LIII Міжнародна математична олімпіада

Георгій Шевченко

З 4 по 16 липня 2012 року у місті Мар-дель-Плата, Аргентина, проходила 53-тя міжнародна олімпіада школярів з математики. В олімпіаді взяли участь 548 учнів зі 100 країн.

Склад команди України було визначено на відбірково-тренувальних зборах. За результатами відбору до складу команди України увійшли такі шість учнів:

Богдан Ківва, випускник Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер";

Максим Чаудхарі, випускник ліцею № 208 м. Києва;

Олександр Руденко, випускник Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер";

Данило Хілько, учень 10 класу ліцею № 208 м. Києва;

Анна Мітрущєнкова, випускниця загальноосвітнього спеціалізованого санаторного інтернатного закладу "Ерудит" для обдарованих дітей Донецької області;

Дмитро Матвєєвський, випускник Харківського фізико-математичного ліцею № 27.

Керівник команди — Андрій Вікторович Паньков, науковий співробітник Інституту інноваційних технологій і змісту освіти.

Науковий керівник команди — Георгій Михайлович Шевченко, докторант Київського національного університету ім. Тараса Шевченка.

Крім того, до складу команди України в якості помічника керівника команди входила Ольга Олександрівна Кравченко, директор юридичного департаменту МОНмолодьспорту України.

Команда України. Вгорі: М. Чаудхарі, Б. Ківва, О. Руденко, Д. Хілько, А. Мітрущєнкова, внизу: Д. Матвєєвський

Бронзову медаль отримали учасники, які набрали 14–20 балів, срібну — 21–27 балів, золоту — 28 балів і більше. Усього було розіграно 51 золоту, 88 срібних та 138 бронзових медалей.

Учасники команди України показали такі результати:

Учасник	1	2	3	4	5	6	Сума балів	Нагорода
Олександр Руденко	7	7	0	3	7	0	24	Срібна медаль
Богдан Ківва	7	6	0	4	7	0	24	Срібна медаль
Данило Хілько	7	1	0	7	7	0	22	Срібна медаль
Максим Чаудхарі	7	0	0	7	4	0	18	Бронзова медаль
Дмитро Матвєєвський	7	1	0	6	3	0	17	Бронзова медаль
Анна Мітрущєнкова	7	1	0	3	0	0	10	Похвальна грамота

Команда України на символі м. Мар-дель-Плата — морському леві. Вгорі: керівник А.В. Паньков, під ним: Д. Матвєєвський,

науковий керівник Г.М. Шевченко, Б. Ківва, О. Руденко, внизу:
М. Чаудхарі, Д. Хілько, А. Мітрущєнкова. На задньому фоні
ліворуч готель “Provincial”, де проводилася олімпіада

У неофіційному командному рейтингу Україна посіла 19–21 місце, а перші 25 країн наведені у таблиці.

Країна	**Медалі**			**Результати по задачах**						$\sum$	**Місце**
	З	С	Б	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
Південна Корея	6	0	0	42	42	21	39	42	23	209	1
Китай	5	0	1	42	40	14	31	38	30	195	2
США	5	1	0	42	40	33	38	23	18	194	3
Росія	4	2	0	42	35	21	41	29	9	177	4
Канада	3	1	2	42	32	9	39	24	13	159	5–6
Таїланд	3	3	0	42	42	4	39	30	2	159	5–6
Сингапур	1	3	2	42	35	11	32	27	7	154	7
Іран	3	2	1	42	29	6	39	34	1	151	8
В’єтнам	1	3	2	42	36	4	31	35	0	148	9
Румунія	2	3	1	40	36	7	36	20	5	144	10
Індія	2	3	0	36	36	4	23	35	2	136	11
КНДР	2	1	3	42	30	0	30	22	4	128	12–13
Туреччина	1	3	2	42	19	1	42	21	3	128	12–13
Тайвань	1	3	0	42	20	5	29	23	8	127	14
Сербія	1	2	1	42	21	7	26	26	4	126	15
Перу	0	3	2	42	29	3	34	17	0	125	16
Японія	0	4	1	42	15	4	27	28	5	121	17
Польща	0	2	4	40	22	10	25	22	0	119	18
Болгарія	1	2	2	42	22	7	38	4	3	116	19–21
Бразилія	1	1	3	42	23	3	33	14	1	116	19–21
Україна	0	3	2	42	16	0	30	28	0	116	19–21
Великобританія	1	1	4	36	12	9	41	11	6	115	22–23
Нідерланди	2	0	3	38	22	6	34	14	1	115	22–23
Білорусь	0	4	1	42	29	0	31	11	1	114	24
Греція	1	1	3	42	21	0	15	29	0	107	25

