L Міжнародна математична олімпіада

С.М. Торба [1]

З 10 по 22 липня 2009 року в місті Бремен, Німеччина, проходила ювілейна, 50-та міжнародна олімпіада школярів з математики. Цьогорічна олімпіада стала першою, у якій взяли участь понад 100 країн — вона зібрала 565 школярів зі 104 країн. Відповідно до багаторічної традиції, спочатку приїздять наукові керівники команд, з яких складається журі, а через декілька днів прибувають школярі у супроводі керівників команд. Журі живе у таємному місці окремо від школярів і переїжджає до команд одразу після завершення двох турів олімпіади. Цього року учасники, а згодом і керівники, жили у кампусі університету ім. Якобса (Jacobs University) у передмісті Бремена. У вільний час школярі мали можливість як активно проводити час, так і спілкуватись між собою. Незважаючи на мінливу Бременську погоду з тимчасовими дощами, багато часу школярі проводили на свіжому повітрі. Було влаштовано барбекю і навіть проведено міні чемпіонат з футболу, причому до кожної команди мали входити школярі принаймні з чотирьох країн. Та й прощальний вечір з дискотекою та німецькими ковбасками-гриль проходив під відкритим небом.

Склад команди України було визначено на відбірково-тренувальних зборах. Вони проходили наприкінці квітня на базі Національного еколого-натуралістичного центру учнівської молоді в м. Києві. Традиційно на збори було запрошено 12 учнів, які виступали за 11 клас та показали найкращий результат на Всеукраїнській математичній олімпіаді. До складу команди України увійшли такі шість учнів:

Богдан Веклич, учень 10 класу Києво-Печерського ліцею № 171 “Лідер”;

Ігор Кудла, випускник Києво-Печерського ліцею № 171 “Лідер”, нині студент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка;

Анастасія Лисакевич, випускниця Харківського фізико-математичного ліцею № 27, нині студентка Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна;

Віталій Сенін, випускник ліцею № 208 м. Києва, нині студент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка;

Назар Сердюк, випускник ліцею № 208 м. Києва, нині студент Київського національного університету ім. Тараса Шевченка;

Дар’я Щедріна, випускниця Українського фізико-математичного ліцею КНУ ім. Тараса Шевченка, нині студентка Московського фізико-технічного інституту.

Керівник команди — Наталія Сергіївна Прокопенко, головний спеціаліст департаменту загальної середньої та дошкільної освіти, МОН України.

Науковий керівник команди — Богдан Владиславович Рубльов, професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук.

Крім того, до складу команди України у ролі **помічників наукового керівника** входили Сергій Торба, науковий співробітник Інституту математики НАН України та Антон Мелліт, науковий співробітник Інституту ім. Макса Планка, Бонн, Німеччина.

[1] науковий співробітник Інституту математики НАН України, помічник наукового керівника команди України

Команда України на ММО-2009
(зліва направо — Віталій Сенін, Дар'я Щедріна, Назар Сердюк,
Анастасія Лисакевич, Богдан Веклич, Ігор Кудла, гід).

Звичайно, головне на міжнародній олімпіаді — власне змагання. Воно проходить на протязі двох днів, у кожен з яких учасники мають $4\frac{1}{2}$ години на розв'язування 3 задач. Для того, щоб усі знаходились у максимально рівних умовах, цього року учасники працювали в одному великому залі.

За кожну задачу учень міг отримати від 0 до 7 балів. Відповідно, максимальна можлива сума — 42 балів, яку цього року здобули лише двоє учасників — Макото Соеджима (Японія) та Донгуй Вей (Китай), а Лізі Сауерманн (Німеччина), не вистачило до абсолютного результату одного балу. Бронзову медаль отримали учасники, які набрали 14–23 бали, срібну — 24–31 бал, золоту — 32 бали і більше.

Наші учасники показали такі результати:

УЧАСНИК	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Σ	**НАГОРОДА**
Богдан Веклич	7	7	7	7	7	0	35	Золота медаль
Ігор Кудла	7	7	0	0	7	0	21	Бронзова медаль
Анастасія Лисакевич	7	7	1	7	2	0	24	Срібна медаль
Віталій Сенін	7	7	5	7	7	0	33	Золота медаль
Назар Сердюк	7	7	1	7	7	6	35	Золота медаль
Дар'я Щедріна	1	7	0	5	1	0	14	Бронзова медаль

Приємно відмітити, що вже втретє за історію виступів на міжнародних олімпіадах наші школярі здобувають три золоті медалі. Українським учасникам підкорились усі 6 задач, незважаючи на те, що цьогорічна остання задача була однією з найскладніших за всю історію міжнародних олімпіад — повністю її розв'язали лише 4 учні.

Хоча офіційними результатами є лише індивідуальні, кожного року підраховується командний рейтинг. Він обчислюється як сума балів, набраних усіма учасниками команди. Наша команда посіла в цьому неофіційному рейтингу 14 місце, а перші 21 країна наведені у таблиці.

