22. Позначимо через $S(n)$ суму цифр десяткового запису натурального числа n.

а) Доведіть, що для кожного натурального числа n виконується нерівність $S(n) \leqslant 5 \cdot S(2n)$.

б) Доведіть, що існує безліч натуральних чисел n, для яких виконується нерівність $S(n) > 1996 \cdot S(3n)$.

(В. Ясінський, м. Вінниця)

23. Для яких натуральних чисел n послідовність

$$a_1 = n, \quad a_{k+1} = 2a_k - [\sqrt{a_k}]^2 \text{ для всіх } k \geq 1,$$

буде періодичною?

(В. Ясінський, м. Вінниця)

24. Нехай

$$a_n = \sqrt{4 + 2\sqrt{4 + \cdots + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{4+4}}}}}$$

знак $\sqrt{\ }$ зустрічається в правій частині n разів.

а) Доведіть, що для всіх n виконується $a_n < \sqrt{5} + 1$

б) Обчисліть $\lim_{n\to\infty} a_n$

(О. Кукуш, м. Київ)

25. Чи існує функція $f(x)$, яка задовольняє таким умовам:

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всіх дійсних чисел x і y.

(b) $f(1) = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = 1$;

(c) $f(x)$ обмежена на проміжку $[1, \sqrt{2}]$.

(О. Кукуш, м. Київ)

26. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC площі S, як на діаметрі, побудовано коло. На дугах AB і AC вибрали відповідно точки K і M так, що хорда KM є діаметром. Нехай P і Q — основи перпендикулярів, опущених відповідно з точок A і C на хорди CM і AM. Доведіть, що площа чотирикутника $KPMQ$ дорівнює S.

(І. Нагель, м. Євпаторія)

27. Чи можна в перетині правильної 5-кутної піраміди площиною одержати правильний 6-кутник?

(О. Ганюшкін, м. Київ)

28. Натуральне число n назвемо надскладеним, якщо кількість дільників числа n більше за кількість дільників кожного числа $m < n$. Доведіть, що для кожного натурального числа d майже всі надскладені числа (тобто за винятком лише скінченної їх кількості) діляться на d.

(С. Мозговий, В. Некрашевич, м. Київ)

22. Let $S(n)$ denotes the sum of all digits of the positive integer n.

a) Prove, that $S(n) \leqslant 5 \cdot S(2n)$ for every n.

b) Prove, that there exist infinitely many n, with $S(n) > 1996 \cdot S(3n)$.

(V. Yasinski, Vinnitsa)

23. Find all positive integers n for which the sequence

$$a_1 = n, \quad a_{k+1} = 2a_k - [\sqrt{a_k}]^2 \text{ для всіх } k \geq 1,$$

is periodic?

(V. Yasinski, Vinnitsa)

24. Let

$$a_n = \sqrt{4 + 2\sqrt{4 + \cdots + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{4 + 4}}}}}$$

the sign $\sqrt{\ }$ occurs n times.

a) Prove, that $a_n < \sqrt{5} + 1$ for all n.

b) Find $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(O. Kukush, Kyiv)

25. Does there exist the function $f(x)$, satisfying all of the following conditions:

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for all real x and y.

(b) $f(1) = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = 1$;

(c) $f(x)$ is bounded on the interval $[1, \sqrt{2}]$.

(O. Kukush, Kyiv)

26. On the hypotenuse AB of the triangle ABC with $\angle C = 90°$ and the area S, as on the diameter, was drawn a circle. The points K and M was chosen on the AB and AC correspondingly in such a way that the chord KM is a diameter of a circle. Let P and Q be the bases of the perpendiculars, that are drown from the points A and C on the chords CM and AM correspondingly. Prove, that the area of $KPMQ$ equals S.

(I. Nagel, Eupatoria)

27. Does it possible to obtain a right hexagon as a section of right pyramid with the base of the form of right pentagon?

(O. Ganyushkin, Kyiv)

28. We will say the positive integer n to be anti-prime provided the number of all divisors of n is greater then the number of all divisors of any positive integer $m < n$. Prove, that for every positive integer d almost all anti-prime numbers (i.e. all of them except some finite set) is divisible on d.

(S. Mozgovy, V. Nekrashevych, Kyiv)