Повні результати Міжнародної математичної олімпіади 2012 року на офіційному сайті Міжнародних математичних олімпіад `http://www.imo-official.org`. Багато цікавої інформації можна знайти і на офіційному сайті Міжнародної математичної олімпіади 2012 року `http://oma.org.ar/imo2012/`.

Наводимо завдання Міжнародної математичної олімпіади 2011 року з розв’язаннями.

Умови задач 53-ої Міжнародної математичної олімпіади (в дужках вказано країну, що запропонувала задачу)

Задача 1. (Греція) Для трикутника ABC точка J є центром зовнівписаного кола, яке дотикається сторони BC у точці M та прямих AB, AC у точках K, L відповідно. Прямі LM та BJ перетинаються у точці F, а прямі KM та CJ перетинаються у точці G. Нехай S — точка перетину прямих AF і BC, а точка T — точка перетину прямих AG і BC. Довести, що точка M ділить відрізок ST навпіл.

Задача 2. (Австралія) Дано ціле число $n \geq 3$ і такі додатні дійсні числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$, що $a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Довести, що

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdot \ldots \cdot (1+a_n)^n > n^n.$$

Задача 3. (Канада) Два гравці A та B грають у гру *"Ти ж мене підманула"*. Правила цієї гри залежать від двох натуральних чисел k та n, які відомі обом гравцям.

На початку гри A обирає натуральні числа x і N, для яких $1 \leq x \leq N$. Гравець A зберігає число x у таємниці, а число N правдиво повідомляє гравцю B. Гравець B після цього намагається отримати інформацію про x, задаючи гравцю A запитання таким чином: перед кожним запитанням B обирає довільну множину S натуральних чисел (можливо, вже вказану в одному з попередніх запитань) та питає A, чи належить x множині S. Гравець B може задати стільки запитань, скільки він захоче. На кожне задане B запитання гравець A має одразу відповідати *"так"* чи *"ні"*, але їй дозволяється збрехати стільки разів, скільки вона забажає. Єдине обмеження — із будь-яких $k+1$ послідовних відповідей принаймні одна має бути правдивою.

Після того, як B задав стільки запитань, скільки він уважав за потрібне, він має вказати множину X з щонайбільше n натуральних чисел. Якщо x належить X, то B перемагає; інакше він програє. Довести, що:

1. Якщо $n \geq 2^k$, то B має виграшну стратегію.

2. Для довільного достатньо великого k знайдеться таке ціле число $n \geq 1{,}99^k$, що B не має виграшної стратегії.

Задача 4. (Південна Африка) Знайти усі такі функції $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, що для довільних цілих a, b, c, які задовольняють умову $a+b+c=0$, виконується рівність

$$f^2(a) + f^2(b) + f^2(c) = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

Задача 5. (Чехія) Нехай ABC — трикутник, у якому $\angle BCA = 90°$, D — основа висоти, проведеної з вершини C. На відрізку CD взято точку X. Точка K на відрізку AX є такою, що $BK = BC$. Аналогічно, точка L на відрізку BX є такою, що $AL = AC$. Нехай M — точка перетину AL і BK. Довести, що $MK = ML$.

Задача 6. (Сербія) Знайти всі натуральні числа n, для яких існують такі невід'ємні цілі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, що

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Розв'язання задач

1. З трикутника BFM маємо $\angle BFM = \angle CBJ - \angle BMF$. Оскільки BJ є зовнішньою бісектрисою трикутника ABC, то $\angle CBJ = \frac{1}{2}\angle KBM$. За властивістю дотичних, проведених до кола, $CM = CL$. Тому трикутник CML рівнобедрений, а отже

$$\angle BMF = \angle CML = \tfrac{1}{2}(\angle CML + \angle CLM) = \tfrac{1}{2}\angle ACB.$$

