Завдання LII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

Ігор Мітельман, доцент, кандидат фізико-математичних наук,
викладач Рішельєвського ліцею при Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова, заслужений вчитель України

Вадим Радченко, доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, заслужений вчитель України

Георгій Шевченко, доцент, кандидат фізико-математичних наук,
докторант Київського національного університету імені Тараса Шевченка,

В'ячеслав Ясінський, доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, заслужений вчитель України

З 26 по 30 березня 2012 року в м. Кіровограді відбувався IV (заключний) етап LII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики. На олімпіаді змагалися 172 учні — переможці III етапу олімпіади та Всеукраїнської Internet-олімпіади, які представляли всі області України, міста Київ та Севастополь, а також — Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка. З дозволу Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України в олімпіаді поза конкурсом взяли участь команда Спеціалізованого навчально-наукового центру (ФМШ імені академіка А. М. Колмогорова) при Московському державному університеті імені М. В. Ломоносова та команда Краснодарського краю (Російська Федерація).

Головою оргкомітету олімпіади була начальник управління освіти і науки Кіровоградської обласної державної адміністрації Е. В. Лещенко. Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України на олімпіаді представляла заступник голови оргкомітету начальник відділу по роботі з обдарованою молоддю та проведенню масових заходів Інституту інноваційних технологій і змісту освіти Л. В. Гунько.

Потужний науково-педагогічний колектив журі олімпіади очолював академік НАН України, лауреат Державної премії України, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, професор, доктор фізико-математичних наук М. О. Перестюк.

Оргкомітет олімпіади створив чудові умови для роботи й перебування на Кіровоградщині керівникам команд, школярам, членам журі.

Учасники виконали завдання двох турів олімпіади, на кожному з яких на 4 години було запропоновано по 4 задачі з різних розділів шкільної програми та традиційних напрямів олімпіадної підготовки з математики. Бездоганне розв'язання кожної задачі, як і завжди, оцінювалося 7 балами.

Наводимо зведені результати перевірки робіт українських учнів. Аналіз цих даних надає можливість зробити корисні висновки всім математикам та викладачам, які працюють з обдарованими учнями, організаторам математичних змагань щодо реального стану підготовки найкращих юних математиків України.

8 КЛАС

ОТРИМАЛИ з 52 учасників	**задача 1**	**задача 2**	**задача 3**	**задача 4**	**задача 5**	**задача 6**	**задача 7**	**задача 8**
7 балів	30	23	33	12	10	10	10	12
6 балів	3	1	0	0	2	4	1	2
5 балів	2	0	0	0	2	0	16	12
4 бали	0	2	0	0	2	0	0	4
3 бали	0	2	0	1	0	3	0	11
2 бали	8	8	0	2	4	6	4	0
1 бал	4	9	0	0	15	18	0	5
0 балів	5	7	19	37	17	11	21	6

9 КЛАС

ОТРИМАЛИ з 38 учасників	**задача 1**	**задача 2**	**задача 3**	**задача 4**	**задача 5**	**задача 6**	**задача 7**	**задача 8**
7 балів	18	20	4	7	18	10	7	0
6 балів	4	0	0	2	0	2	0	0
5 балів	2	1	0	0	1	0	2	0
4 бали	0	0	0	1	0	0	1	0
3 бали	1	1	0	0	4	1	4	0
2 бали	4	2	0	6	1	2	2	3
1 бал	5	6	11	9	7	14	1	0
0 балів	4	8	23	13	7	9	21	35

10 КЛАС

ОТРИМАЛИ з 37 учасників	**задача 1**	**задача 2**	**задача 3**	**задача 4**	**задача 5**	**задача 6**	**задача 7**	**задача 8**
7 балів	28	24	2	5	22	22	2	0
6 балів	4	6	0	0	4	1	0	0
5 балів	3	2	0	1	2	1	0	0
4 бали	0	1	0	2	2	0	0	0
3 бали	0	0	0	0	1	0	0	0
2 бали	0	0	0	2	2	0	0	0
1 бал	0	1	0	4	4	5	0	1
0 балів	2	3	35	23	0	8	35	36

11 КЛАС

ОТРИМАЛИ з 45 учасників	**задача 1**	**задача 2**	**задача 3**	**задача 4**	**задача 5**	**задача 6**	**задача 7**	**задача 8**
7 балів	29	25	13	1	19	11	0	0
6 балів	3	1	3	0	10	1	1	0
5 балів	2	0	2	1	1	0	0	0
4 бали	1	0	0	0	7	0	0	0
3 бали	2	1	0	1	2	0	0	0
2 бали	2	6	1	0	0	0	0	0
1 бал	4	7	3	0	6	0	0	0
0 балів	2	5	23	42	0	33	44	45

УМОВИ ЗАДАЧ, РОЗВ’ЯЗАННЯ ТА ВКАЗІВКИ

8.1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють рівність $|y-x| = 2-y-x$.

Розв’язання. Вихідне співвідношення рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1, \\ x=1; \end{array}\right. \\ y \le 2-x. \end{cases}$$

Слід зобразити множину точок $\{(x;1):\ x\le 1\} \cup \{(1;y):\ y\le 1\}$.

8.2. Троє хлопчиків збирали горіхи. Коли вони порахували, що загалом зібрано 420 горіхів, то вирішили поділити їх порівну. Спочатку перший з хлопчиків віддав кожному з двох інших по одній четвертій частині зібраних ним горіхів і ще по одному горіху, потім другий хлопчик віддав кожному з двох інших по одній четвертій частині горіхів, що утворилися в нього, і ще по одному горіху. Після того, як таке ж саме зробив і третій хлопчик, з’ясувалося, що їм насправді вдалося поділити горіхи порівну. Визначте, скільки горіхів зібрав кожен з хлопчиків.

Розв’язання. З рівностей

$$x_3 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_3 - 2 = 140,\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 1 = 140,\ x_1 + \frac{1}{4}x_3 + 1 = 140$$

знайдемо кількість горіхів у кожного з хлопчиків на передостанньому етапі. Аналогічно відновлюємо весь «ланцюжок»:

$$(140, 140, 140) \leftarrow (68, 68, 284) \leftarrow (32, 140, 248) \leftarrow (68, 122, 230).$$

Відповідь: перший хлопчик зібрав 68 горіхів, другий хлопчик — 122 горіхи, третій хлопчик — 230 горіхів.

8.3. Чи можна в таблиці розміром 7×7 розставити 24 одиниці та 25 нулів (у кожній клітинці записується одне число) так, щоб для будь-якої клітинки, у якій міститься одиниця, сума чисел у сусідніх з нею клітинках дорівнювала 1, а для будь-якої клітинки, у якій знаходиться нуль, сума чисел у клітинках, сусідніх з нею, була відмінною від 1 (дві клітинки вважаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону)?

Відповідь: так, можна (див. рис.).