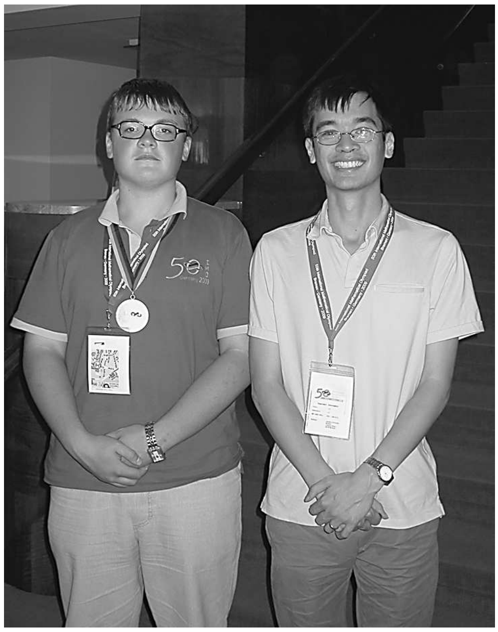
Країна	**Медалі**			**Результати по задачах**						$\sum$	**Місце**
	З	С	Б	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
Китай	6	–	–	42	42	42	42	42	11	221	1
Японія	5	–	1	42	42	34	33	42	19	212	2
Росія	5	1	–	42	39	31	42	42	7	203	3
Південна Корея	3	3	–	42	42	22	40	42	0	188	4
КНДР	3	2	1	42	35	24	39	36	7	183	5
США	2	4	–	42	42	20	33	42	3	182	6
Таїланд	1	5	–	42	42	17	40	40	0	181	7
Туреччина	2	4	–	42	42	23	32	38	0	177	8
Німеччина	1	4	1	42	33	11	38	37	10	171	9
Білорусія	1	4	1	37	34	15	39	42	0	167	10
Італія	2	2	2	42	38	18	29	38	0	165	11–12
Тайвань	1	5	–	42	38	4	35	42	4	165	11–12
Румунія	2	2	2	39	42	15	28	36	3	163	13
Україна	3	1	2	36	42	14	33	31	6	162	14
В'єтнам	2	2	2	36	38	16	37	30	4	161	15–16
Іран	1	4	1	42	42	10	30	34	3	161	15–16
Бразилія	1	3	2	42	37	10	38	30	3	160	17
Канада	1	3	2	41	35	13	33	36	0	158	18
Болгарія	1	3	2	42	38	9	32	36	0	157	19–21
Угорщина	1	2	3	42	42	18	21	34	0	157	19–21
Великобританія	1	3	2	41	38	17	32	29	0	157	19–21

Повні результати Міжнародної математичної олімпіади 2009 року містяться на її офіційному сайті `http://www.imo2009.de` та на офіційному сайті Міжнародних математичних олімпіад `http://www.imo-official.org`.

Однак міжнародна олімпіада — це не лише розв'язування задач. Це ще й середовище для спілкування школярів, активний відпочинок, лекції та екскурсії.

Серед численних екскурсій найбільше враження на школярів та на керівників справили три. Перша — в музей мініатюр у Гамбурзі (Miniature Wunderland) — найбільший з подібних музеїв у світі, де у масштабі 1:87 змодельована залізниця та місцевість, що її оточує. Модель налічує 12 км колій, 1000 потягів. Навколо колій розташовані будинки, стадіони, аеропорти, змодельовані сцени з життя людей різних країн світу — усього більше 200000 фігур людей, причому усі моделі діючі. Залізницею рухаються потяги, дорогами — автомобілі, працюють світлофори та шлагбауми, переводяться стрілки, тощо. Другою була екскурсія Бременом. Міська ратуша, збудована на початку XV ст. і її зали — головна гордість і прикраса міста. Вражають фасад будівлі та зали для прийому гостей, прикрашені різьбленням по дереву, кількаметровими моделями парусних суден, підвішеними під стелею, та розписом на морську тематику. А поруч з ратушею знаходиться інша візитна картка Бремена — пам'ятник Бременським музикам. Третьою екскурсією була подорож на остів Вангерооге, розташований у Північному морі. Морське дно біля німецьких берегів в цих місцях дуже пологе, і як результат — під час відливів море відходить від берегу на декілька кілометрів. Сам острів приємно порадував гарним пляжем, усіма умовами для активного відпочинку і своєю екологічністю. Основні засоби пересування островом — це велосипеди та електромобілі, використання автомобілів з двигуном внутрішнього згоряння заборонене. На зворотному шляху з острова на берег ми проминули мілину, на якій відпочивала зграя морських котиків.

Але цьогорічна олімпіада була особливою — вона ювілейна, 50-та. Отож усіх учасників цікавило питання, що ж влаштують з нагоди ювілею? На святкування організатори запросили шість відомих математиків (Бела Баллобас, зірка перших ММО і відомий вчений; Тімоті Говерс, Філдсовський лауреат; Ласло Ловаш, лауреат премії Вульфа; Станіслав Смірнов, лауреат премій Салема та Клея; Теренс Тао, наймолодший з призерів ММО та лауреат премій Філдса та Салема; Жан-Крістоф Юкош, Філдсовський лауреат). Усі ці математики свого часу були переможцями міжнародних олімпіад. Під час урочистої церемонії, яка проходила у музичному театрі Бремена, кожен з шести математиків зробив доповідь. Спільною ідеєю усіх доповідей було порівняння олімпіадної математики та математики як науки, що є спільного, у чому відмінність і чи легко перейти від розв'язування олімпіадних задач до вирішення наукових проблем. У перервах між доповідями учні мали можливість сфотографуватися та поспілкуватись з почесними гостями. Крім того, ці математики прийняли участь в урочистій церемонії нагородження, яка пройшла у чудовому залі Бременської філармонії.



Богдан Веклич (зліва) та Теренс Тао, Філдсовський лауреат (справа)

А тепер хотілося б розповісти про те, як проходить міжнародна олімпіада для наукових керівників, як відбираються і як перевіряються задачі.