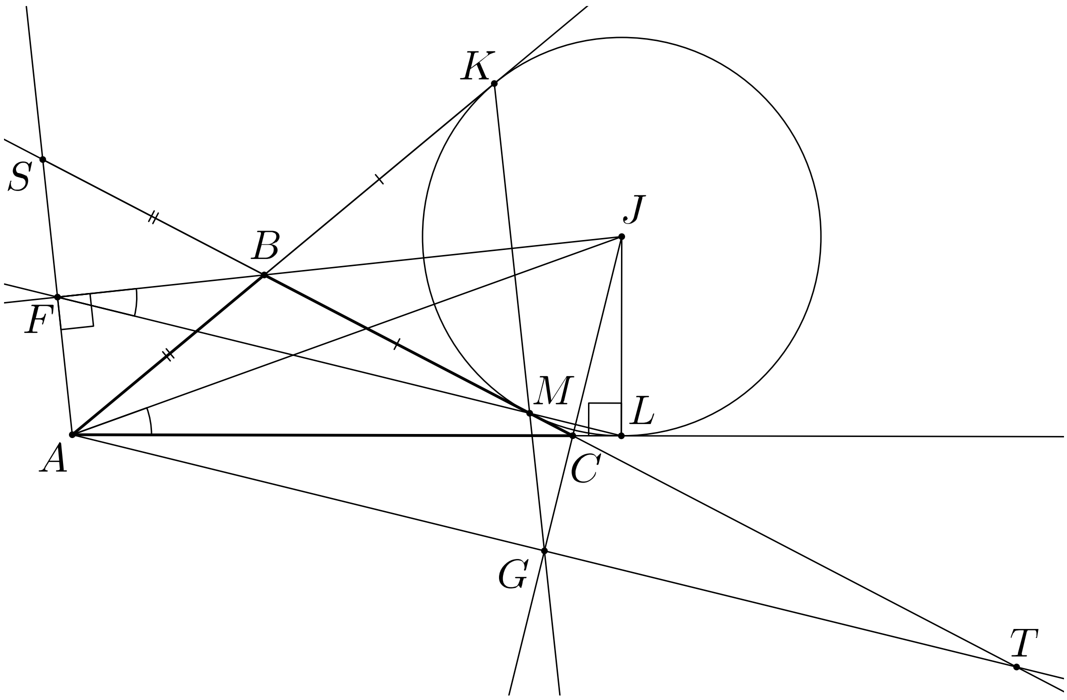
Звідси

$$\angle BFM = \tfrac{1}{2}(\angle KBM - \angle ACB) = \tfrac{1}{2}\angle BAC = \angle JAL$$

(оскільки AJ є бісектрисою кута BAC). Таким чином, чотирикутник $AFJL$ є вписаним, тому $\angle AFJ = 180^\circ - \angle ALJ = 90^\circ$. Тоді BF — бісектриса та висота трикутника BSA, отже цей трикутник рівнобедрений, звідки $BA = BS$ та

$$SM = BS + BM = BA + BK = AK.$$

Аналогічно $TM = AL$. Але за властивістю дотичних $AK = AL$, тому $SM = TM$, що й потрібно довести.



2. Для $k = 2, 3, \ldots, n$ за нерівністю Коші маємо

$$(1+a_k)^k = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \ldots + \frac{1}{k-1}}_{k-1 \text{ разів}} + a_k\Bigg)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k. \qquad (*)$$

Перемножаючи всі ці нерівності, дістанемо

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdot \ldots \cdot (1+a_n)^n \geq \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdots \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} a_2 a_3 \cdots a_n = n^n. \qquad (**)$$

Рівність у $(**)$ можлива лише тоді, коли у кожній з нерівностей $(*)$ досягається рівність, тобто при $a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, \ldots, a_n = \frac{1}{n-1}$. Проте ці рівності не можуть виконуватись одночасно, оскільки $a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Отже, у $(**)$ має місце строга нерівність, що й потрібно довести.

3. Назвемо відповідь V на запитання "Чи належить x множині S?" *несумісною* з числом y, якщо або ця відповідь негативна та $y \in S$, або ця відповідь позитивна та $y \notin S$.