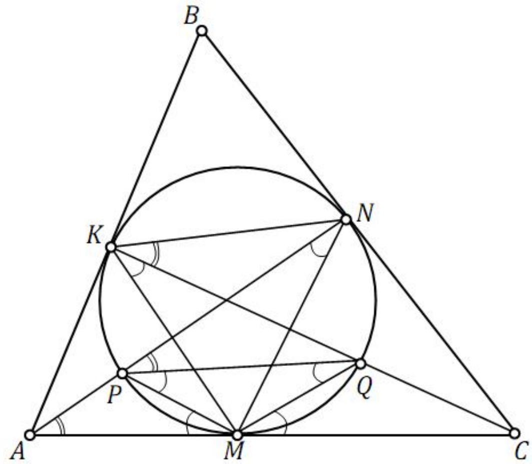
1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1

8.4. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC і CA в точках K, N і M відповідно, причому відомо, що $\angle MKC = \angle MNA$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

Розв’язання. Нехай прямі AN і CK вдруге перетинають вписане коло трикутника ABC в точках P і Q відповідно. За теоремами про вписаний кут та кут між дотичною й хордою одержуємо:

$$\angle PNM = \angle PQM = \angle PMA,\ \angle QKM = \angle QPM = \angle QMC.$$

За умовою задачі, $\angle PNM = \angle QKM$, а тому $PQ \parallel AC$. Звідси випливає, що $\angle CAN = \angle QPN = \angle QKN = \angle CKN$, тобто $\angle CAN = \angle CKN$. Це означає, що навколо чотирикутника $AKNC$ можна описати коло, і $\angle CAK = \angle BNK$, $\angle ACN = \angle BKN$. Трикутник KBN є рівнобедреним, тобто $\angle BNK = \angle BKN$. Отже, $\angle CAK = \angle ACN$.



8.5. Знайдіть усі такі пари додатних раціональних чисел x і y, що обидва числа $x + \frac{1}{y}$ і $y + \frac{1}{x}$ є натуральними.

Розв'язання. Нехай $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$, де m, n, p, q — натуральні числа, причому $(m; n) = (p; q) = 1$. Оскільки $mp + nq \,\vdots\, np$, то $mp \,\vdots\, n$, $nq \,\vdots\, p$, а тому $p \,\vdots\, n$ і $n \,\vdots\, p$. Маємо, що $n = p$. Аналогічно доводиться, що $m = q$. Звідси тепер випливає, що $2m \,\vdots\, n$ і $2n \,\vdots\, m$. Отже, $m, n, p, q \in \{1; 2\}$. Тепер уже неважко одержати відповідь.

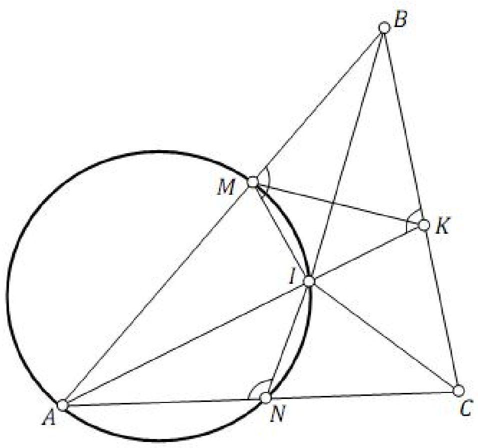
Відповідь: $(1;1)$, $\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

8.6. Нехай $[x]$ — ціла частина числа x (тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x), $\{x\} = x - [x]$ — дробова частина числа x. Розв'яжіть рівняння $\{x\}^2 + 2\{x\} = 3x^2$.

Розв'язання. Оскільки $0 \le \{x\} < 1$, то $x^2 < 1$, тобто $-1 < x < 1$. Якщо $x \in [0;1)$, то $x = \{x\}$, і знаходимо $x = 0$. Для $x \in (-1;0)$ позначимо $u = \{x\}$, $0 < u < 1$, $[x] = -1$, $x = -1 + u$. Тоді з рівняння $2u^2 - 8u + 3 = 0$, з урахуванням нерівності $0 < u < 1$, одержуємо $u = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$, $x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Відповідь: $1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$; 0.

8.7. Нехай точка I — центр вписаного кола трикутника ABC. На стороні AB обрано таку відмінну від вершин точку M, що $BM < BC$, причому описане коло трикутника AMI перетинає сторону AC в точці N, яка не співпадає з точками A і C. Доведіть, що $BM + CN = BC$.



Розв'язання. Візьмемо на стороні BC таку точку K, що $BM = BK$. Легко бачити, що

$\triangle BMI = \triangle BKI$. Оскільки навколо чотирикутника $ANIM$ можна описати коло, і $\angle MAI = \angle NAI$, то $MI = NI = KI$.

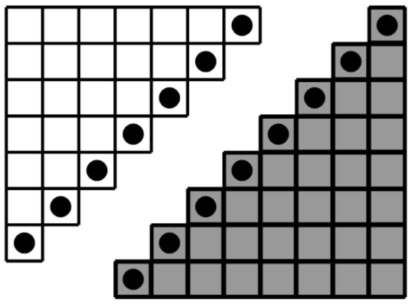
Маємо:

$$\angle BKI = \angle BMI = 180^\circ - \angle AMI = \angle ANI,\ \angle CNI = \angle CKI.$$

З того, що $\angle NCI = \angle KCI$, випливає рівність кутів CIN і CIK. Отже,

$$\triangle CNI = \triangle CKI,\ CN = CK,\ BM + CN = BK + KC = BC.$$

8.8. Нехай $n \ge 3$ — задане натуральне число. На клітчастій дошці розміром $n \times n$ (кожна клітинка є квадратом розміром 1×1) усі клітинки діагоналі, що сполучає лівий нижній кут з правим верхнім кутом дошки, а також усі клітинки, які лежать під цією діагоналлю, пофарбовані чорним кольором. Решта клітинок дошки пофарбовані білим кольором. На скільки прямокутників може виявитися розрізаною частина дошки, утворена всіма чорними клітинками, якщо всю дошку розрізано по лініях сітки на $2n$ клітчастих прямокутників так, що кожен із прямокутників складається тільки з клітинок якогось одного кольору (до прямокутників відносяться й квадрати будь-яких розмірів)?



Розв'язання. Нехай біла частина шахівниці розрізана на p прямокутників, а чорна — на q. Аналогічно тому, як зображено на рисунку для $n = 8$, на білій частині відмітимо $n-1$ клітинку, а на чорній — n клітинок. Кожному з прямокутників розрізання відповідної частини належить не більше однієї відміченої в цій частині клітинки, і тому $p \ge n-1$, $q \ge n$. З урахуванням рівності $p + q = 2n$ легко отримати, що $p = n-1$ і $q = n+1$, або ж $p = n$ і $q = n$. Для кожного $n \ge 3$ неважко навести розрізання і з $q = n$, і з $q = n+1$.

Відповідь: на n прямокутників або ж на $n+1$ прямокутник.

9.1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють рівність $\left|y - [x]\right| = 2 - y - [x]$, де $[x]$ — ціла частина числа x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x.

