LIV Міжнародна математична олімпіада

З 18 по 28 липня 2013 року у місті Санта-Марті, Колумбія, проходила 54-та міжнародна олімпіада школярів з математики. В олімпіаді взяли участь 527 учнів з 97 країн.

Склад команди України було визначено на відбірково-тренувальних зборах. За результатами відбору до складу команди України увійшли такі шість учнів:

Микита Щеглов, випускник ліцею № 208 м. Києва;

Вадим Калашников, учень 10 класу Харківського фізико-математичного ліцею № 27;

Євгеній Діомідов, учень 10 класу Русанівського ліцею м. Києва;

Андрій Рязанов, випускник Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер";

Катерина Матвіїв, випускниця НВК № 26 м. Луцька;

Данило Хілько, випускник ліцею № 208 м. Києва.

Керівник команди — Л.В. Гунько, начальник відділу по роботі з обдарованою молоддю та проведення масових заходів відділення змісту позашкільної освіти Інституту інноваційних технологій і змісту освіти.

Науковий керівник команди — Б.В. Рубльов, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук.

Крім того, до складу команди України в якості помічників керівника команди входили А.В. Анікушин та О.О. Кравченко, а в якості помічників наукового керівника команди — О.О. Клурман та В.Г. Лішунов.

Команда України. Перший ряд зліва направо: Д. Хілько, В. Калашников, Є. Діомідов, К. Матвіїв; другий ряд зліва направо: М. Щеглов, А. Рязанов.

Бронзову медаль отримали учасники, які набрали 15–23 балів, срібну — 24–30 балів, золоту — 31 балів і більше. Усього було розіграно 45 золотих, 92 срібних та 141 бронзову медаль.

Учасники команди України показали такі результати:

Учасник	1	2	3	4	5	6	Сума балів	Нагорода
Вадим Калашников	7	7	7	7	7	0	35	Золота медаль
Данило Хілько	7	2	7	7	7	0	30	Срібна медаль
Євгеній Діомідов	7	6	3	7	2	0	25	Срібна медаль
Микита Щеглов	7	3	0	7	7	1	25	Срібна медаль
Андрій Рязанов	7	2	0	7	1	0	17	Бронзова медаль
Катерина Матвіїв	5	0	0	7	2	0	14	Похвальна грамота

У неофіційному командному рейтингу Україна посіла 16 місце, а перші 20 країн наведені у таблиці. Повні результати Міжнародної математичної олімпіади 2013 року можна знайти на офіційному сайті Міжнародних математичних олімпіад

`http://www.imo-official.org`.

Багато цікавої інформації міститься і на офіційному сайті Міжнародної математичної олімпіади 2013 року `http://www.uan.edu.co/imo2013/en/`.

Країна	**Медалі**			**Результати по задачах**						$\sum$	**Місце**
	З	С	Б	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
Китай	5	1	0	42	38	30	41	42	15	208	1
Південна Корея	5	1	0	42	38	26	42	36	20	204	2
США	4	2	0	42	35	14	42	40	17	190	3
Росія	4	2	0	42	34	16	42	40	13	187	4
КНДР	2	4	0	42	27	21	42	41	11	184	5
Сингапур	1	5	0	42	37	14	42	42	5	182	6
В'єтнам	3	3	0	42	30	20	42	41	5	180	7
Тайвань	2	4	0	42	38	13	42	29	12	176	8
Великобританія	2	3	1	42	33	0	42	41	13	171	9
Іран	2	3	1	36	23	31	42	35	1	168	10
Канада	2	2	2	42	23	7	42	34	15	163	11–12
Японія	0	6	0	42	28	10	42	41	0	163	11–12
Ізраїль	1	3	2	42	38	7	42	28	4	161	13–14
Таїланд	1	4	1	41	30	4	42	42	2	161	13–14
Австралія	1	2	3	42	28	3	42	26	7	148	15
Україна	1	3	1	40	20	17	42	26	1	146	16
Мексика	0	3	3	42	32	0	42	22	1	139	17–18
Туреччина	1	2	3	42	20	12	42	23	0	139	17–18
Індонезія	1	1	4	42	12	16	42	26	0	138	19
Італія	1	2	1	34	27	9	42	25	0	137	20

Далі наводимо завдання Міжнародної математичної олімпіади 2013 року з розв'язаннями.