1. Припустимо, що B визначив множину T розміру m, яка точно містить x. На початку ігри це виконано з $m = N$ та $T = \{1, 2, \ldots, N\}$. Доведемо, що якщо $m > 2^k$, то B може точно визначити якесь число y, відмінне від x.

Оскільки важливою є лише кількість елементів $m > 2^k$ множини T, то надалі зручно вважати, що $T = \{0, 1, 2, \ldots, 2^k, \ldots, m-1\}$. Спочатку B задає одне і те саме запитання: чи $x = 2^k$ (тобто чи належить x одноелементній множині $\{2^k\}$). Якщо A відповість *"ні"* $k+1$ разів поспіль, то одна з цих відповідей буде правдивою, тому можна буде взяти $y = 2^k$. Інакше B припиняє питати про 2^k після відповіді *"так"*, натомість задаючи такі запитання для $i = 1, 2, \ldots, k$: чи дорівнює нулю i-та цифра в двійковому записі числа x. Визначимо тепер число $y \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$ таким чином: для $i = 1, 2, \ldots, k$ його i-та цифра в двійковому записі дорівнює 1, якщо A відповіла *"так"* на запитання про i-ту цифру числа x, інакше вона дорівнює 0. Очевидно, що число y несумісне з усіма $k+1$ отриманими відповідями. Тому, оскільки хоча б одна з цих відповідей є правдивою, то $y \neq x$.

Отже, в будь-якому разі B може точно визначити відмінне від x число $y \in T$. Тоді він може зменшити множину T і, повторюючи цю процедуру, дійти до множини розміру $2^k \leq n$, яка точно містить x, тобто може гарантувати собі перемогу.

2. Доведемо, що якщо $1 < \lambda < 2$ та $n = [(2-\lambda)\lambda^{k+1}] - 1$, то B не має виграшної стратегії. Тоді для завершення розв'язання достатньо буде зафіксувати $1{,}99 < \lambda < 2$ та зауважити, що при всіх достатньо великих k має місце нерівність

$$n = [(2-\lambda)\lambda^{k+1}] - 1 > 1{,}99^k.$$

Розглянемо таку стратегію для A. Вона обирає $N = n+1$ та довільне число $x \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Для кожного числа $i = 1, 2, \ldots, n$ позначимо k_i кількість несумісних з i відповідей поспіль на певний момент часу. Доведемо, що A може діяти таким чином, щоб вираз

$$\Lambda = \lambda^{k_1} + \lambda^{k_2} + \ldots + \lambda^{k_{n+1}}$$

завжди залишався меншим за λ^{k+1}. Аби цього досягти, A має відповідати на кожне запитання так, щоб значення виразу Λ було якнайменшим. Таким чином, до першої відповіді $k_1 = k_2 = \ldots = k_{n+1} = 0$ та $\Lambda = n+1 = [(2-\lambda)\lambda^{k+1}] < \lambda^{k+1}$. Далі, якщо перед черговим запитанням про деяку множину $S \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$ значення виразу дорівнювало

$$\Lambda = \lambda^{k_1} + \lambda^{k_2} + \ldots + \lambda^{k_{n+1}} < \lambda^{k+1},$$

то після відповіді (яка є несумісною або з елементами множини S, або з елементами її доповнення) значення виразу дорівнюватиме

$$\Lambda = \min\left(\sum_{i\in S}\lambda^{k_i+1}+\sum_{i\notin S}1,\ \sum_{i\in S}1+\sum_{i\notin S}\lambda^{k_i+1}\right) \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left(1+\lambda^{k_i+1}\right) <$$

$$< \frac{1}{2}\left(n+1+\lambda^{k+2}\right) < \frac{1}{2}\left((2-\lambda)\lambda^{k+1}+\lambda^{k+2}\right) = \lambda^{k+1}.$$

Отже, після кожної відповіді $\Lambda < \lambda^{k+1}$, зокрема, $k_i \le k$ для кожного i, тобто для жодного числа не буде отримано понад k несумісних з ним відповідей поспіль. Більше того, стратегія A не залежить від x, тобто B не здобуде жодної інформації про x.

4. При $a=b=c=0$ одержимо $3f^2(0)=6f^2(0)$, тобто $f(0)=0$.

При $c=0$, $b=-a$ одержимо $f^2(a)+f^2(-a)=2f(a)f(-a)$, звідки $f(-a)=f(a)$.