Розв'язання. Вихідне співвідношення рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ [x] = 1; \end{array}\right. \\ y \le 2 - [x]. \end{cases}$$

Слід зобразити множину точок $\{(x;y):\ 1 \le x < 2,\ y < 1\} \cup \{(x;1):\ x < 2\}$.

9.2. Нехай $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$. Обчисліть значення суми

$$f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+\ldots+f\left(\frac{2012}{2012}\right).$$

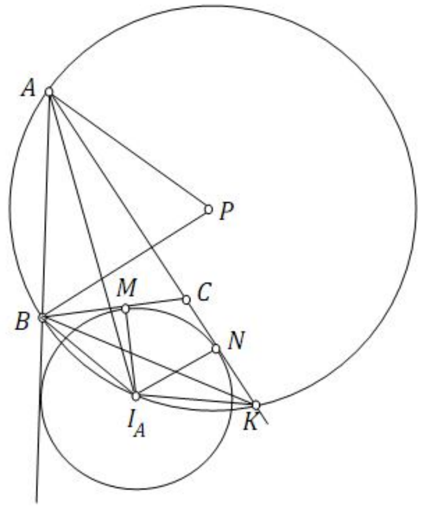
Розв'язання. Зауважимо, що $f\left(\frac{i}{2012}\right)=\frac{i^3}{i^3+(2012-i)^3}$, $1\le i\le 2012$. Тоді

$$f\left(\frac{1006}{2012}\right)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{2012}{2012}\right)=1,\ f\left(\frac{i}{2012}\right)+f\left(\frac{2012-i}{2012}\right)=1,\ 1\le i\le 1005.$$

Відповідь: $\frac{2013}{2}$.

9.3. Дано трикутник ABC. Нехай I_A — центр кола, яке дотикається до сторони BC і до продовжень сторін AB і AC за точки B і C відповідно. Доведіть, що точки B, C та центри описаних кіл трикутників ABI_A і ACI_A лежать на одному колі.

Розв'язання. Нехай точка P — центр описаного кола трикутника ABI_A. Кут ABI_A тупий, а тому точки P і B лежать по різні боки від прямої AI_A. Нехай M і N — точки дотику даного кола зі стороною BC і продовженням сторони AC відповідно, а K — точка перетину цього продовження з описаним колом трикутника ABI_A (див. рис.). Оскільки $I_AM=I_AN$ і $BI_A=KI_A$, то прямокутні трикутники BMI_A та KNI_A рівні, а тому $BM=KN$. Оскільки $CM=CN$, то $BC=CK$, тобто трикутник BCK рівнобедрений. Нехай $\angle BCA=\gamma$, тоді $\angle BKC=\frac{\gamma}{2}$, $\angle BPA=\gamma$. Отже, $\angle BCA=\angle BPA$, а це й означає, що точка P належить описаному колу трикутника ABC. Аналогічно доводиться, що центр описаного кола трикутника ACI_A також лежить на цьому колі. Це й завершує доведення.



9.4. Знайдіть найменше натуральне число n, для якого в кожній клітинці таблиці розміром $n\times n$ можна записати ціле число з відрізка $[-30;30]$ так, щоб усі цілі числа цього відрізка виявилися записаними, причому ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці не знайшлося пари чисел з від'ємним добутком.

Розв'язання. Для $n=11$ приклад легко наводиться: лівий верхній прямокутник розміром 5×6 заповнюється числами $1, 2, \ldots, 30$ у довільному порядку, правий нижній прямокутник розміром 6×5 заповнюється числами $-1, -2, \ldots, -30$ у довільному порядку, і до решти клітинок записуються нулі. Доведемо, що для $n\le 10$ це неможливо. Якщо додатні цілі числа з відрізка $[-30;30]$ розташовані в k стовпцях і m рядках, то всього клітинок з додатними числами буде не більше за km. Зрозуміло, що клітинок з від'ємними числами — не більше за $(n-k)(n-m)$. Оскільки

$$\sqrt{k(n-k)}\le\frac{k+(n-k)}{2}=\frac{n}{2},\ \sqrt{m(n-m)}\le\frac{m+(n-m)}{2}=\frac{n}{2},\ km(n-k)(n-m)\le\frac{n^4}{16},$$

то хоча б одне з чисел km, $(n-k)(n-m)$ не перевищує $\frac{n^2}{4}$. Але якщо $n \le 10$, то $\frac{n^2}{4} < 30$, і тому записати принаймні один раз кожне ціле число з відрізка $[-30; 30]$ ми не зможемо.

Відповідь: $n = 11$.

9.5. Нехай для додатних дійсних чисел x і y має місце рівність

$$x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16.$$

Доведіть, що $x + y = 4$.

Розв'язання. Задана рівність рівносильна таким співвідношенням:

$$\left(x^2 + y^2\right)(x+y) + 8xy = 16(x+y),$$

$$\left((x+y)^2 - 2xy\right)(x+y) - 16(x+y) + 8xy = 0,$$

$$(x+y)^3 - 16(x+y) - 2xy(x+y) + 8xy = 0,$$

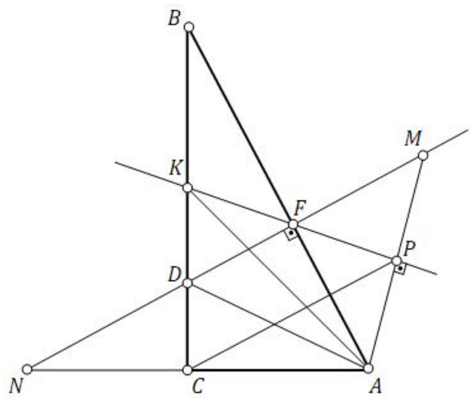
$$(x+y)\left((x+y)^2 - 16\right) - 2xy(x+y-4) = 0,$$

$$(x+y)(x+y-4)(x+y+4) - 2xy(x+y-4) = 0,$$

$$(x+y-4)\left((x+y)(x+y+4) - 2xy\right) = 0.$$

Для $x > 0$ та $y > 0$ $(x+y)(x+y+4) - 2xy = x^2 + y^2 + 4(x+y) > 0$.

9.6. Дано трикутник ABC, в якому $\angle C = 90°$, $AC < BC$. На стороні BC відмічено таку точку K, що $CK = CA$. Нехай D — така точка відрізка CK, що $\angle DAK = \angle BAK$. Відрізок DF є висотою трикутника ADB, а точка P — основою перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої FK. Доведіть, що $CP = \frac{1}{2}(AF + FD + DA)$.



Розв'язання. Нехай пряма DF перетинає прямі AC і AP в точках N і M відповідно (нескладно довести, що такі точки перетину існують). Нехай $\angle BAC = \alpha$, $\alpha > 45°$, $\angle BAK = \angle KAD = \delta$. Тоді $\angle FDB = \alpha$, $\angle NDC = \alpha$.