Навесні науковий керівник кожної країни-учасника має право надіслати до 5 задач на адресу оргкомітету олімпіади. На основі надісланих задач складається так званий Short List — список з приблизно 30 задач, розбитих по 4 розділам (алгебра, геометрія, комбінаторика, теорія чисел). Відбір найкращих задач з числа запропонованих — процес непростий і триває майже два місяці. Цим займається так званий задачний комітет. До складу комітету входять люди, які присвятили багато років олімпіадному руху і можуть оцінити складність, цікавість і красу запропонованих задач, знайти альтернативні розв'язки. Наприклад, цього року до задачного комітету входили Крістіан Рейтер, абсолютний рекордсмен міжнародних олімпіад (він виборов 4 золотих і 1 бронзову медаль), Пітер Шольц (3 золотих і 1 срібна медалі), Ханс-Дітріх Гронау (науковий керівник команди Німеччини) та інші. Цього року у Short List потрапила і одна задача, запропонована від України.

У день приїзду наукові керівники отримують Short List без розв'язків, а наступного дня — розв'язання усіх 30 задач. Після цього починається складна процедура голосування, у ході якої визначається текст олімпіади. Спочатку голосують за пару простих задач, потім — за пару важких і останнім голосуванням визначають середні за складністю задачі. Зрозуміло, що за півтори доби важко оцінити усі 30 задач, тому при голосуванні виникають ситуації, подібні цьогорічній, коли другий день виявився суттєво складнішим, ніж перший. Визначення 6 задач олімпіади займає один день. Потім затверджують англійську версію тексту, а з неї роблять переклади на інші офіційні мови — іспанську, німецьку, російську та французьку. Кожен учасник отримує умови задач на своїй рідній мові та на одній з офіційних мов, тому після затвердження 5 офіційних перекладів керівники команд готують переклади і на свої національні мови.

Паралельно керівники команд разом з помічниками шукають альтернативні розв'язки задач. На основі розв'язків, наведених в Short List, та знайдених альтернативних роз'язків, задачний комітет та координатори формують схему оцінювання. Звичайно, за повний розв'язок учень отримує усі 7 балів, навіть якщо розв'язок був невідомий перевіряючим. Але якщо задача розв'язана не повністю, але учень має деякі часткові просування, він отримує бали відповідно до схеми оцінювання. Ця схема затверджується ще до початку турів. Якщо частковий розв'язок школяра не вкладається у відомі перевіряючим схеми, учень отримує за нього низький бал. Зрозуміло, таке рішення в дечому не справедливе. Кожного року виникають суперечки з приводу недооцінених робіт. Але оцінити іншим чином у стислий час майже 600 робіт, написаних 60 різними мовами, майже неможливо. Тому керівники з помічниками докладають максимум зусиль для пошуку альтернативних розв'язань задач. Варто відмітити, що єдиний новий розв'язок найскладнішої задачі цьогорічної олімпіади був знайдений спільно Антоном Меллітом (Україна) та Іллєю Богдановим (Росія).

Під час написання олімпіади на протязі перших 30 хвилин учні можуть задавати питання. Відповіді на питання узгоджують на засіданні журі і пересилають учасникам. На жаль, ця процедура досить довга, особливо якщо питань багато. Часто учень отримує відповідь на своє питання лише через 20–30 хвилин. Такий великий час можна віднести до недоліків організації олімпіади, але це необхідний, хоча і прикрий, наслідок можливості школярів писати роботу рідною мовою.

Після закінчення чотирьох з половиною годин, відведених учням на розв'язування задач, учасники йдуть відпочивати, а члени оргкомітету знімають копії з усіх робіт. Оригінали робіт відвозять науковим керівникам, копії — координаторам. Керівники команд разом з помічниками розбираються у розв'язках учнів своєї країни. Якщо наведений розв'язок якоїсь задачі не повний, вони докладають усіх зусиль, аби показати, що наявна частина заслуговує на максимально можливий бал відповідно до схеми оцінювання. Після двох турів олімпіади журі переїздить до того ж міста, де проживають учні. У разі необхідності, керівники з'ясовують незрозумілі моменти розв'язків разом зі школярами.

Далі починається процес координації, тобто узгодження балів. Координація по кожній з шести задач проходить відповідно до розкладу. Керівники команд, за необхідності, перекладають координаторам частини розв'язків школярів своєї країни та пояснюють, яким частинам схеми оцінювання відповідає написане. Варто відмітити, що команда координаторів працює дуже професійно і отримати бал "на порожньому місці" майже не можливо, хоча дрібні помилки учнів (в арифметиці або при переписуванні обчислень з чернетки), звісно, пробачають. По закінченню координації задачі підписується протокол і отримані бали оприлюднюються. Однак, аби ускладнити підрахунок меж золотих, срібних та бронзових медалей до завершення процесу координації, у кожного учня бали по одній з 6 задач тримаються у таємниці. Якщо ж узгодити бал керівнику команди з координаторами не вдається навіть після втручання старшого координатора, проблемна робота може бути винесена на заключне засідання журі, де остаточний бал буде визначено голосуванням. На цьому ж заключному засіданні визначаються межі медалей. Золоту медаль отримує приблизно 1/12 частина від загальної кількості учасників, срібну — 1/6, бронзову — 1/4.

Наводимо завдання Міжнародної математичної олімпіади 2009 року з розв'язаннями.

Умови задач 50-ої Міжнародної математичної олімпіади (в дужках вказано країну, що запропонувала задачу)

1. (*Австралія*) Дано натуральне число n та попарно різні натуральні числа $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ з множини $\{1, \ldots, n\}$ такі, що для кожного $i = 1, \ldots, k-1$ число $a_i(a_{i+1}-1)$ ділиться на n. Доведіть, що число $a_k(a_1 - 1)$ не ділиться на n.