Тепер помітимо, що якщо $f(t)=0$ для деякого $t\neq 0$, то при $a=x, b=-x-t, c=t$ одержимо $f^2(x)+f^2(x+t)=2f(x)f(x+t)$ (ми врахували, що $f(-x-t)=f(x+t)$). Звідси $f(x+t)=f(x)$ для будь-якого $x\in\mathbb{Z}$, тобто функція f є t-періодичною.

Підставивши $a=x, b=-2x, c=x$, одержимо $2f^2(x)+f^2(2x)=4f(x)f(2x)+2f^2(x)$, звідки $f(2x)(f(2x)-4f(x))=0$, тобто $f(2x)\in\{0,4f(x)\}$. Отже, $f(2)\in\{0,4f(1)\}$. Якщо $f(2)=0$, то f є 2-періодичною, тобто

$$f(2k)=0,\ f(2k+1)=s,\quad k\in\mathbb{Z},\quad \text{де}\quad s=f(1).$$

Неважко переконатися, що така функція задовольняє умову задачі. Справді, за умови $a+b+c=0$ або усі числа a,b,c парні, або серед них рівно два непарних, а тому трійка чисел $(f(a),f(b),f(c))$ — це з точністю до перестановки $(0,0,0)$ або $(s,s,0)$. Обидві трійки задовольняють вихідне рівняння.

Нехай тепер $f(2)\neq 0$, тоді $f(2)=4f(1)\neq 0$. Маємо $f(4)\in\{0,4f(2)\}$. Якщо $f(4)=0$, то функція f є 4-періодичною. Оскільки $f(3)=f(-1)=f(1)$, дістаємо

$$f(4k)=0,\ f(4k+1)=f(4k+3)=s,\ f(4k+2)=4s,\quad k\in\mathbb{Z},\quad \text{де}\quad s=f(1).$$

Перебираючи остачі від ділення на 4, неважко переконатися, що така функція є розв'язком рівняння. Справді, за умови $a+b+c=0$ трійка чисел $(f(a),f(b),f(c))$ — це з точністю до перестановки одна з трійок $(0,0,0)$, $(4s,4s,0)$, $(0,s,s)$ або $(4s,s,s)$. Усі ці трійки задовольняють вихідне рівняння.

Нарешті, нехай $f(4)=4f(2)=16f(1)\neq 0$. Доведемо індукцією за n, що

$$f(n)=sn^2,\quad n\in\mathbb{N},\quad \text{де}\quad s=f(1)\neq 0.$$

При $a=1, b=2, c=-3$ одержимо $17s^2+f^2(3)=10sf(3)+8s^2$, тобто

$$f^2(3)-10sf(3)+9s^2=0.$$

Аналогічно при $a=1, b=3, c=-4$ дістаємо

$$f^2(3)-34sf(3)+225s^2=0.$$

З цих двох рівнянь $24sf(3) = 216s^2$, тобто $f(3) = 9s$.

Припустимо тепер, що $f(n) = sn^2$ для $1 \le n \le k$, де $k \ge 4$.

При $a = 1, b = k, c = -k-1$ та $a = 2, b = k-1, c = -k-1$ одержимо

$$(1 + k^4)s^2 + f(k+1)^2 = 2k^2s^2 + (2 + 2k^2)sf(k+1),$$

$$(16 + (k-1)^4)s^2 + f(k+1)^2 = 8(k-1)^2s^2 + (8 + 2(k-1)^2)sf(k+1).$$

З цих двох рівнянь $(4k-8)sf(k+1) = (4k^3 - 12k - 8)s^2$, тобто $f(k+1) = s(k+1)^2$. Внаслідок парності дістаємо $f(n) = sn^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Неважко перевірити, що і ця функція задовольняє вихідне рівняння.