Умови задач 54-ої Міжнародної математичної олімпіади (в дужках вказано країну, що запропонувала задачу)

Задача 1. (Японія) Доведіть, що для кожної пари натуральних чисел k та n існують k (не обов'яково різних) натуральних чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$, які задовольняють рівність

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Задача 2. (Австралія) Будемо називати *колумбійською конфігурацією точок* набір з 4027 точок площини, жодні три з яких не лежать на одній прямій, причому 2013 з них пофарбовано у червоний колір, а інші 2014 — у синій. Розглянемо набір прямих, які ділять площину на декілька областей. Назвемо цей набір *хорошим* для даної колумбійської конфігурації точок, якщо виконуються такі дві умови:

жодна пряма не проходить через жодну точку конфігурації;

жодна область розбиття не містить точок обох кольорів.

Знайдіть найменше k таке, що для довільної колумбійської конфігурації з 4027 точок знайдеться хороший набір з k прямих.

Задача 3. (Росія) Нехай зовнівписане коло трикутника ABC, яке лежить навпроти вершини A, дотикається до сторони BC у точці A_1. Точки B_1 на стороні AC та C_1 на стороні AB визначаються аналогічним чином з використанням зовнівписаних кіл, які лежать навпроти вершин B та C відповідно. Відомо, що центр описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$ лежить на описаному колі трикутника ABC. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

Зовнівписаним колом трикутника ABC, яке лежить навпроти вершини A, називається коло, яке дотикається до відрізка BC, продовження сторони AB за точку B та продовження сторони AC за точку C. Зовнівписані кола, які лежать навпроти вершин B та C, визначаються аналогічно.

Задача 4. (Таїланд) Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC. Нехай W – довільна точка на відрізку BC, відмінна від B та C. Позначимо M та N основи висот трикутника ABC, проведених з вершин B та C відповідно. Нехай ω_1 — коло, описане навколо трикутника BWN, а X — така точка на ω_1, що WX — діаметр ω_1. Аналогічно, нехай ω_2 — коло, описане навколо трикутника CWM, а Y — така точка на ω_2, що WY — діаметр ω_2. Доведіть, що точки X, Y та H лежать на одній прямій.

Задача 5. (Болгарія) Позначимо $\mathbb{Q}_{>0}$ множину всіх додатних раціональних чисел. Нехай $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ – функція, яка задовольняє такі три умови:

(i) для всіх $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ виконується нерівність $f(x)f(y) \geq f(xy)$,

(ii) для всіх $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ виконується нерівність $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$,

(iii) існує раціональне число $a > 1$ таке, що $f(a) = a$.

Доведіть, що $f(x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Задача 6. (Росія) Нехай $n \geq 3$ — ціле число. Розглянемо коло та $n+1$ точок на ньому, які розбивають його на рівні дуги. Розглянемо всі способи занумерувати ці точки числами $0, 1, \ldots, n$ так, що кожне число використовується рівно один раз. Два способи, які можна дістати один з одного поворотом кола, вважаються однаковими. Нумерація називається *гарною*, якщо для будь-яких чотирьох чисел $a < b < c < d$ таких, що $a + d = b + c$, хорда, яка з'єднує точки з номерами a та d, не перетинає хорду, яка з'єднує точки з номерами b та c.

Нехай M — кількість гарних нумерацій, а N — кількість впорядкованих пар (x, y) натуральних чисел, що задовольняють умови $x + y \leq n$ та НСД$(x, y) = 1$. Доведіть, що $M = N + 1$.

Розв'язання задач

1. Доведемо твердження індукцією за k. При $k = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження виконується при $k = j - 1$, та доведемо його для $k = j$.

Випадок 1. Нехай $n = 2t - 1$ для деякого натурального t.

Зауважимо, що

$$1 + \frac{2^j - 1}{2t - 1} = \frac{2\left(t + 2^{j-1} - 1\right)}{2t} \cdot \frac{2t}{2t - 1} = \left(1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{2t - 1}\right).$$

За припущенням індукції існують такі $m_1, \ldots, m_{k-1}$, що

$$1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{m_{j-1}}\right),$$

тому залишається покласти $m_j = 2t - 1$.