2. (*Росія*) Точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Нехай P та Q — внутрішні точки сторін CA та AB відповідно. Точки K, L та M — середини відрізків BP, CQ та PQ відповідно, а Γ — це коло, що проходить через точки K, L та M. Відомо, що пряма PQ дотикається до кола Γ. Доведіть, що $OP = OQ$.

3. (*США*) Дано строго зростаючу послідовність натуральних чисел $S_1, S_2, S_3, \ldots$ таку, що кожна з двох послідовностей

$$S_{S_1},\ S_{S_2},\ S_{S_3},\ \ldots \qquad \text{та} \qquad S_{S_1+1},\ S_{S_2+1},\ S_{S_3+1},\ \ldots$$

є арифметичною прогресією. Доведіть, що послідовність $S_1, S_2, S_3, \ldots$ теж є арифметичною прогресією.

4. (*Бельгія*) Дано трикутник ABC, в якому $AB = AC$. Бісектриси кутів CAB та ABC перетинають сторони BC та CA у точках D та E відповідно. Позначимо K центр кола, вписаного в трикутник ADC. Припустимо, що $\angle BEK = 45°$. Знайдіть усі можливі значення кута BAC.

5. (*Франція*) Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (тобто функції, які визначені на множині усіх натуральних чисел та приймають натуральні значення) такі, що для будь-яких натуральних чисел a та b існує невироджений трикутник, довжини сторін якого дорівнюють трьом числам

$$a,\ f(b) \quad \text{та} \quad f(b+f(a)-1).$$

6. (*Росія*) Дані попарно різні натуральні числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, а також множина M, яка складається з $n-1$ натурального числа, але не містить число

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Коник має зробити n стрибків праворуч вздовж числової прямої, починаючи з точки з координатою 0. При цьому довжини його стрибків мають дорівнювати числам $a_1, a_2, \dots, a_n$, узятим у деякому порядку. Доведіть, що цей порядок можна вибрати таким чином, щоб коник жодного разу не приземлився у точці, яка має координату з множини M.

Розв'язання задач

1. *Розв'язання 1.* Припустимо супротивне: $a_k(a_1-1)\,\vdots\,n$. Для спрощення записів покладемо $a_{k+1}=a_1$. Оскільки $a_i(a_{i+1}-1)$ ділиться на n, то для усіх i від 1 до k маємо $a_i \equiv a_i a_{i+1} (\mathrm{mod}\, n)$. Таким чином, $a_1 \equiv a_1a_2 \equiv a_1a_2a_3 \equiv \dots \equiv a_1a_2\dots a_k (\mathrm{mod}\, n)$. Аналогічно для кожного $1 \le i \le k$ маємо $a_i \equiv a_1a_2\dots a_k (\mathrm{mod}\, n)$. Звідси випливає, що всі a_i дають однакову остачу при діленні на n. Враховуючи, що $1 \le a_i \le n$, маємо $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$, що суперечить умові.

Розв'язання 2. Як і в першому розв'язку, доведемо твердження від супротивного. Зафіксуємо довільне $1 \le i \le k$. Нехай НСД$(a_i, n) = d$, НСД$(a_{i+1}, n) = e$. Тоді з умови $a_i(a_{i+1}-1)\,\vdots\,n$ маємо $a_ia_{i+1} - a_i = ln$, де l — деяке ціле число. Отже, $a_i = a_ia_{i+1} - ln\,\vdots\,e$, звідки $d\,\vdots\,e$. Аналогічно отримуємо ланцюжок подільностей

$$\text{НСД}(a_1,n)\,\vdots\,\text{НСД}(a_2,n)\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,\text{НСД}(a_k,n)\,\vdots\,\text{НСД}(a_1,n).$$

Звідси випливає, що НСД$(a_1,n) =$ НСД$(a_2,n) = \ldots =$ НСД$(a_k,n) = t$, де t — деякий дільник числа n.

Нехай $n = t\cdot s$. При кожному $1 \le i \le k$ число $a_i(a_{i+1}-1)$ кратне n, а оскільки $t =$ НСД(a_i, n), то $(a_{i+1}-1)\,\vdots\,s$. Числа a_{i+1} та $a_{i+1}-1$ взаємно прості, тому і їх дільники t та s взаємно прості. За Китайською теоремою про остачі система порівнянь

$$\begin{cases} a_{i+1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, t), \\ a_{i+1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, s) \end{cases}$$

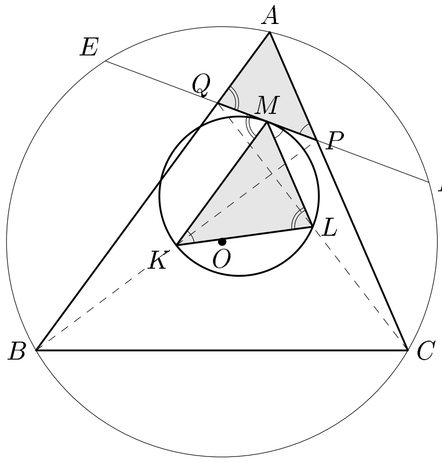
має єдиний розв'язок за модулем $t\cdot s = n$. Але це означає, що усі числа a_i рівні, суперечність.