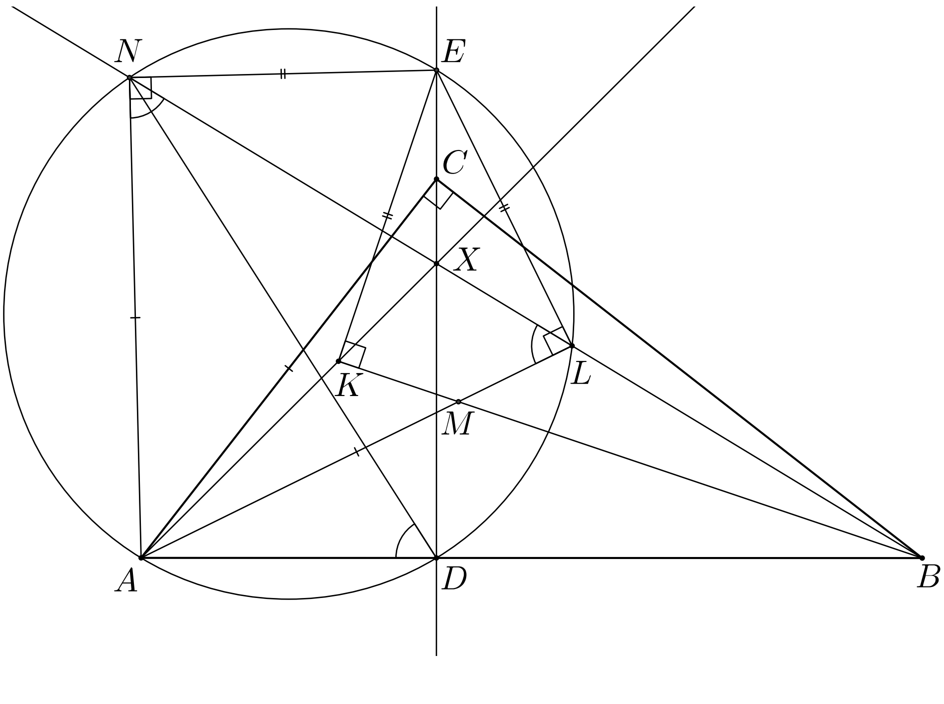
Відповідь: Розв'язками є такі функції:

1) $f(2k) = 0$, $f(2k+1) = s$ для деякого $s \in \mathbb{Z}$ і всіх $k \in \mathbb{Z}$;
2) $f(4k) = 0$, $f(4k+1) = f(4k+3) = s$, $f(4k+2) = 4s$ для деякого $s \in \mathbb{Z}$ і всіх $k \in \mathbb{Z}$;
3) $f(k) = sk^2$ для деякого $s \in \mathbb{Z}$ і всіх $k \in \mathbb{Z}$.

5. Нехай N — така відмінна від L точка на прямій BX, що $AN = AC$. Оскільки $AC^2 = AD \cdot AB$, то $AB/AN = AN/AD$, тому трикутники ADN та ANB подібні за двома сторонами та спільним кутом, звідки $\angle ADN = \angle ANL$. Але $\angle ANL = \angle ALN$. Отже, $\angle ADN = \angle ALN$, тобто чотирикутник $ADLN$ є вписаним. Позначимо E відмінну від D точку перетину описаного навколо $ADLN$ кола з прямою AD. Маємо $\angle ALE = 90°$, тому $\triangle ANE = \triangle ALE$, звідки $EN = EL$ та $EA \perp BN$. Нехай Y — спільна проекція точок L та B на EA. Використавши декілька разів теорему Піфагора, дістанемо, що $EL^2 - AL^2 = EY^2 - AY^2 = EB^2 - AB^2$. Аналогічно одержуємо, що $\angle EKB = 90°$, $EK^2 - BK^2 = EA^2 - AB^2$. Отже,

$$EL^2 - EK^2 = (EB^2 - EA^2) - (BK^2 - AL^2) = (EB^2 - EA^2) - (CB^2 - CA^2) = 0.$$

Звідси $\triangle ELM = \triangle EKM$, тому $MK = ML$, що й потрібно довести.



6. Нехай $a = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. Тоді

$$1 \cdot 3^{a-a_1} + 2 \cdot 3^{a-a_2} + \ldots + n \cdot 3^{a-a_n} = 3^a.$$

Ліва частина цієї рівності має таку ж парність, як $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, а права є непарною. Отже, $\frac{n(n+1)}{2}$ є непарним, звідки n дає остачу 1 або 2 при діленні на 4. Доведемо тепер, що всі n, які дають остачу 1 або 2 при діленні на 4, задовольняють умову задачі.