Випадок 2. Нехай $n = 2t$ для деякого натурального t.

Тоді

$$1 + \frac{2^j - 1}{2t} = \frac{2t + 2^j - 1}{2t + 2^j - 2} \cdot \frac{2t + 2^j - 2}{2t} = \left(1 + \frac{1}{2t + 2^j - 2}\right)\left(1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t}\right),$$

причому $2t + 2^j - 2 > 0$. Знову за припущенням індукції

$$1 + \frac{2^{j-1} - 1}{t} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{m_{j-1}}\right),$$

залишається покласти $m_j = 2t + 2^j - 2$.

Зауваження. Неважко записати розклад у добуток

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n + 2^k - 2}\right),$$

який містить 2^k-1 множників. Оскільки
$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)\left(1+\frac{1}{2m+1}\right)=1+\frac{1}{m},\ \ m\in\mathbb{N},$$
то при парному n усі множники крім останнього, а при непарному n усі множники крім першого можна розбити на пари сусідніх та замінити кожну пару одним множником. Неважко перевірити, що продовжуючи цей процес можна зменшити кількість множників до k.

2. *Відповідь:* $k=2013$.

I спосіб. Спочатку наведемо приклад, з якого випливає нерівність $k\geq 2013$. Відмітимо 2013 червоних та 2013 синіх точок на деякому колі так, аби вони чергувалися, та ще одну синю точку відмітимо будь-де на площині. Таким чином, коло розбито на 4026 дуг, кожна з яких має кінці різних кольорів. Отже, кожну з цих дуг має перетнути деяка пряма з хорошого набору, але кожна пряма перетинає дане коло щонайбільше у двох точках. Тому для даної колумбійської конфігурації точок хороший набір містить принаймні $4026/2=2013$ прямих.

Залишається довести, що 2013 прямих завжди достатньо. Зауважимо, що для довільних двох точок одного кольору A та B можна провести дві прямі, які відокремлюють ці точки від усіх інших. Достатньо взяти дві паралельні до AB прямі, які лежать по обидва боки від AB і достатньо близькі до неї. Між цими прямими опиняться лише точки A та B.

Нехай многокутник $\mathcal{P}$ — опукла оболонка всіх точок колумбійської конфігурації. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Многокутник $\mathcal{P}$ має червону вершину A. Тоді можна провести пряму, яка відокремлює A від усіх інших точок, об'єднати 2012 червоних точок, що залишилися, у 1006 пар, і відокремити кожну пару від решти точок двома прямими. Таким чином, одержимо 2013 прямих.

Випадок 2. Всі вершини многокутника $\mathcal{P}$ сині. Розглянемо довільні дві послідовні вершини A та B многокутника $\mathcal{P}$. Ці дві точки можна відокремити від усіх інших прямою, паралельною до AB. Далі, як і в попередньому випадку, об'єднаємо інші 2012 синіх точок у 1006 пар і відокремимо кожну пару від решти точок двома прямими. Знову одержуємо 2013 прямих.

Зауваження. Замість розгляду опуклої оболонки можна просто обрати таку пряму, що деякі дві точки A і B колумбійської конфігурації лежать на ній, а всі інші – по один бік від неї. Якщо серед цих точок є червона, то можна діяти як у першому випадку, а якщо обидві точки сині, то як у другому випадку.

II спосіб. Наведемо інше доведення того, що $k=2013$ прямих завжди достатньо. Насправді, ми доведемо більш загальне твердження:

Якщо на площині відмічено довільні n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, причому кожну точку пофарбовано у червоний або синій колір, то для відокремлення червоних точок від синіх достатньо провести $[n/2]$ прямих.

Застосуємо індукцію за n. При $n\leq 2$ твердження очевидне. Припустимо, що $n\geq 3$, і розглянемо таку пряму l, що деякі дві точки A та B лежать на ній, а всі інші точки

— по один бік від неї. Наприклад, в якості l можна взяти пряму, яка містить сторону опуклої оболонки всіх точок.