Далі, $\alpha - \delta = 45°$, $90° - \alpha + 2\delta = \alpha$, а тому $\angle ADC = \alpha$. Звідси випливає, що точка C — середина відрізка AN. Оскільки промінь AK — бісектриса внутрішнього кута A трикутника FDA, а промінь DK — бісектриса його зовнішнього кута при вершині D, то промінь FK є бісектрисою його зовнішнього кута при вершині F. Тому FP — медіана трикутника MFA. Отже, CP є середньою лінією трикутника AMN, і $CP = \frac{1}{2} NM$. Залишається врахувати, що $ND = AD$ і $AF = FM$.

9.7. Нехай a і b такі натуральні числа, що число $\frac{a^4-1}{b+1}+\frac{b^4-1}{a+1}$ є цілим. Доведіть, що $a^{2010}b^{2012}-1$ ділиться без остачі на $a+1$.

Розв'язання. Якщо виконується умова задачі, і принаймні одне з чисел a, b дорівнює 1, то твердження є очевидним.

Нехай $a>1$ і $b>1$. Позначимо $\frac{a^4-1}{b+1}=\frac{x}{y}$, $\frac{b^4-1}{a+1}=\frac{z}{t}$, де x, y, z, t — натуральні числа, причому $(x;y)=(z;t)=1$. За умовою задачі, сума $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}=m$ є цілим числом, тобто $xt+yz=myt$. З цієї рівності випливає, що $y \vdots t$ і $t \vdots y$ Отже, $y=t$. Оскільки добуток

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{t}=\frac{a^4-1}{b+1}\cdot\frac{b^4-1}{a+1}=(a-1)(b-1)\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=k$$

також є цілим числом, то $y=t=1$, бо $(x;y)=(z;t)=1$. Звідси випливає, що b^4-1 ділиться без остачі на $a+1$. Звідси одержуємо, що $b^{2012}-1 \vdots a+1$. Позаяк $a^{2010}b^{2012}-1=a^{2010}\left(b^{2012}-1\right)+\left(a^{2010}-1\right)$, і числа $b^{2012}-1$ і $a^{2010}-1$ діляться без остачі на $a+1$ (ми враховуємо, що $a^{2010}-1=\left(a^2\right)^{1005}-1$ ділиться без остачі на a^2-1), то $a^{2010}b^{2012}-1 \vdots a+1$, що й треба було довести (можна також було й скористатися властивостями конгруенцій).

Зауваження. Оскільки сума та добуток чисел $u=\frac{a^4-1}{b+1}$ і $v=\frac{b^4-1}{a+1}$ є цілими числами, то u і v — раціональні корені зведеного квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами, а тому, як відомо, числа u і v — цілі.

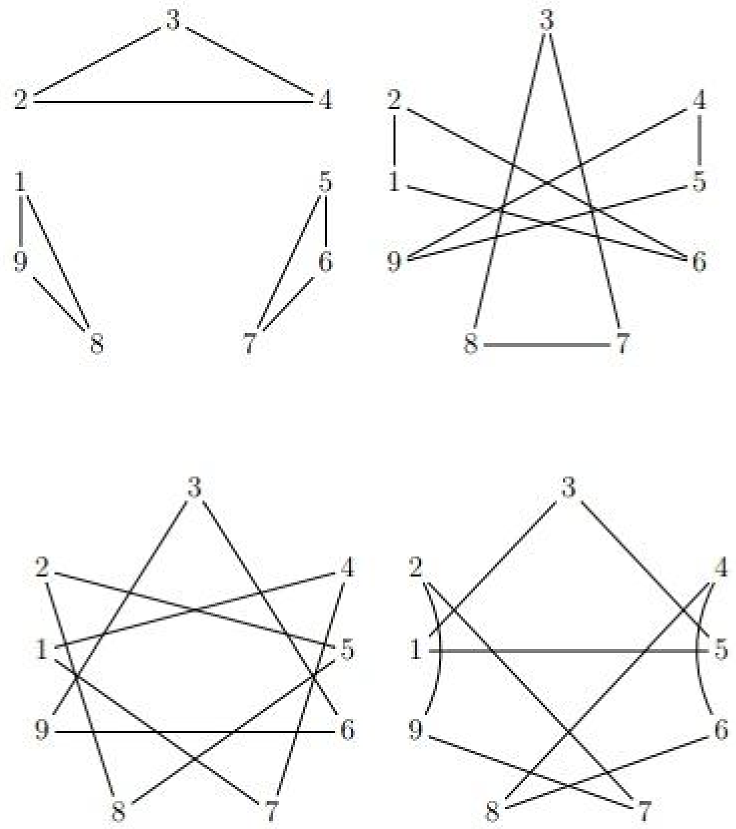
9.8. У країні Олімпії 2012 міст, деякі з котрих сполучаються між собою прямими авіалініями (кожною авіалінією сполучаються між собою тільки два міста, причому будь-які два міста сполучені не більше, ніж однією авіалінією). Відомо, що кожне місто сполучається прямими авіалініями щонайбільше з 8 іншими містами. Доведіть, що в країні можна закрити не більше за 2012 авіаліній так, щоб серед будь-яких чотирьох міст хоча б два не сполучалися між собою прямою авіалінією.

Розв'язання 1. Нехай G — граф задачі. Розіб'ємо множину V_G його 2012 вершин на три підмножини A, B і C так, щоб сума S кількостей ребер підграфів $G(A)$, $G(B)$ і $G(C)$ була мінімальною (зрозуміло, що це можливо). Припустимо, що в одній з підмножин (нехай це буде підмножина A) є така вершина X, що в підграфі $G(A)$ її степінь $\rho_{G(A)}(X)\geq 3$. Оскільки $\rho_G(X)\leq 8$, то вершина X не може сполучатись з кожним з підграфів $G(B)$ і $G(C)$ більше, аніж двома ребрами. Нехай вершина X з підграфом $G(B)$ сполучається щонайбільше двома ребрами. Тоді для підграфів $G(A\setminus\{X\})$, $G(B\cup\{X\})$ і $G(C)$ сума S зменшується, що неможливо. Отже, в підграфах $G(A)$, $G(B)$ і $G(C)$ степінь усіх їхніх вершин не перевищує 2. Як відомо, у кожному графі сума степенів усіх верших дорівнює подвоєній кількості ребер, а тому в кожному з підграфів $G(A)$, $G(B)$ і $G(C)$ кількість ребер не більше кількості вершин, тобто $S \le 2012$. Видалимо всі ці S ребер (зробимо графи з множинами вершин A, B і C *порожніми*). Для будь-яких чотирьох вершин принаймні дві лежать в одній з цих трьох множин вершин, і після видалення ребер такі дві вершини не сполучаються ребром.

Розв'язання 2. Доведемо такий допоміжний факт.

Лема. Якщо в графі G з n вершинами степінь кожної з вершин не перевищує p, то всі його вершини можна розбити на $q \le p+1$ груп так, щоб у кожній з груп жодні дві вершини не сполучалися ребром.