Назвемо набір $b_1, b_2, \ldots, b_n$ цілих чисел *припустимим*, якщо знайдуться такі невід'ємні цілі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, що

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{b_1}{3^{a_1}} + \frac{b_2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{b_n}{3^{a_n}} = 1.$$

Нехай b_k — елемент припустимого набору, а u і v — такі цілі числа, що $u + v = 3b_k$. Тоді

$$\frac{1}{2^{a_k+1}} + \frac{1}{2^{a_k+1}} = \frac{1}{2^{a_k}} \quad \text{та} \quad \frac{u}{3^{a_k+1}} + \frac{v}{3^{a_k+1}} = \frac{b_k}{3^{a_k}},$$

тому набір $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, u, v, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n$ також є припустимим. Іншими словами, якщо при заміні двох елементів припустимої послідовності u і v на елемент $\frac{u+v}{3}$ отримано припустиму послідовність, то й вихідна послідовність була припустимою.

Позначимо тепер α_n набір чисел $1, 2, \ldots, n$. Аби довести, що такий набір є припустимим при $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, ми за допомогою перетворень вигляду $\{u, v\} \to \frac{u+v}{3}$ зведемо його до набору α_1, для якого вказана властивість має місце з $a_1 = 0$. Помітимо, що $\{m, 2m\} \to \{m\}$, тому елемент $2m$ можна, якщо потрібно, видалити з набору.

Нехай $n \geq 16$. Ми покажемо, що α_n можна звести до α_{n-12} за 12 операцій. Нехай $n = 12k + r$, де $k \geq 1$, $r \in \{0, 1, \ldots, 11\}$. Якщо $0 \leq r \leq 5$, то останні 12 членів набору можна розбити на такі групи: дві одноелементні $\{12k\}$, $\{12k-6\}$ та 5 двохелементних:

$$\{12k - 6 - i, 12k - 6 + i\},\ i = 1, 2, \ldots, 5 - r, \quad \{12k - j, 12k + j\},\ j = 1, 2, \ldots, r.$$

Перші дві групи можна видалити, оскільки $6k$ та $6k-3$ є елементами α_n. Далі зробимо перетворення $\{12k - 6 - i, 12k - 6 + i\} \to 8k - 4$, $\{12k - j, 12k + j\} \to 8k$, замінивши 5 двохелементних груп на 5 елементів $8k-4$ або $8k$, які також можна видалити, оскільки α_{n-12} містить як $4k-2$, так і $4k$. (Справді, перевіримо, що $4k \leq n - 12 = 12k + r - 12$, тобто $8k + r \geq 12$. При $k \geq 2$ або $k = 1, r \geq 4$ це так, а принаймні одна з цих умов виконується, бо $n = 12k + r \geq 16$.) Таким чином ми одержимо α_{n-12} з α_n.

При $r \geq 6$ виділяємо одноелементні групи $\{12k\}$, $\{12k+6\}$ та двохелементні групи

$$\{12k + 6 - i, 12k + 6 + i\},\ i = 1, 2, \ldots, r - 6, \quad \{12k - j, 12k + j\},\ j = 1, 2, \ldots, 11 - r,$$

після чого аналогічними перетвореннями одержуємо α_{n-12}. (При цьому доведеться перевірити, що $4k + 2 \leq n - 12 = 12k + r - 12$, тобто $8k + r \geq 14$, а це так, бо $k \geq 1$ та $r \geq 6$.)

Залишилося розглянути значення $n \leq 15$, тобто $n \in \{2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\}$, оскільки $n \equiv 1, 2 \pmod 4$. Випадки $n = 2, 6, 10, 14$ зводяться відповідно до $n = 1, 5, 9, 13$, оскільки останній член набору можна видалити. Для $n = 5$ потрібно зробити перетворення $\{4, 5\} \to 3$, $\{3, 3\} \to 2$, а потім двічі видалити 2 та одержати α_1. Для $n = 9$ потрібно видалити 6 і 8, перетворити $\{5, 7\} \to 4$, $\{3, 9\} \to 4$, тричі видалити 4 та видалити 2. Нарешті, $n = 13$ зводиться до $n = 10$, якщо видалити 12, перетворити $\{11, 13\} \to 8$ та видалити 8.

Відповідь: $n \equiv 1 \pmod 4$ або $n \equiv 2 \pmod 4$.