Якщо видалити з конфігурації точки A та B, то за припущенням індукції достатньо провести $[n/2]-1$ пряму, щоб відокремити точки різних кольорів. Тепер додамо до конфігурації точки A та B та розглянемо три можливі випадки.

Випадок 1. Нехай точки A та B одного кольору. Тоді проведемо пряму, паралельну до l, яка відокремлює A та B від решти точок. Очевидно, що отримали хороший набір з $[n/2]$ прямих.

Випадок 2. Нехай точки A та B різних кольорів, але розділені деякою з вже проведених $[n/2]-1$ прямих. Тоді достатньо додати до набору ту ж пряму, паралельну до l, що й у випадку 1.

Випадок 3. Нехай точки A та B різних кольорів і лежать в одній із частин, на які площину розбито вже проведеними прямими. За припущенням індукції ця частина площини не містить інших точок одного з кольорів. Без обмеження загальності вона містить єдину синю точку A. Тоді достатньо провести пряму, яка відокремлює A від усіх інших точок.

Таким чином, крок індукції доведено.

3. *I спосіб.* Нехай $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, p — півпериметр трикутника ABC. Позначимо Q центр кола ω, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$. Оскільки Q знаходиться зовні трикутника $A_1B_1C_1$, то цей трикутник є тупокутним. Без обмеження загальності $\angle A_1B_1C_1>90°$. Тоді Q та B_1 лежать по різні боки від A_1C_1, а тому B та Q лежать по один бік від A_1C_1. Позначимо B_0 середину дуги $\smile ABC$ (рис. 1). Добре відомо, що $AC_1=CA_1=p-b$. Оскільки $\angle B_0CA_1=\angle B_0CB=\angle B_0AB=\angle B_0AC_1$ та $AB_0=CB_0$, то трикутники AB_0C_1 та CB_0A_1 рівні за двома сторонами та кутом між ними. Звідси $B_0C_1=B_0A_1$. Таким чином, серединний перпендикуляр до A_1C_1 перетинає описане коло трикутника ABC у точці B_0, причому B_0 та B лежать по один бік від A_1C_1. Отже, точки B_0 та Q збігаються.

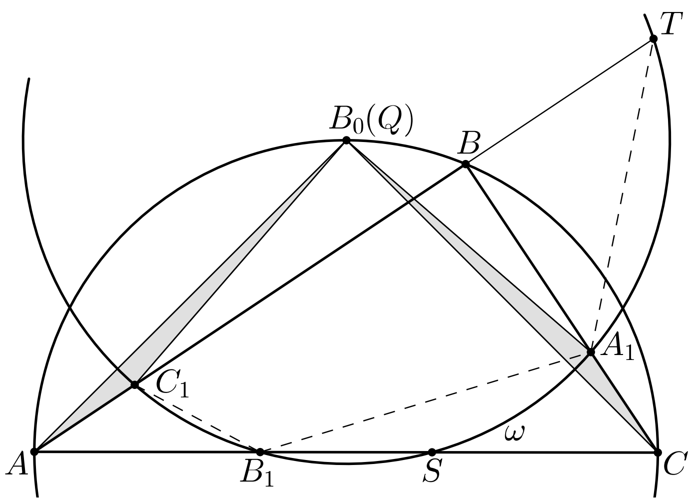

Рис. 1.

Без обмеження загальності $c \geq a$, тоді Q лежить на дузі $\smile AB$, яка не містить точку C.

Далі, $\angle QC_1B = 180^\circ - \angle AC_1B = 180^\circ - \angle AC_1B = \angle QA_1B$, тому чотирикутник QC_1A_1B вписаний. Звідси $\angle C_1QA_1 = \angle C_1BA_1 = \angle ABC$ та $\angle C_1B_1A_1 = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$.

Нехай коло ω вдруге перетинає сторону AC в точці S та перетинає продовження AB в точці T. Тоді

$$\angle BTA_1 = 180^\circ - \angle C_1B_1A_1 = \tfrac{1}{2}\angle ABC = \tfrac{1}{2}(\angle BTA_1 + \angle BA_1T),$$

звідки $\angle BTA_1 = \angle BA_1T$, трикутник BTA_1 рівнобедрений та $BT = BA_1 = p - c$.