Доведення леми. Скористаємось індукцією за порядком n графа. База індукції є очевидною. Припустимо, що твердження має місце для $n = k$. Розглянемо граф G з $k+1$ вершиною, який задовольняє умову леми. Нехай X — його довільна вершина. Для підграфа $G(V_G \setminus \{X\})$ можна застосувати припущення індукції і розбити множину $V_G \setminus \{X\}$ усіх його вершин потрібним чином на $q \le p+1$ груп. Оскільки $\rho_G(X) \le p$, то вершина X не сполучається жодним ребром принаймні з однією з утворених груп. Залишається приєднати X до цієї групи, і **лему доведено**.



Розіб'ємо — згідно з лемою — множину вершин графа G задачі на 9 груп (деякі можуть бути порожніми). Назвемо *жмутком ребер* усі ребра, які сполучають вершини двох різних груп. Загалом утворюється $\dfrac{9 \cdot 8}{2} = 36$ жмутків ребер (деякі зі жмутків можуть не містити ребер). Розділимо їх на чотири групи по 9 жмутків у кожній так, як показано на рисунках. У кожній групі жмутки ребер утворюють три «трикутники», якими «охоплюються» всі 9 груп вершин. У графі G не більше за $\dfrac{2012 \cdot 8}{2} = 8048$ ребер, а тому хоча б в одній з чотирьох груп жмутків кількість ребер не перевищує $\dfrac{8048}{4} = 2012$. Видалимо всі ребра саме цієї групи. Які б чотири вершини ми тепер не обрали, за принципом Діріхле щонайменше дві з них увійдуть до одного з утворених «трикутників». Зрозуміло, що такі дві вершини не сполучаються ребром.

10.1. Нехай a, b і c — натуральні числа. Доведіть, що хоча б одне з чисел a^5b-ab^5, b^5c-bc^5 чи c^5a-ca^5 ділиться без остачі на 8.

Розв'язання. Серед трьох чисел a, b і c існують два числа, які мають однакову парність. Будемо вважати, що це числа a і b. Тоді числа $a-b$, $a+b$, a^2+b^2 є парними, і $a^5b-ab^5=ab(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)\vdots 8$.

Зауваження. Неважко довести, що в розглядуваному випадку $a^5b-ab^5 \vdots 240$.

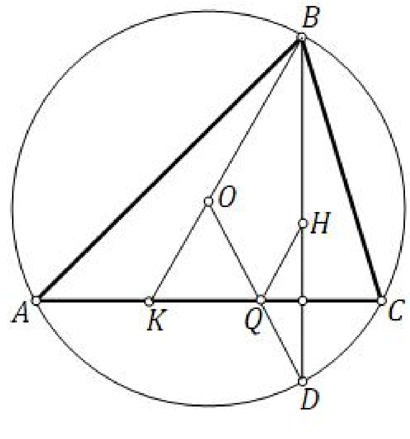
10.2. Знайдіть усі визначені на всій числовій прямій функції f, які набувають дійсних значень, і такі, що для будь-яких дійсних x, y і z

$$f(xy)+f(xz)\geq f(x)f(yz)+1.$$

Розв'язання. Покладемо у вихідній нерівності $x=y=z=0$. Тоді $\left(f(0)-1\right)^2\leq 0$, тобто $f(0)=1$. Візьмемо $y=z=0$ і одержимо, що $f(0)+f(0)\geq f(x)f(0)+1$. Звідси $f(x)\leq 1$ для всіх $x\in\mathbf{R}$. Якщо $x=y=z=1$, то $\left(f(1)-1\right)^2\leq 0$, $f(1)=1$. Для $y=z=1$ маємо: $f(x)+f(x)\geq f(x)f(1)+1$, $f(x)\geq 1$, $x\in\mathbf{R}$. Ми встановили, що для всіх $x\in\mathbf{R}$ $f(x)=1$. Перевірка показує, що така функція задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(x)=1$, $x\in\mathbf{R}$.

10.3. Нехай O — центр описаного кола гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC. Прямі BO і CO перетинають сторони AC і AB в точках K і N відповідно. На сторонах AC і AB взято такі відмінні від K і N точки P і T відповідно, що $OK=OP$ і $ON=OT$. Через точку P проведено пряму, паралельну BK, а через точку T — пряму, паралельну CN, і позначимо через M точку перетину цих прямих. Доведіть, що радіуси описаних кіл трикутників AMB, BMC і CMA рівні.



Розв'язання. Нехай H — ортоцентр трикутника ABC, точка D симетрична H відносно прямої AC. Як відомо, точка D лежить на описаному колі трикутника ABC. Позначимо через Q точку перетину відрізків OD і AC.

Тоді маємо: $\angle QDH=\angle QHD=\angle OBD$.

Звідси випливає, що $HQ\parallel BK$, і $\angle BKC=\angle HQC$. Отже, $\angle HQC=\angle DQC=\angle OQK=\angle BKC$, а тому точки P і Q співпадають. Ми довели, що пряма, проведена через точку P паралельно BK, проходить через точку H. Аналогічно доводиться, що точка H лежить і на прямій, що проходить через точку T паралельно CN. Відтак, точка M з умови задачі є ортоцентром трикутника ABC. Рівність радіусів описаних кіл трикутників AMB, BMC і CMA є наслідком властивостей *кола дев'яти точок* (названі трикутники та трикутник ABC мають спільне коло дев'яти точок, а радіус кола дев'яти точок будь-якого трикутника вдвічі менший за радіус його описаного кола). До того ж, рівність радіусів описаних кіл трикутників ABC, AMB, BMC і CMA легко встановлюється за допомогою узагальненої теореми синусів.

10.4. Нехай $n \geq 3$ — задане натуральне число. Послідовність із $2n$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ будемо називати *вдалою*, якщо виконуються такі три умови:

1) усі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є попарно різними елементами множини $\{1, 2, \ldots, n\}$;

2) $a_k = a_{n+k}$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$;

3) існують такі $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ із множини $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, що $a_{i_k} = k$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$.

Наприклад, для $n = 5$ послідовність $\underline{1}$, 3, 4, $\underline{2}$, 5, 1, $\underline{3}$, $\underline{4}$, 2, $\underline{5}$ є вдалою, а послідовність 2, 1, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 5, 4 — ні. Для кожного $n \geq 3$ знайдіть кількість вдалих послідовностей.

Розв'язання. Через m, $0 \leq m \leq n$, позначимо кількість чисел множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, які знаходяться серед індексів $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$. Неважко довести, що такими m індексами визначаються $n - m$ чисел із множини $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, які увійдуть до даного набору індексів $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$. Цим повністю описуються всілякі *вдалі* послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Для $m = 0$ маємо вдалу послідовність $1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n$. Але ж ця сама вдала послідовність утворюється ще в n випадках, коли для набору індексів $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ маємо, що $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \cap \{1, 2, \ldots, n\} = \{1, 2, \ldots, m\}$, $1 \leq m \leq n$. Усіляких підмножин n-елементної множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, відмінних від підмножин $\{1, 2, \ldots, m\}$, $1 \leq m \leq n$, існує $2^n - n$. Усім таким підмножинам відповідають різні вдалі послідовності (порожня підмножина відповідає випадку $m = 0$ і також враховується серед $2^n - n$ підмножин).