2. Оскільки LM — середня лінія $\triangle CQP$, то $CA \parallel LM$ та $\angle LMP = \angle QPA$. Пряма PQ дотикається до кола Γ в точці M, тому $\angle LMP = \angle LKM$, тобто $\angle QPA = \angle LKM$. Аналогічно з $AB \parallel MK$ отримуємо, що $\angle PQA = \angle KLM$. Отже, трикутники APQ та MKL подібні, звідки

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{QB/2}{PC/2} = \frac{QB}{PC},$$

або

$$AP \cdot PC = AQ \cdot QB. \tag{1}$$



Продовжимо відрізок PQ до перетину з описаним колом $\triangle ABC$ у точках E та F. Двічі скористаємося теоремою про хорди. Для хорд EF та AC маємо $EP \cdot PF = AP \cdot PC$, для хорд EF та AB маємо $EQ \cdot QF = AQ \cdot QB$. Завдяки (1) отримуємо $EQ \cdot QF = EP \cdot PF$, тобто $EQ \cdot (EF - EQ) = PF \cdot (EF - PF)$. З останньої рівності випливає, що $EQ = PF$, тобто серединні перпендикуляри до відрізків EF та PQ співпадають. Але серединний перпендикуляр до відрізка EF проходить через центр описаного навколо $\triangle ABC$ кола, тобто точку O. Тому $OP = OQ$.

Зауваження 1. Читачі, знайомі з поняттям степеня точки відносно кола, можуть завершити доведення після отримання рівності (1) таким чином: (1) означає рівність степенів точок P та Q відносно описаного кола $\triangle ABC$, тому $OP = OQ$.

Зауваження 2. Починаючи з (1), можна закінчити розв'язок задачі використанням теореми Піфагора. Нехай точки C' та B' — середини сторін AB та AC відповідно. Позначимо $AQ = x$, $AC' = c$, $AP = y$, $AB' = b$. Тоді $C'Q = |c - x|$, $B'P = |b - y|$, $QB = 2b - x$ і $PC = 2c - y$. Послідовно знаходимо

$$\begin{aligned} OP^2 - OQ^2 &= OB'^2 + B'P^2 - OC'^2 - C'Q^2 = \\ &= (OA^2 - AB'^2) + B'P^2 - (OA^2 - AC'^2) - C'Q^2 = \\ &= (AC'^2 - C'Q^2) - (AB'^2 - B'P^2) = c^2 - (c-x)^2 - \big(b^2 - (b-y)^2\big) = \\ &= x(2c - x) - y(2b - y) = AQ \cdot QB - AP \cdot PC = 0 \end{aligned}$$

внаслідок (1).

3. *Розв'язання 1.* За умовою задачі

$$S_{S_n} = a + bn,\ S_{S_n+1} = c + dn. \tag{2}$$

Оскільки послідовність $S_1, S_2, \ldots$ строго зростає, то

$$S_{S_n} < S_{S_n+1} \le S_{S_{n+1}},$$

звідки $a + bn < c + dn \le a + (n+1)b$, або $0 < c - a + n(d - b) \le b$ для усіх $n \ge 1$. З цих нерівностей випливає, що $b = d$ та $0 < c - a \le b$.

Введемо позначення $S(n) = S_n$ аби уникнути використання потрійних індексів. Завдяки (2) вираз $S(S(S(n)))$ можна перетворити двома різними способами і отримати, що $S_{a+bn} = S_{S(S(n))} = S(S(S_n)) = a + bS_n$. Аналогічно

$$S_{a+bn+1} = S_{S(S(n))+1} = S\big(S(S_n) + 1\big) = c + bS_n,$$
$$S_{c+bn} = S_{S(S(n)+1)} = S\big(S(S_n + 1)\big) = a + b + bS_n.$$

Розглянемо значення N, при якому різниця $S_{N+1} - S_N$ набуває найменше можливе значення m (таке N існує, бо усі різниці $S_{n+1} - S_n$ — натуральні числа). Тоді

$$S_{a+b(N+1)} - S_{a+bN} = b(S_{N+1} - S_N) = bm. \tag{3}$$

З іншого боку, для кожного k, яке задовольняє нерівність $a + bN \leq k < a + b(N + 1)$, маємо $S_{k+1} - S_k \geq m$. Таких значень k рівно b, тому

$$S_{a+b(N+1)} - S_{a+bN} = \big(S_{a+b(N+1)} - S_{a+b(N+1)-1}\big) + \\ + \big(S_{a+b(N+1)-1} - S_{a+b(N+1)-2}\big) + \ldots + \big(S_{a+bN+1} - S_{a+bN}\big) \geq mb.$$

Враховуючи (3), отримаємо, що для кожного k такого, що $a + bN \leq k < a + b(N + 1)$, має виконуватись рівність $S_{k+1} - S_k = m$. Зокрема

$$c - a = S_{a+bN+1} - S_{a+bN} = m$$

та $b = S_{c+bN} - S_{a+bN} = (c - a)m$, оскільки $c + bN \leq a + b(N + 1)$. Отже, $b = m^2$.

Для кожного $n > 1$ маємо

$$m^2(n-1) = b(n-1) = S_{S_n} - S_{S_1} = \\ = \big(S_{S_n} - S_{S_n-1}\big) + \ldots + \big(S_{S_1+1} - S_{S_1}\big) \geq m(S_n - S_1) = \\ = m\big((S_n - S_{n-1}) + \ldots + (S_2 - S_1)\big) \geq m^2(n-1).$$

Отже, всі нерівності мають перетворитись на рівності. Зокрема $S_n - S_1 = m(n - 1)$, а це означає, що S_n — арифметична прогресія.