Оскільки $QA = QC$, то точки S та B_1 симетричні відносно середини AC. Тому $AS = CB_1 = p - a \geq p - c = AB_1$. Також маємо $AC_1 = p - b$ та $AT = AB + BT = p$, тому для січних AS та AT, проведених до кола ω, дістаємо

$$AT \cdot AC_1 = p(p-b) = (p-a)(p-c) = AS \cdot AB_1.$$

Після спрощення звідси дістаємо $a^2 + c^2 = b^2$, що завершує доведення.

Зауваження. З наведених міркувань випливає таке твердження: якщо на сторонах AB та BC трикутника ABC відклали відрізки $AC_1 = CA_1$, а B_0 — середина дуги $\smile ABC$, то точки A_1, C_1, B та B_0 лежать на одному колі. Обернене твердження також має місце (див. статті І. Кушнір, *Коло W*, "У світі математики", № 4, 2013 р. та А. Полянский, *Воробьями по пушкам!*, "Квант", № 2, 2012 г.).

II спосіб. Позначимо A_0, B_0, C_0 середини дуг $\smile BAC$, $\smile ABC$, $\smile ACB$ відповідно (рис. 2). Як і у *I способі* дістаємо, що $B_0C_1 = B_0A_1$, та аналогічно $A_0B_1 = A_0C_1$, $C_0A_1 = C_0B_1$.

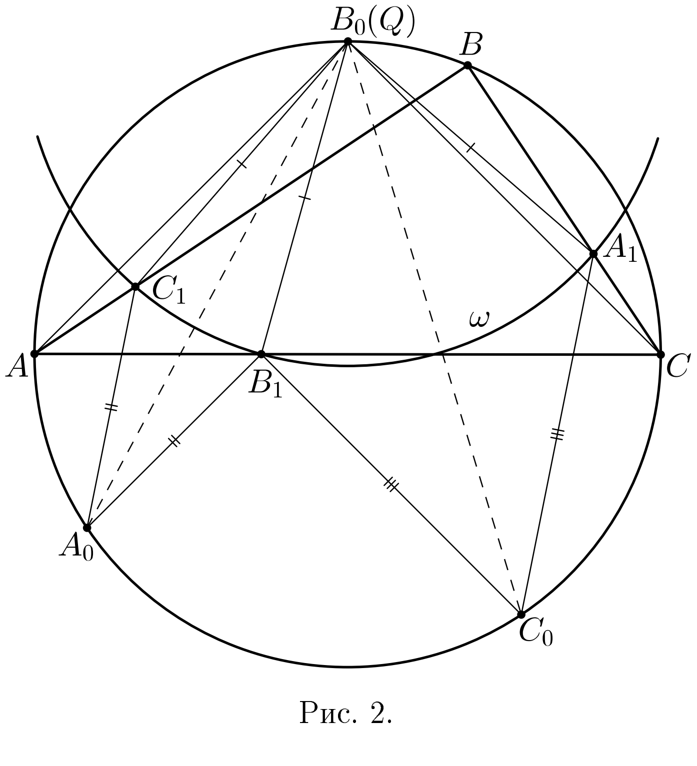

Рис. 2.

Також у *I способі* було встановлено, що трикутник $A_1B_1C_1$ є тупокутним, причому якщо $\angle A_1B_1C_1 > 90^\circ$, то центр Q описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$ збігається з точкою B_0 та $\angle C_1QA_1 = \angle ABC$.

Трикутники QC_1A_0 та QB_1A_0, QB_1C_0 та QA_1C_0 є рівними за трьома сторонами, тому QA_0 та QC_0 є бісектрисами кутів $\angle C_1QB_1$ та $\angle B_1QA_1$ відповідно, звідки

$$\begin{aligned}\angle ABC = \angle C_1QA_1 =&\angle C_1QB_1 + \angle B_1QA_1 = \\ =&2\angle A_0QB_1 + 2\angle B_1QC_0 = 2\angle A_0QC_0 = 180^\circ - \angle ABC.\end{aligned}$$

(остання рівність випливає з того, що A_0 та C_0 – середини дуг $\smile BAC$ та $\smile ACB$). Отже, $\angle ABC = 90^\circ$.