Відповідь: $2^n - n$.

10.5. Розв'яжіть рівняння $x + \sqrt{1-x} + 1 = \sqrt{x} + 3\sqrt{x - x^2}$.

Розв'язання. Областю допустимих значень рівняння є відрізок $[0;1]$. Запишемо рівняння у вигляді

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 + \sqrt{1-x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 - \sqrt{x} - 3\sqrt{x}\sqrt{1-x} = 0.$$

Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, одержуємо:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)\left(2\sqrt{x} - \sqrt{1-x} - 1\right) = 0.$$

Залишається розв'язати стандартними методами рівняння

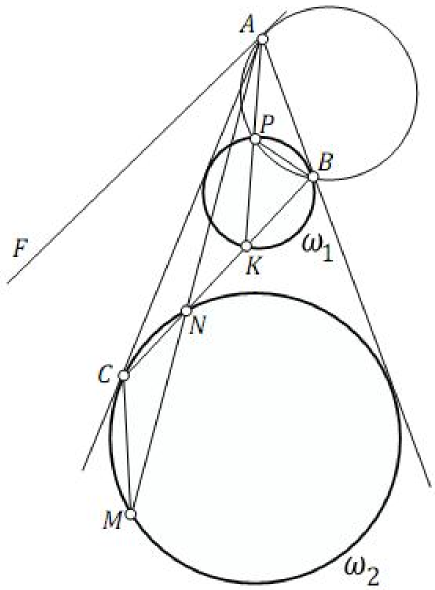
$$\sqrt{x} - \sqrt{1-x} = 0,\ 2\sqrt{x} = \sqrt{1-x} + 1.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$; $\frac{16}{25}$.

10.6. Про додатні дійсні числа a і b відомо, що $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=5$. Доведіть, що $3\sqrt{a+b}\ge a+b+2$.

Розв'язання. Нехай $u=a+b$ і $v=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Тоді $u+v=5$. Як відомо, $uv\ge 4$. Тому $5=u+v\ge u+\frac{4}{u}$. Звідси випливає, що $u^2-5u+4\le 0$. Отже, $1\le\sqrt{u}\le 2$, тобто $\left(\sqrt{u}-1\right)\left(\sqrt{u}-2\right)\le 0$, і $3\sqrt{u}\ge u+2$.

10.7. У кут BAC вписано два кола ω_1 і ω_2, які не мають спільних точок, причому $B\in\omega_1$, $C\in\omega_2$, і радіус кола ω_1 менший за радіус кола ω_2. Пряма BC вдруге перетинає кола ω_1 і ω_2 в точках K і N відповідно. Прямі AK і AN проходять, відповідно, через точки $P\in\omega_1$ і $M\in\omega_2$, відмінні від K і N. Доведіть, що точка A лежить на прямій, що проходить через центри описаних кіл трикутників ACM і ABP.



Розв'язання. Проведемо дотичну AF до описаного кола трикутника APB. Тоді $\angle PAF=\angle PBA=\angle PKB$, а тому $AF\parallel BC$. Отже, $\angle FAC=\angle ACN=\angle CMA$. З цього випливає, що пряма AF дотикається до описаного кола трикутника ACM. Оскільки описані кола трикутників ACM і ABP в точці A мають спільну дотичну, то точка A лежить на лінії центрів цих кіл.

10.8. Див. задачу 9.8.

11.1. Для дійсних чисел $x\in(0;\pi)$ і $y\in(0;\pi)$ має місце рівність

$$\cos 2x\cos y-\cos 2y\cos x=\cos y-\cos x.$$

Доведіть, що $x=y$.

Розв'язання. Запишемо дану рівність у вигляді

$$\cos^2 x\cos y-\cos^2 y\cos x=\cos y-\cos x,\ \left(\cos x\cos y+1\right)\left(\cos x-\cos y\right)=0.$$

Оскільки для $x\in(0;\pi)$ і $y\in(0;\pi)$ $\cos x\cos y>-1$, то $\cos x=\cos y$, і тому, враховуючи спадання функції $f(t)=\cos t$ на проміжку $(0;\pi)$, маємо, що $x=y$.

11.2. Дано таку визначену на всій числовій прямій функцію f, яка набуває дійсних значень, що для всіх $x\in\mathbf{R}$ і $y\in\mathbf{R}$ справджується рівність

$$f(x+2xy)=f(x)+2f(xy).$$

Знайдіть значення $f(2012)$, якщо відомо, що $f(2011)=2012$.

Розв'язання. Підставимо $x=0$ і одержимо, що $f(0)=0$. Підставляючи до нашого функціонального рівняння $y=-1$ та $y=-\frac{1}{2}$, одержимо, що $f(-x)=-f(x)$ та $f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)$ для будь-яких дійсних x. Далі, підставимо $y=\frac{z}{2x}$, де $x\neq 0$, і одержимо, що $f(x+z)=f(x)+f(z)$. Оскільки $f(0+z)=0+f(z)=f(0)+f(z)$, то рівність $f(x+z)=f(x)+f(z)$ має місце для всіх дійсних x і z (позаяк кожен розв'язок *функціонального рівняння адитивності*, очевидно, задовольняє умову $f(x+2xy)=f(x)+2f(xy)$, то ми встановили, що множини розв'язків цих рівнянь співпадають). Легко довести, що $f(kx)=kf(x)$ для довільних $x\in\mathbf{R}$ і $k\in\mathbf{Z}$. Оскільки $f(2011)=f(2011\cdot 1)=2011f(1)$, і за умовою $f(2011)=2012$, то

$$2012=2011f(1),\ f(1)=\frac{2012}{2011},\ f(2012)=2012f(1)=\frac{2012^2}{2011}.$$

Відповідь: $f(2012)=\frac{2012^2}{2011}$.

11.3. Див. задачу 10.4.

11.4. Нехай $SABC$ — така трикутна піраміда, що для точки M перетину медіан її грані ABC виконуються нерівності $MA>1$, $MB>1$ і $MC>1$. Доведіть, що $SA+SB+SC>3$.

Розв'язання 1. Розглянемо вектори $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{MS}=\vec{s}$, $\overrightarrow{SA}=\vec{a}-\vec{s}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}-\vec{s}$ і $\overrightarrow{SC}=\vec{c}-\vec{s}$. За умовою задачі, $\left|\vec{a}\right|>1$, $\left|\vec{b}\right|>1$ і $\left|\vec{c}\right|>1$. Нам потрібно довести нерівність $\left|\vec{a}-\vec{s}\right|+\left|\vec{b}-\vec{s}\right|+\left|\vec{c}-\vec{s}\right|>3$.