Розв'язання 2. Позначимо D різницю арифметичної прогресії $S_{S_1}, S_{S_2}, \ldots$ Покладемо $d_n = S_{n+1} - S_n,\ n \in \mathbb{N}$. Доведемо, що усі числа d_n рівні між собою. Спочатку покажемо, що усі числа d_n обмежені деякою сталою. Справді, за умовою $d_n \geq 1$ для усіх n. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = S_{n+1} - S_n \leq d_{S_n} + d_{S_n+1} + \ldots + d_{S_{n+1}-1} = S_{S_{n+1}} - S_{S_n} = D.$$

З обмеженості послідовності $\{d_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ випливає існування чисел

$$m = \min\{d_n : n = 1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{та} \quad M = \max\{d_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Достатньо довести, що $m = M$. Припустимо, що $m < M$. Існує такий індекс n, що $d_n = m$. Тоді

$$D = S_{S_{n+1}} - S_{S_n} = S_{S_n+m} - S_{S_n} = d_{S_n} + d_{S_n+1} + \ldots + d_{S_n+m-1} \leq mM, \tag{4}$$

причому рівність має місце тоді і лише тоді, коли усі доданки в сумі дорівнюють M. Тепер розглянемо індекс n такий, що $d_n = M$. Аналогічно отримаємо

$$D = S_{S_{n+1}} - S_{S_n} = S_{S_n+M} - S_{S_n} = d_{S_n} + d_{S_n+1} + \ldots + d_{S_n+M-1} \geq mM, \qquad (5)$$

і рівність досягається тоді і лише тоді, коли усі доданки в сумі рівні m. З (4) та (5) випливає, що $D = mM$ та

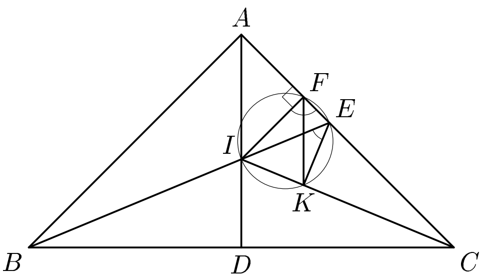
$$d_{S_n} = d_{S_n+1} = \ldots = d_{S_{n+1}-1} = M, \quad \text{якщо} \quad d_n = M,$$
$$d_{S_n} = d_{S_n+1} = \ldots = d_{S_{n+1}-1} = m, \quad \text{якщо} \quad d_n = m.$$

Таким чином, з $d_n = m$ випливає, що $d_{S_n} = M$, і навпаки, з $d_n = M$ випливає, що $d_{S_n} = m$. Помітимо, що $S_n \geq S_1 + (n-1) \geq n$ для усіх n і, крім того, $S_n > n$, якщо $d_n = M$ або якщо $d_n = m$ (бо у противному випадку ми б мали $m = d_n = d_{S_n} = M$, що суперечить припущенню). Нехай $d_{n_1} = m$. Покладемо $n_{k+1} = S_{n_k}$, $k \geq 1$. Тоді $n_1, n_2, \ldots$ — така строго зростаюча послідовність натуральних чисел, що

$$d_{S_{n_1}} = M,\ d_{S_{n_2}} = m,\ d_{S_{n_3}} = M,\ d_{S_{n_4}} = m, \ldots$$

Але послідовність $d_{S_1}, d_{S_2}, d_{S_3}, \ldots$ — це послідовність різниць між відповідними членами двох арифметичних прогресій $S_{S_1+1}, S_{S_2+1}, \ldots$ та $S_{S_1}, S_{S_2}, \ldots$, а отже знову арифметична прогресія. Отримуємо суперечність, бо з одного боку послідовність $d_{S_{n_1}}$, $d_{S_{n_2}}$, $d_{S_{n_3}}$, $\ldots$ є підпослідовністю арифметичної прогресії $d_{S_1}, d_{S_2}, d_{S_3}, \ldots$, а тому є монотонною, а з іншого боку послідовність $M, m, M, m, \ldots$ не є монотонною, бо за припущенням $m < M$. Отже, насправді $M = m$.

4. *Відповідь:* $60°$, $90°$.



Позначимо I точку перетину бісектрис BE та AD. Тоді точка K лежить на прямій CI. Нехай точка F — основа перпендикуляра, опущеного з точки I на AC. Прямокутні трикутники ICD та ICF мають спільну гіпотенузу та рівні кути $\angle ICD$ та $\angle ICF$, отже вони рівні і симетричні відносно прямої CI. За умовою DK — бісектриса $\angle IDC$. З симетрії випливає, що FK — бісектриса $\angle IFC$. Отже, $\angle IFK = \angle KFC = 45° = \angle BEK = \angle IEK$. Тому точки I, F, E, K лежать на одному колі. Можливі три варіанти взаємного розташування точок E та F: точка F або лежить між A та E, або співпадає з E, або лежить між E та C. Розглянемо ці випадки окремо.

1) Точка F лежить між точками A та E. Оскільки точки I, E, F, K лежать на одному колі, то $\angle FEI = \angle FKI$, а тому

$$\angle BEC = \angle IEC = 180° - \angle FEI = 180° - \angle FKI = \angle FKC. \qquad (6)$$

Нехай $\angle IBC = \alpha$. Тоді з $\triangle BEC$ маємо $\angle BEC = 180° - 3\alpha$. З трикутника FKC, у якому $\angle KFC = 45°$, $\angle KCF = \alpha$, знаходимо $\angle FKC = 180° - 45° - \alpha$. З рівності (6) маємо $180° - 3\alpha = 180° - 45° - \alpha$, а тому $2\alpha = 45°$, $\angle BAC = 180° - 4\alpha = 90°$.