4. Дана задача фактично лише позначеннями відрізняється від задачі 409 “Нашого конкурсу” журналу “У світі математики” (автор В.А. Ясінський, умова в № 4, 2011). Єдина відмінність — у задачі 409 точка W була не довільною точкою на відрізку BC, а його серединою, проте ця зайва умова не використовувалася у розв’язанні автора, опублікованому в № 2, 2013.

5. При $x = 1, y = a$ за умовою (i) маємо $f(1) \geq 1$. Далі, індукцією за n з (ii) легко дістати, що

(iv) $f(nx) \geq nf(x)$ при всіх $n \in \mathbb{N}$ та $x \in \mathbb{Q}_{>0}$,

зокрема

(v) $f(n) \geq nf(1) \geq n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Знову з (i) маємо $f(m/n)f(n) \geq f(m)$, тому $f(q) > 0$ для всіх $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. Тоді з (ii) випливає, що f строго зростає, а тому внаслідок (v)

$$f(x) \geq f([x]) \geq [x] > x - 1 \text{ при всіх } x \geq 1.$$

З (i) індукцією за n дістаємо, що $f(x)^n \geq f(x^n)$, отже $f(x)^n \geq f(x^n) > x^n - 1$. Тому $f(x) \geq \sqrt[n]{x^n - 1}$ для всіх $x > 1$ та $n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що

(vi) $f(x) \geq x$ для всіх $x > 1$.

(Справді, якщо $x > y > 1$, то $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}) > n(x - y)$, тому при достатньо великих n маємо $x^n - 1 > y^n$, а отже $f(x) > y$.)

Тепер з (i) та (vi) випливає, що $a^n = f(a)^n \geq f(a^n) \geq a^n$, тому $f(a^n) = a^n$.

Розглянемо довільне $x > 1$ та оберемо $n \in \mathbb{N}$ так, що $a^n - x > 1$. Тоді з (ii) та (v) маємо

$$a^n = f(a^n) \geq f(x) + f(a^n - x) \geq x + (a^n - x) = a^n,$$

отже $f(x) = x$ для всіх $x > 1$. Зокрема $f(n) = n$ при всіх натуральних $n > 1$. Нарешті, для кожного $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ та кожного $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ з (i) та (iv) випливає, що

$$nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x),$$

звідки $f(nx) = nf(x)$. Таким чином, $f(m/n) = f(2m)/2n = m/n$ для всіх $m, n \in \mathbb{N}$.

Зауваження. Умова $f(a) = a > 1$ є суттєвою. Справді, якщо $b \geq 1$, то функція $f(x) = bx^2$ задовольняє умови (i) та (ii) при всіх $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, але рівність $f(x) = x$ виконується при єдиному додатному значенні $x = 1/b \leq 1$.

6. Зауважимо, що інтервал $(0, 1)$ містить рівно N нескоротних дробів $f_1 < \ldots < f_N$, знаменники яких не більші за n, оскільки пара чисел (x, y), яка задовольняє умови $x + y \leq n$ та НСД$(x, y) = 1$, відповідає дробу $x/(x + y)$.

Почнемо з побудови $N + 1$ гарних нумерацій. Візьмемо довільне $\alpha \in (0, 1)$, яке не співпадає з жодним із дробів $f_1, \ldots, f_N$. Розглянемо коло довжини 1. Послідовно відмітимо на ньому точки з номерами $0, 1, \ldots, n$, де точка 0 є довільною, а відстань за годинниковою стрілкою між точками i та $i + 1$ дорівнює α. Будемо відраховувати всі відстані вздовж кола за годинниковою стрілкою. Тоді точка k знаходиться на відстані $\{k\alpha\}$ від точки 0, де $\{r\}$ позначає дробову частину числа r. Назвемо таке розміщення точок *циклічним* і позначимо $A(\alpha)$. Якщо порядок точок за годинниковою стрілкою у розміщеннях $A(\alpha_1)$ та $A(\alpha_2)$ співпадає, вважатимемо їх однаковими. На рис. 3 зображено циклічне розміщення $A(3/5 + \varepsilon)$ точок з номерами $0, 1, \ldots, 13$ для дуже маленького $\varepsilon > 0$.