Нехай $\left|\vec{s}\right|\geq 1$. Тоді, використовуючи відому рівність $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ та властивості скалярного добутку, маємо:

$$\left|\vec{a}-\vec{s}\right|+\left|\vec{b}-\vec{s}\right|+\left|\vec{c}-\vec{s}\right|\geq-\frac{\left(\vec{a}-\vec{s}\right)\vec{s}}{\left|\vec{s}\right|}-\frac{\left(\vec{b}-\vec{s}\right)\vec{s}}{\left|\vec{s}\right|}-\frac{\left(\vec{a}-\vec{s}\right)\vec{s}}{\left|\vec{s}\right|}=$$

$$=3\left|\vec{s}\right|-\frac{\vec{s}}{\left|\vec{s}\right|}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=3\left|\vec{s}\right|\geq 3.$$

Рівність у цій нерівності досягається тоді й тільки тоді, коли $\left|\vec{s}\right|=1$ і вектори $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ і $\overrightarrow{SC}$ протилежно напрямлені до вектора $\overrightarrow{SM}$, що, зрозуміло, неможливо.

Розглянемо тепер випадок $\left|\vec{s}\right|<1$. Тоді

$$\left|\vec{a}-\vec{s}\right|+\left|\vec{b}-\vec{s}\right|+\left|\vec{c}-\vec{s}\right|\ge\frac{\left(\vec{a}-\vec{s}\right)\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}+\frac{\left(\vec{b}-\vec{s}\right)\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}+\frac{\left(\vec{a}-\vec{s}\right)\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}=$$

$$=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|-\vec{s}\left(\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}+\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}+\frac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}\right)=$$

$$=3+\left(\left|\vec{a}\right|-1\right)\left(1-\frac{\vec{s}\,\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}\right)+\left(\left|\vec{b}\right|-1\right)\left(1-\frac{\vec{s}\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right)+\left(\left|\vec{c}\right|-1\right)\left(1-\frac{\vec{s}\,\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}\right)>3.$$

Для останньої оцінки ми врахували, що $1>\left|\vec{s}\right|\ge\frac{\vec{s}\,\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$, $1>\left|\vec{s}\right|\ge\frac{\vec{s}\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$, $1>\left|\vec{s}\right|\ge\frac{\vec{s}\,\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}$.

Розв'язання 2. Якщо застосувати ортогональне проектування точки S на площину ABC, то стає очевидним, що твердження задачі достатньо довести для точки S цієї площини, для якої сума відстаней $SA+SB+SC$ є мінімальною. Добре відомо[1], що коли всі кути трикутника ABC менші за $120°$, то потрібною точкою є *точка Торічеллі* (така точка T всередині трикутника ABC, що $\angle ATB=\angle ATC=\angle BTC=120°$), а якщо, наприклад, $\angle BAC\ge 120°$, то — вершина A.

У першому випадку позначимо $x=TA$, $y=TB$, $z=TC$ (без обмеження загальності вважаємо, що $x\le y\le z$), і з використанням формули для довжини медіани та теореми косинусів матимемо:

$$MA^2=\frac{1}{9}\left(2AC^2+2AB^2-BC^2\right)=\frac{1}{9}\left(2x^2+2z^2+2xz+2x^2+2y^2+2xy-y^2-z^2-yz\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(4x^2+y^2-z^2+2xz+2xy-yz\right)=\frac{1}{9}\left(\left(x+y+z\right)^2+3x^2-2z^2-3yz\right)\le\frac{1}{9}\left(x+y+z\right)^2.$$

Звідси дістанемо потрібну нерівність $x+y+z>3$.

У другому випадку, з урахуванням нерівності $\cos\angle BAC\le-\frac{1}{2}$, одержуємо:

$$MA^2=\frac{1}{9}\left(2AC^2+2AB^2-BC^2\right)\le\frac{1}{9}\left(AC^2+AB^2+AB\cdot AC\right)\le\frac{1}{9}\left(AB+AC\right)^2,$$

тобто $AB+AC>3$.

11.5. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}\left(x+y\right)\left(1+xy\right)+\left(x-y\right)^2=2,\\ x^3+y^3=1.\end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи запишемо, з урахуванням рівності $x^3+y^3=1$, у вигляді

$$\left(x+y\right)\left(1+xy\right)+\left(x-y\right)^2-\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)-1=0,$$

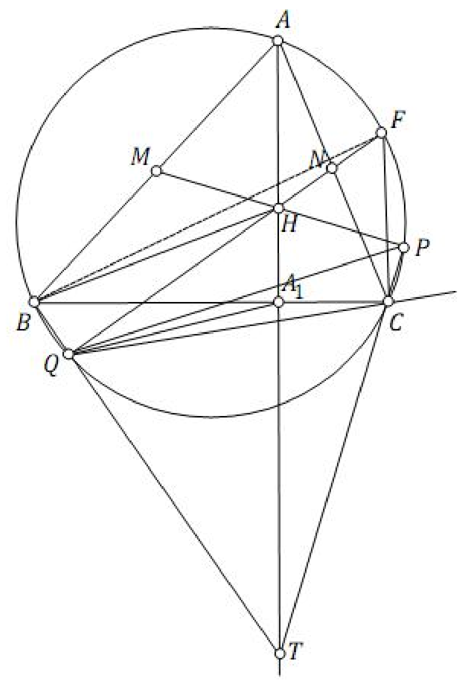
[1] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001. — 584 с.

тобто $(x+y-1)\left(1-(x-y)^2\right)=0$.

Подальші міркування є очевидними.

Відповідь: $(1;0)$, $(0;1)$.

11.6. Нехай H — точка перетину висот гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC, M — середина сторони AB, N — середина сторони AC. Позначимо через, відповідно, P і Q точки перетину променів MH і NH з описаним колом трикутника ABC. Доведіть, що прямі BQ, AH і CP перетинаються в одній точці або паралельні.



Розв'язання 1. Нехай AA_1 — висота трикутника ABC. Розглянемо випадок, коли прямі BQ і CP перетинаються в деякій точці T. Нам потрібно довести, що точка T лежіть на прямій AA_1. Припустимо спочатку, що точки A і P лежать по один бік від прямої BC, а точки A і Q — по різні боки від прямої BC (див. рис.).

Як відомо, точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно середин його сторін, лежать на описаному колі цього трикутника: насправді, якщо в трикутнику ABC точка F симетрична ортоцентру H відносно середини N сторони AC, то $\angle AFC = \angle AHC = 180° - \angle ABC$.

Далі, оскільки $FC \parallel AH$, то $\angle FCB = 90°$, і точки B і F діаметрально протилежні. Отже, $HQ \perp BT$. Аналогічно доводиться, що $HP \perp CT$. Чотирикутники $HQTP$ і BQA_1H циклічні. А тому маємо: $\angle QBC = \angle QHA_1$, $\angle QHT = \angle QPC$. Оскільки $\angle QPC = \angle QBC$, то $\angle QHT = \angle QHA_1$, що й завершує доведення.

Якщо хорда PQ і точка A лежать по різні боки від прямої BC, то $\angle QBC = \angle QHA_1$,

$\angle QHT = \angle QPT$, $\angle QPT = \dfrac{\overset{\frown}{QP}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{PC}}{2} = \angle QBC$.

