XVI Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка

О. Г. Кукуш, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський

З 28 жовтня по 2 листопада у м. Сімферополь проходив XVI турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, в якому взяли участь 24 команди школярів з різних куточків України. Виконував обов'язки голови журі ТЮМу В.М. Радченко, професор КНУ імені Тараса Шевченка, експертом-консультантом турніру був В.А. Ясінський, доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, заступниками голови журі — О.Г. Кукуш, професор КНУ імені Тараса Шевченка; І.М. Мітельман, заступник директора Рішельєвського ліцею при Одеському національному університеті імені І.М. Мечникова, доцент; М.А. Муратов, професор Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського.

За підсумками змагань ТЮМу дипломами переможців I–III ступенів було нагороджено 12 команд.

Дипломи I ступеня:

"ДОЛІФМП" Дніпропетровської області,
"ХФМЛ №27" Харківської області.

Дипломи II ступеня:

"Дніпроліт" Дніпропетровської області,
"Альфа" Івано-Франківської області,
"Ліцей «Ерудит»" Донецької області,
"Бобр" Вінницької області;

Дипломи III ступеня:

"Волинь" Волинської області,
"Сімферополь – Грифони" АРК,
"Суми-Дельта" Сумської області,
"Геліос" Чернівецької області,
"Флібустьєри" Миколаївської області,
"Тривед" Миколаївської області.

Учасникам були вручені дипломи і в окремих номінаціях. За перемогу в особистій першості були нагороджені Олексій Думбай (команда "Ліцей «Ерудит»"), Поліна Святокум (команда "ХФМЛ №27"), Віктор Мельников (команда "Тривед"). Диплом та відзнаку пам'яті професора В.М. Лейфури за абсолютну перемогу в особистій першості вручено Владиславу Тарасенку, учаснику команди "Дніпроліт".

Особливі призи від керівництва АРК отримали:

Мудрієвський Петро, учасник команди "Тривед" Миколаївської області, наймолодший математик турніру — за найкращий результат серед учнів 9-х класів,

Титов Олександр, учасник команди "Симферополь – Грифони" — диплом та *особливий приз пам'яті* В.М. Касаткіна за найкращий виступ серед учасників команд Автономної Республіки Крим,

Звягельский Роман, учасник команди "Симферополь – Грифони" АРК — як найкращий капітан команд АРК.

У рамках турніру серед його учасників було проведено *комплексну олімпіаду "Лімон"* з математики, інформатики й англійської мови — *авторський проект вчителів математики Міжнародної школи гімназії м. Сімферополь.*

Дипломантами олімпіади "Лімон" стали:

Черенков Дмитро (Луганська спеціалізована школа I–III ст. №1) — диплом I ступеня,

Сергієнко Валерія (ОСШ II–III ст. "Обдарованість" Харківської обласної ради) — диплом II ступеня,

Юзюк Олександр (Луцька гімназія №21 імені Михайла Кравчука) — диплом III ступеня.

Завдання фінального математичного бою

1. Розв'яжіть рівняння $[x]^{2013} + \{x\}^{2013} = x^{2013}$ (тут $[x]$ — ціла частина x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x, $\{x\} = x - [x]$ — дробова частина x).

2. Знайдіть усі такі п'ятірки простих чисел p, q, r, s і t, для яких число

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + t^2}$$

також є простим.

3. Дано трикутник ABC. Побудуйте на його сторонах AB і AC такі точки X і Y відповідно, що $BX + CY = BC$ і навколо чотирикутника $BXYC$ можна описати коло.

4. Знайдіть найбільше та найменше можливі значення виразу $\dfrac{x+y+z}{3} + \dfrac{2013}{\sqrt[3]{xyz}}$, якщо $x, y, z \in [1, 2013]$.

5. Знайдіть усі такі функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x + 2^y) = f(x) + 2^{f(y)}$.

6. Знайдіть найменше натуральне число n, для якого існує $a > 0$ таке, що фігура, яка складається з шести квадратів зі стороною a, може бути розташована в прямокутнику розміру $n \times (n + 7)$ так, як зображено на рис. 1.

7. Вписане коло ω трикутника ABC дотикається до його сторони BC у точці D. Бісектриса кута ADB вдруге перетинає коло ω у точці N, а бісектриса

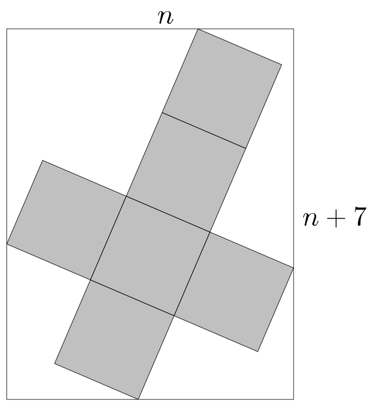

Рис. 1

кута ADC вдруге перетинає це коло у точці M. Доведіть, що прямі BM, CN та AD перетинаються в одній точці.