Якщо $a < b < c < d$ задовольняють умову $a + d = b + c$, то $a\alpha + d\alpha = b\alpha + c\alpha$, а отже в $A(\alpha)$ хорда з кінцями a та d паралельна хорді з кінцями b та c, зокрема ці хорди не перетинаються. Тому нумерація, при якій номери йдуть у такому ж порядку при обході за годинниковою стрілкою, як номери точок у циклічному розміщенні, є гарною.

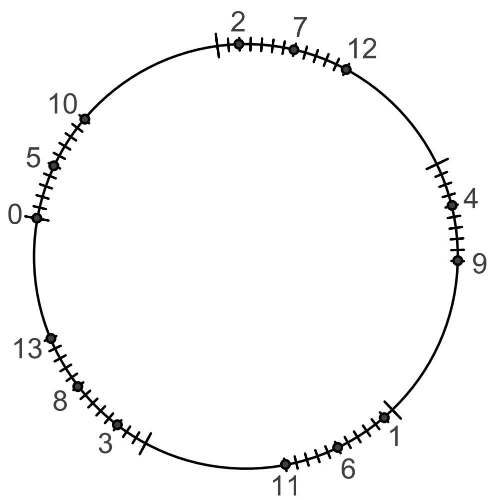

Рис. 3.

Тепер покажемо, що існує рівно $N + 1$ різних циклічних розміщень. Розглянемо, як змінюється $A(\alpha)$ при збільшенні α від 0 до 1. Порядок точок p та q змінюється рівно в ті моменти, коли ми переходимо через значення $\alpha = f$ таке, що $\{pf\} = \{qf\}$. Це може статися тільки тоді, коли f – один з N дробів $f_1, \ldots, f_N$. Отже, існує не більше за $N + 1$ різних циклічних розміщень.

Покажемо, що $N + 1$ різних циклічних розміщень існує. Покладемо $f_i = a_i/b_i$,

$1 \le i \le N$, і візьмемо дуже маленьке число $\varepsilon > 0$. У розміщенні $A(f_i + \varepsilon)$ точка k знаходиться на відстані $\frac{ka_i (\bmod b_i)}{b_i} + k\varepsilon$ від точки 0. Тому на відстані від 0, трошки більшій за $\frac{l}{b_i}$, $0 \le l \le b_i - 1$, записані у порядку зростання всі числа k, для яких $ka_i - l$ ділиться на b_i. Звідси випливає, що першим числом після 0 за годинниковою стрілкою у розміщенні $A(f_i + \varepsilon)$ є b_i. Першим числом після 0, меншим за b_i, є таке k, для якого $a_i k - 1$ ділиться на b_i. Тоді k та b_i взаємно прості, а тому $ak - 1$ ділиться на b_i при єдиному $1 \le a \le b_i - 1$. Це дозволяє однозначно визначити a_i та b_i, тобто відновити f_i, за циклічним розміщенням. Зауважимо також, що $A(f_i + \varepsilon)$ є відмінним від тривіального розміщення, в якому точки $0, 1, \ldots, n$ йдуть поспіль за годинниковою стрілкою. Звідси випливає, що $N+1$ циклічних розміщень $A(\varepsilon), A(f_1+\varepsilon), \ldots, A(f_N+\varepsilon)$ є попарно різними.

Зауважимо, що при $f_i < \alpha < f_{i+1}$ в розміщенні $A(\alpha)$ точка 0 стоїть одразу після b_{i+1} і перед b_i. Справді, ми вже довели, що b_i — перше число після 0 в розміщенні $A(f_i + \varepsilon)$, яке співпадає з $A(\alpha)$. Аналогічно перевіряється, що b_{i+1} є останнім числом перед 0 в розміщенні $A(f_i - \varepsilon)$, яке теж співпадає з $A(\alpha)$.

Нарешті, покажемо індукцією за n, що кожна гарна нумерація точок числами $0, \ldots, n$ відповідає деякому циклічному розміщенню. Для $n \le 2$ результат очевидний. Тепер припустимо, що всі гарні нумерації точок числами $0, \ldots, n-1$ відповідають циклічним розміщенням, та розглянемо гарну нумерацію A точок числами $0, \ldots, n$. Порядок усіх номерів, крім n, відповідає деякому циклічному розміщенню $A_{n-1} = A_{n-1}(\alpha)$ точок з номерами $0, 1, \ldots, n-1$.