Аналогічно розглядаються інші випадки розташування точок P і Q на описаному колі трикутника ABC.

Якщо прямі BQ і CP паралельні, то неважко довести, що точка H лежить на відрізку MN, точки P і F співпадають, і тому $AH \parallel PC$.

Розв'язання 2. Нехай ω — описане коло трикутника ABC, а ω_B і ω_C — кола, побудовані — як на діаметрах — на відрізках HB і HC відповідно. Оскільки $\angle HPC = 90°$, то $P \in \omega_C$, і пряма CP — радикальна вісь кіл ω та ω_C. Аналогічно, BQ — радикальна вісь кіл ω та ω_B. Далі, пряма AA_1 — радикальна вісь кіл ω_B і ω_C. Отже, твердження задачі випливає з *теореми про радикальні осі трьох кіл*.

Розв'язання 3 (запропоновано учасницею олімпіади Анною Мітрущенковою). Випадок, коли точки P і F співпадають, тобто $AH \parallel PC$, розглянуто в **розв'язанні 1**.

Нехай Y — така точка, що H — середина відрізка AY. Тоді $BY \parallel PH$, і $CP \perp BY$. Аналогічно, $BQ \perp CY$. До того ж, $AH \perp BC$. Потрібний результат випливає з конкурентності прямих, що містять висоти трикутника BCY.

11.7. Невід'ємні дійсні числа a, b і c задовольняють нерівність $a+b+c \le 2$. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab} \le 3.$$

Розв'язання 1. Можна вважати, що $a \ge b \ge c \ge 0$. Доведемо такі дві нерівності:

$$\sqrt{a^2+bc} \le a+\frac{c}{2},\ \sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab} \le \frac{a+3b+2c}{2}.$$

Перша з них еквівалентна нерівності $4c(a-b)+c^2 \ge 0$. Для доведення другої нерівності скористаємося тим, що для $u \ge 0$ і $v \ge 0$ $\sqrt{u}+\sqrt{v} \le \sqrt{2(u+v)}$.

Отже, $\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab} \le \sqrt{2\left(b^2+ca+c^2+ab\right)}$. Неважко перевірити, що

$$2\left(b^2+ca+c^2+ab\right) \le \left(\frac{a+3b+2c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a-b-2c)^2+8c(b-c) \ge 0.$$

Маємо: $\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab} \le a+\dfrac{c}{2}+\dfrac{a+3b+2c}{2}=\dfrac{3}{2}(a+b+c) \le \dfrac{3}{2}\cdot 2=3.$

Розв'язання 2. Якщо кожне з чисел a, b, c належить відрізку $[0;1]$, то, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, одержимо:

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ac}+\sqrt{c^2+ab} \le \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}\left((a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2\right)} \le \sqrt{\frac{3}{2}(4+a+b+c)} \le 3.$$

Нехай серед чисел a, b, c є таке, котре більше за 1. Без обмеження загальності вважаємо, що $a>1$. З відомої *нерівності чотирьох точок*[2] для опуклої догори функції $f(x)=\sqrt{x}$ маємо, що за умови $0 \le a_1 \le a_2 \le b_2 \le b_1$, $a_1+b_1=a_2+b_2$ виконується нерівність $\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1} \le \sqrt{a_2}+\sqrt{b_2}$ (її легко встановити безпосередньо, адже для таких чисел a_1, a_2, b_1, b_2 вона рівносильна нерівності $(a_1-a_2)(a_2-b_1) \ge 0$; до того ж, потрібна нерівність випливає з *нерівності Карамати*[3]). Отже, оскільки

$$b^2+ac \le b^2+ac+bc=b(b+c)+ac \le ab+ac=a(b+c)<a^2 \le a^2+bc,$$

то

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ac}+\sqrt{c^2+ab} \le a+\sqrt{b^2+ac+bc}+\sqrt{c^2+ab} \le$$

$$\le a+\sqrt{2\left(b^2+c^2+ab+bc+ac\right)} \le a+\sqrt{2(b+c)(a+b+c)} \le$$

$$\le a+2\sqrt{b+c} \le a+2\sqrt{2-a}=3-\left(1-\sqrt{2-a}\right)^2 \le 3.$$

---

[2] Ушаков Р. П., Хацет Б. І. Опуклі функції та нерівності. — К.: Вища школа, 1986. — 111 с.

[3] Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965. — 276 с.

11.8. Відомо, що многочлен $P(x)$ n-го степеня з цілими коефіцієнтами можна подати у вигляді $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$, де $0<x_k<3$ для всіх $k=1, 2, \ldots, n$. Доведіть, що $x_k\in\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 1; 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ для всіх $k=1, 2, \ldots, n$.

Розв'язання. Неважко довести, що для всіх $t\in(0; 3)$

$$\left|t(t-1)(t-2)(t-3)\right|=\left|\left(t^2-3t\right)^2+2\left(t^2-3t\right)\right|\le 1,$$

причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Нехай $a\ge 0$ — кількість рівних 1 чисел серед $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $b\ge 0$ — кількість рівних 2 чисел серед $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Якщо $a+b=n$, то твердження задачі, очевидно, виконано. Нехай $a+b<n$, $m=n-(a+b)$, і без обмеження загальності припустимо, що $x_1,x_2,\ldots,x_m\notin\{1; 2\}$. Тоді $P(x)=(x-1)^a(x-2)^bQ(x)$, де многочлен

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$$

має цілі коефіцієнти (як частка двох зведених многочленів з цілими коефіцієнтами). Отже, $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$ — деякі цілі ненульові числа, звідки отримуємо, що $A=\left|Q(0)Q(1)Q(2)Q(3)\right|\ge 1$. Але $A=\prod\limits_{k=1}^{m}\left|x_k(x_k-1)(x_k-2)(x_k-3)\right|$, і тому, згідно з доведеним, це можливо лише у випадку, коли $\left|x_k(x_k-1)(x_k-2)(x_k-3)\right|=1$ для всіх $k=1,\ldots,m$. Остання рівність дає потрібний результат.

Задачі запропонували:
О. О. Курченко (8.1, 9.1, 11.1), *В. М. Лейфура* (8.2, 10.1, 10.5, 11.2), *І. М. Мітельман* (8.3, 8.6, 8.8, 9.4, 11.5), *І. П. Нагель* (9.6, 10.3, 10.7), *О. Б. Панасенко* (9.5), *В. М. Радченко* (11.7), *Н. П. Сердюк* (9.8=10.8, 11.8), *В. О. Швець* (9.2), *В. А. Ясінський* (8.4, 8.5, 8.7, 9.3, 9.7, 10.2, 10.4=11.3, 10.6, 11.4, 11.6).

Інформація щодо Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, інші корисні матеріали розміщуються на сторінці «Юному математику» сайта механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка **www.mechmat.univ.kiev.ua**.
Офіційні документи Всеукраїнських учнівських олімпіад розміщуються на сайті Інституту інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України **www.iitzo.gov.ua**.