2) $E = F$. Тоді BE є одночасно бісектрисою і висотою, а отже $AB = BC$. З урахуванням умови задачі $\triangle ABC$ рівносторонній і $\angle BAC = 60°$.
3) Точка F лежить між точками E та C. В такому випадку з вписаного чотирикутника $IEFK$ маємо $\angle FKC = 180° - \angle FKI = \angle FEI$ — гострий кут. Але у трикутнику FKC маємо $\angle KFC = 45°$, $\angle FCK = \frac{1}{2}\angle ACB < 45°$, тобто $\angle FKC$ має бути тупим. Отримана суперечність показує, що цей випадок неможливий.

Залишається перевірити, що обидва значення кута ($60°$ та $90°$) справді досягаються. Для цього розглянемо рівносторонній трикутник та рівнобедрений трикутник ABC з $\angle BAC = 90°$. Для рівностороннього трикутника точка F співпадає з E, тому $\angle BEK = \angle IFK = 45°$. Якщо $\triangle ABC$ — рівнобедрений з $\angle BAC = 90°$, то точка F лежить між точками A та E і неважко обчислити, що $\angle BEC = 180° - 45° - 22{,}5°$, $\angle FKC = 180° - 45° - 22{,}5°$. Аналогічно до (6) отримуємо $\angle FEI = \angle FKI$, тобто точки I, F, E, K лежать на одному колі, звідки $\angle BEK = \angle IFK = 45°$.
Зауваження 1. Можна розв'язати цю задачу за допомогою тригонометрії. Для цього треба записати теорему синусів для трикутників ICE, IKE, IDK, IDC і сторін IC, IE, IK, ID цих трикутників. Якщо перемножити отримані рівності та виразити всі потрібні кути, наприклад, через кут $\angle IBC := \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то отримаємо рівняння

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha)}{\sin\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)} \cdot \frac{\sin\alpha}{1} = 1, \text{ або } \sin 3\alpha \cdot \sin(\tfrac{\pi}{4} + 2\alpha) = \sin(\tfrac{\pi}{4} + \alpha).$$

Оскільки $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) =$

$$= \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{4}) = \cos\bigl(3\alpha - (2\alpha + \tfrac{\pi}{4})\bigr) = \cos 3\alpha \cdot \cos(\tfrac{\pi}{4} + 2\alpha) + \sin 3\alpha \cdot \sin(\tfrac{\pi}{4} + 2\alpha),$$

то $\cos 3\alpha \cdot \cos(\frac{\pi}{4} + 2\alpha) = 0$, звідки вже неважко знайти кут α. Залишаємо необхідні обчислення читачеві.
Зауваження 2. Задачу можна розв'язувати і методом координат. Однак якщо спочатку задати координати вершин трикутника, а потім виражати через них координати всіх потрібних точок, то виникають технічні складнощі. В цій задачі краще працює нестандартний вибір системи координат. Якщо покласти координати точок B, C, I рівними $(-1, 0)$, $(1, 0)$ та $(0, a)$ відповідно, то $\operatorname{tg}\angle IBC = a$, причому $\angle IBC < 45°$, звідки $0 < a < 1$. Далі неважко знайти координати точок

$$A\bigl(0, \tfrac{2a}{1-a^2}\bigr), \quad E\bigl(\tfrac{a^2+1}{3-a^2}, \tfrac{4a}{3-a^2}\bigr), \quad K\bigl(\tfrac{a}{1+a}, \tfrac{a}{1+a}\bigr)$$

і отримати рівняння $3a^4 + 6a^3 - 4a^2 - 2a + 1 = 0$, ліва частина якого розкладається на множники: $(3a^2 - 1)(a^2 + 2a - 1) = 0$. Оскільки $a > 0$, то $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ або $a = \sqrt{2} - 1$. Відповідно $\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{2a}{1-a^2}$ дорівнює $\sqrt{3}$ або 1, тобто $\angle ABC = 60°$ або $\angle ABC = 45°$.
5. *Відповідь:* $f(n) = n$.

Крок 1. Покажемо, що $f(1) = 1$. Припустимо, що це не так і $f(1) = 1 + m > 1$. Підставимо у рівняння $a = 1$ та довільне b. Тоді має існувати невироджений трикутник з довжинами сторін 1, $f(b)$ та $f(b+m)$, тобто $f(b) < 1 + f(b+m)$ та $f(b+m) < 1 + f(b)$, звідки при кожному натуральному b отримуємо $f(b) = f(b+m)$. Отже, функція $f(a)$

є періодичною з періодом m і, як наслідок, обмеженою. Нехай тепер B — таке число, що $f(a) \le B$ для усіх натуральних a. Підставимо в умову $a = 2B$ і довільне b. Тоді $a = 2B \ge f(b) + f(b + f(a) - 1)$, суперечність з нерівністю трикутника. Отже, $f(1) = 1$.

Крок 2. Підставимо в умову $b = 1$. Тоді існує невироджений трикутник зі сторонами a, $f(1) = 1$ та $f(1 + f(a) - 1) = f(f(a))$. З нерівностей $a < 1 + f(f(a))$ та $f(f(a)) < a + 1$ випливає, що для усіх натуральних a виконується рівність $f(f(a)) = a$.