Нехай α лежить між послідовними дробами $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ з набору нескоротних дробів, знаменник яких не перевищує $n-1$. Інтервал $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ містить щонайбільше один дріб зі знаменником n, адже інакше разом з дробами $\frac{i}{n}$ та $\frac{i+1}{n}$ він містив би і дріб $\frac{i}{n} < \frac{i}{n-1} \le \frac{i+1}{n}$, що суперечить вибору $\frac{p_1}{q_1}$ та $\frac{p_2}{q_2}$.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Інтервал $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ не містить жодного дробу зі знаменником n.

У цьому випадку циклічному розміщенню $A_{n-1}(\alpha)$ точок з номерами $0, 1, \ldots, n-1$ відповідає єдине циклічне розміщення $A_n(\alpha)$ точок з номерами $0, 1, \ldots, n$. Гарна нумерація A та гарна нумерація, яка відповідає $A_n(\alpha)$, можуть відрізнятися лише положенням точки з номером n. Припустимо, що в $A_n(\alpha)$ точка n знаходиться одразу за x і перед y. Оскільки за доведеним вище сусідні з 0 позиції займають q_1 та q_2, то $x, y \ge 1$.

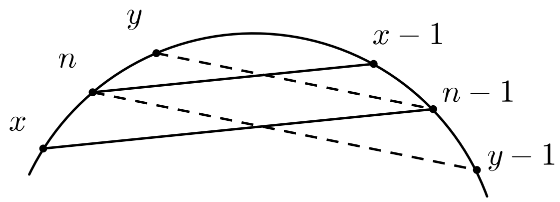

Рис. 4.

В $A_n(\alpha)$ хорда з кінцями $n-1$ та x паралельна хорді з кінцями n та $x-1$ та є сусідньою з нею. Тому $n-1$ лежить між $x-1$ та x за годинниковою стрілкою, як на рис. 4. Аналогічно $n-1$ лежить між y та $y-1$. Отже точки $x, y, x-1, n-1$ та $y-1$ розташовані саме в такому порядку в $A_n(\alpha)$, а отже і в A (можливо, при цьому $y = x-1$ або $x = y-1$).

При гарній нумерації A хорда, яка з'єднує точки з номерами $n-1$ та x, не перетинає хорду, яка з'єднує точки з номерами n та $x-1$. Тому точка з номером n лежить між точками з номерами x та $n-1$. Аналогічно ця точка лежить між точками з номерами $n-1$ та y. Тоді вона лежить між точками з номерами x та y, а тому A — гарна нумерація, яка відповідає циклічному розміщенню $A_n(\alpha)$.

Випадок 2. Інтервал $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ містить дріб $\frac{i}{n}$.

У цьому випадку циклічному розміщенню $A_{n-1}(\alpha)$ точок з номерами $0, 1, \ldots, n-1$ відповідають два циклічних розміщення $A_n(\alpha_1)$ та $A_n(\alpha_2)$ чисел $0, \ldots, n$, які утворюються при $\frac{p_1}{q_1} < \alpha_1 < \frac{i}{n}$ та при $\frac{i}{n} < \alpha_2 < \frac{p_2}{q_2}$. За доведеним вище в $A_{n-1}(\alpha)$ точка 0 знаходиться між q_2 та q_1, в $A_n(\alpha_1)$ точка n лежить між q_2 та 0, а в $A_n(\alpha_2)$ точка n лежить між 0 та q_1.

Поклавши $x = q_2$ та $y = q_1$, аналогічно до міркувань з першого випадку одержимо, що при гарній нумерації A точка з міткою n має бути між точками з номерами x та y. Тому A — гарна нумерація, яка відповідає циклічному розміщенню $A_n(\alpha_1)$ або $A_n(\alpha_2)$.

Отже, всі гарні нумерації відповідають циклічним розміщенням. Тому їх кількість дорівнює $N+1$, що і вимагалося довести.