expression

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}+\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin^2\frac{\beta}{2}},$$

where α, β and γ — angles of some triangle?

(V. Yasinskyy, Vinnytza)

37. Let $f(x)=(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)$, where a_1, $a_2,\dots$, a_n — non-negative numbers. Prove that

$$f'(1)\geq n(1+\sqrt[n]{f(0)})^{n-1}.$$

(I. Burban, Kyiv)

38. Let $n=11\dots1$ (1996 figures). Does there exist such a function $f(x)$ that for all real $x\neq 0$, $x\neq 1$ holds

$$f(f(\dots(f(x))\dots))=\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^n?$$

(in the left side the n-th iteration of f is written).

(I. Bobak, Luts'k)

39. Let $\binom{n}{k}$ denotes the number of subsets with k elements in n-element set. Prove that

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-2k)^m=\begin{cases}0, & \text{if } 0\leqslant m\leqslant n-1;\\ 2^n\cdot n!, & \text{if } m=n.\end{cases}$$

(M. Gorodniy, Kyiv)

40. Let a, b, c, d be positive real numbers, satisfying the condition

$$\frac{a}{2b-c}=\frac{2c-b}{d},$$

equation $a-(b+c)x+dx^2=0$ has two real roots and x_1 be the largest root. Prove that the equality

$$x_1=\frac{a}{2b-c}=\frac{2c-b}{d}$$

holds if and only if $b<c$.

(V. Mazorchuk, Kyiv)

41. Let O be a center of a circle, circumscribed over $\triangle ABC$. Perpendicular, drown form the point A on the line CO, cross the line CB in the point M. Find $|CM|$, if $|CA|=a$ and $|CB|=b$.

(V. Yasinskyy, Vinnytza)

42. Sequence of triangles $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2, \ldots$, $\triangle A_nB_nC_n, \ldots$ is constructed in the following way: on the sides A_nB_n, B_nC_n and C_nA_n we choose points C_n', A_n' and B_n' correspondingly and denotes A_{n+1}, B_{n+1} and C_{n+1} the points of intersection of B_nB_n' and C_nC_n', C_nC_n' and A_nA_n', B_nB_n' and A_nA_n' correspondingly. Find all possible $A_1B_1C_1$ for which sequence contains at least one pair of similar triangles, if for all n

a)

$$\angle A_nC_nC_n' : \angle B_nC_nC_n' = \angle C_nB_nB_n' : \angle A_nB_nB_n' = \angle B_nA_nA_n' : \angle C_nA_nA_n' = 1 : 2$$

b)

$$|C_n'A_n| : |B_nC_n'| = |A_n'B_n| : |C_nA_n'| = |B_n'C_n| : |A_nB_n'| = 1 : 2?$$

(V. Nekrashevych, D. Pavlov, Kyiv)