Крок 3. Припустимо, що $f(2) = k$. Зауважимо, що з $f(f(a)) = a$ випливає ін'єктивність функції f, тобто $f(x) \ne f(y)$ для будь-яких натуральних чисел $x \ne y$. Отже, $k \ge 2$ і, крім того, $f(k) = 2$. Доведемо індукцією за $n \ge 1$, що

$$f\big((n-1)k - (n-2)\big) = n. \tag{7}$$

База індукції: при $n = 1$ рівність (7)набуває вигляду $f(1) = 1$, а при $n = 2$ — вигляду $f(2) = k$. Нехай рівність (7) має місце для усіх чисел $1 \le i \le n$. Завдяки тотожності $f(f(a)) = a$ також маємо $f(n) = (n-1)k - (n-2)$. Підставимо в умову числа $a = n$, $b = k$. Отримаємо

$$n + 2 = n + f(k) > f\big(k + f(n) - 1\big) = f\big(k + (n-1)k - (n-2) - 1\big) = f\big(nk - (n-1)\big).$$

Оскільки $nk - (n-1) > (i-1)k - (i-2)$ при кожному $1 \le i \le n$, то $f\big(nk - (n-1)\big)$ не може дорівнювати жодному з чисел $1, 2, \ldots, n$. Таким чином, $f\big(kn - (n-1)\big) = n + 1$. Індукційний перехід доведено.

Підставимо тепер у (7) $n = k$. Отримаємо

$$k = f\big(k(k-1) - (k-2)\big) = f(k^2 - 2k + 2).$$

Але $k = f(2)$ і з ін'єктивності функції f випливає, що $2 = k^2 - 2k + 2$, тобто $k = 2$. Крім того, ми довели, що $f(n) = k(n-1) - (n-2) = 2(n-1) - (n-2) = n$, $n \ge 1$, а отже єдиний можливий розв'язок — це функція $f(n) \equiv n$.

Крок 4. Перевіримо, що функція $f(n) \equiv n$ задовольняє умову. Для довільних натуральних чисел a та b числа a, $b = f(b)$ та $a + b - 1 = f(b + f(a) - 1)$ є довжинами сторін невиродженого трикутника, тобто функція $f(n) \equiv n$ справді є розв'язком.

6. *(Антон Меллiт)* Будемо позначати шлях коника, який складається з послідовних стрибків $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, набором індексів $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Доведемо твердження задачі індукцією за кількістю стрибків n. База індукції ($n = 1$) очевидна. Припустимо, що твердження задачі виконується для довільної кількості стрибків, меншої за n. Можна вважати, що $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Нехай $d = \min M$, тобто d — це найперша заборонена точка. Розглянемо два випадки: або коник може за один стрибок опинитися далі, ніж d, або ні.

1) Коник може стрибнути далі, ніж d, тобто $d < a_n$.

Якщо $a_n \notin M$, то коник спочатку стрибає на a_n вправо. При цьому він перестрибне принаймні через 1 точку з M (точку d), і у отриманій ситуації можна скористатися припущенням індукції: маємо множину $M \backslash \{d\}$ з $n-2$ елементів, $n-1$ стрибок $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, і треба потрапити в точку на відстані $s - a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ вправо.

Тепер припустимо, що $a_n \in M$. Покажемо, що можна знайти таку пару стрибків коника, що він перестрибне принаймні через 2 точки з M. Для цього розглянемо n множин: $\{a_n\}$, $\{a_1, a_1 + a_n\}$, $\{a_2, a_2 + a_n\}$, $\ldots$, $\{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$. Ці множини не мають спільних елементів, бо $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_{n-1} + a_n$. Оскільки множина M містить лише $n-1$ елемент, то одна з наведених n множин не перетинається з M. Нехай це $\{a_i, a_i + a_n\}$. Тоді на відрізку від $a_i + a_n$ до s лежить щонайбільше $n-3$ точок з M, бо принаймні 2 точки з M (а саме d та a_n) належать інтервалу $(0, a_i + a_n)$. Отже, коник може зробити 2 стрибки (спочатку a_i, потім a_n), а далі працює припущення індукції — маємо $n-2$ стрибки та щонайбільше $n-3$ заборонених точок.

2) Коник не може стрибнути далі, ніж d, тобто $d \geq a_n$.

Нехай $M' = M \backslash \{d\}$. За припущенням індукції, коник може простривати з точки a_n в s за допомогою $n-1$ стрибка $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ і не потрапити в жодну точку з M'. Нехай $(i_1, \ldots, i_{n-1})$ — відповідна послідовність індексів. Якщо цей маршрут не потрапляє у точку d (зокрема, при цьому має бути $a_n \neq d$), то ми знайшли шукану послідовність стрибків коника.

Отже, припустимо, що маршрут потрапив у точку d (зауважимо, що це єдина точка з M, у яку коник може потрапити), і ми маємо $d = a_n + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$ для деякого $0 \leq k < n-1$. Модифікуємо цей маршрут — поставимо стрибок a_n одразу після стрибка a_{k+1}, тобто розглянемо маршрут з послідовністю індексів $(i_1, \ldots, i_{k+1}, n, i_{k+2}, \ldots, i_{n-1})$. Оскільки $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_{k+1}} < a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} + a_n = d$ і d — найменший елемент з M, то коник не може потрапити у точку з M на жодному з перших $k+1$ стрибків. Але на стрибках $k+2, \ldots, n$ коник потрапляє у ті ж самі точки, що й до модифікації маршруту! (Причому точку d він перестрибнув, бо $a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k+1}} + a_n > d$). Отже, і під час цих стрибків коник не потрапить у точки множини M, тобто ми знайшли потрібний маршрут.

Наприкінці статті привітаємо всіх наших учасників з нагородами 50-ої Міжнародної математичної олімпіади, висловимо щиру вдячність усім, хто брав активну участь у підготовці учнів до цього відповідального змагання. Наступна, 51-ша Міжнародна математична олімпіада відбудеться в липні 2010 року у місті Астана, Казахстан. Бажаємо всім школярам, які мріють про участь у математичних змаганнях, натхнення й снаги для наполегливої підготовки, багатьох цікавих задач і великих здобутків.