Розв'язання та вказівки

1. Очевидно, що рівняння задовольняють усі $x \in \mathbb{Z}$ (для них $[x]=x$, $\{x\}=0$) та усі $x \in [0,1)$ (для них $\{x\}=x$, $[x]=0$). Покажемо, що інших коренів немає. Справді, нехай $x>1$, $x \notin \mathbb{Z}$. Тоді $0<[x]<x$, $0<\{x\}<x$, звідки

$$[x]^{2013}+\{x\}^{2013}<[x]\cdot x^{2012}+\{x\}\cdot x^{2012}=x^{2013}.$$

Якщо ж $x<0$, $x \notin \mathbb{Z}$, то перепишемо рівняння у вигляді $(-x)^{2013}+\{x\}^{2013}=(-[x])^{2013}$ та зауважимо, що $0<-x<-[x]$, $0<\{x\}<-[x]$, звідки

$$(-x)^{2013}+\{x\}^{2013}<(-x)\cdot(-[x])^{2012}+\{x\}\cdot(-[x])^{2012}=(-[x])^{2013}.$$

Відповідь: $x \in \mathbb{Z} \cup (0,1)$.

2. Нехай p,q,r,s,t — шукана п'ятірка простих чисел. Тоді

$$p^2+q^2+r^2+s^2+t^2=n^2, \qquad (*)$$

де n є простим. Звідси $n \geq \sqrt{5\cdot 2^2}$, а отже $n \geq 5$, зокрема n є непарним.

Ліва частина рівності $(*)$ є непарною, якщо вона містить непарну кількість непарних доданків. Зауважимо, що квадрат будь-якого непарного числа дає остачу 1 при діленні на 8, а квадрат єдиного парного простого числа 2 — остачу 4. Тому права частина рівності $(*)$ дає остачу 1 при діленні на 8, а ліва — остачу 1, 3 або 5, якщо серед чисел p,q,r,s,t одне, три або п'ять непарних відповідно. Таким чином, серед чисел p,q,r,s,t має міститися лише одне непарне та без обмеження загальності $q=r=s=t=2$. Тоді $n^2=p^2+16$. Просте число $n \geq 5$ не ділиться на 3, отже n^2 дає остачу 1 при діленні на 3, а $p^2=n^2-16$ ділиться на 3. Але p — просте число, тому $p=3$. Залишилося зробити перевірку: $3^2+2^2+2^2+2^2+2^2=25=5^2$ — квадрат простого числа.

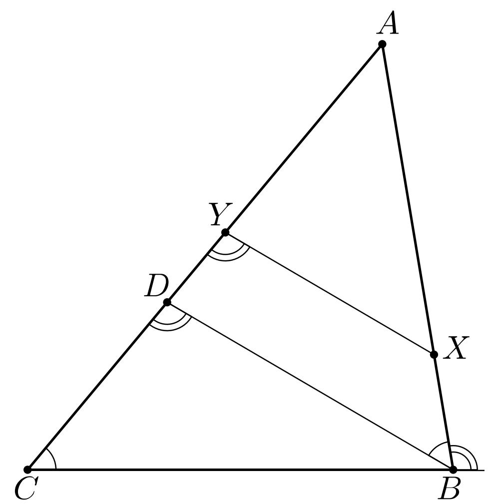

Рис. 2

Відповідь: p, q, r, s, t — довільна перестановка чисел $3, 2, 2, 2, 2$.

3. Якщо $AB = AC$, то вписаний чотирикутник $BXYC$ має рівні кути, а тому це рівнобічна трапеція. Звідси випливає, що на сторонах AB та AC слід відкласти відрізки $BX = CY = \frac{1}{2}BC$. Надалі будемо розглядати випадок $AB \neq AC$. Нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Без обмеження загальності $AB < AC$, відповідно $\beta > \gamma$ (рис. 2).

Нехай X, Y — шукані точки. Відмітимо на стороні AC таку точку D, що $\angle ABD = \gamma < \beta$. Тоді трикутники ABC та ADB подібні за двома кутами, звідки

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \beta.$$

Для вписаного чотирикутника $BXYC$ маємо $\angle XYC = 180^\circ - \beta = \angle BDC$, тому $BD \parallel XY$. Отже, трикутники ABD та AXY подібні. Оскільки

$$AX + AY = AB - BX + AC - CY = AB + AC - BC,$$

то $\frac{AX}{AB} = \frac{AB+AC-BC}{AB+AD}$ та відрізок AX легко побудувати. Далі слід відкласти цей відрізок на стороні AB та провести $XY \parallel BD$.

Побудова можлива за умови, що $AX < AB$, тобто при

$$AB + AC - BC < AB + AD, \quad AC - AD < BC, \quad CD < BC.$$

З трикутника BCD дістаємо, що дана нерівність виконується при $\angle CBD < \angle CDB$, тобто $\beta - \gamma < 180^\circ - \beta$, або $\gamma < \beta < 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

4. Знайдемо найбільше та найменше можливі значення виразу при $x, y, z \in [1, a]$, де $a > 1$ (в умові задачі $a = 2013$).

Двічі використовуючи нерівність Коші, отримуємо

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{a}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \sqrt[3]{xyz} + \frac{a}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2\sqrt{a},$$

причому обидві нерівності перетворюються на рівності за умови, що $x = y = z > 0$ та $\sqrt[3]{xyz} = \dfrac{a}{\sqrt[3]{xyz}}$, тобто при $x = y = z = \sqrt{a} \in [1; a]$. Тому найменше значення виразу дорівнює $2\sqrt{a}$.

Тепер оцінимо вираз зверху. Знову за нерівністю Коші маємо

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{a}{\sqrt[3]{xyz}} \le \frac{x+y+z}{3} + \frac{a}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{3}\big(f(x) + f(y) + f(z)\big) \le \max_{t\in[1,a]} f(t),$$

де $f(t) = t + \dfrac{a}{t}$, причому обидві нерівності перетворюються на рівності за умови, що $x = y = z$ — точка, в якій функція $f(t)$ набуває найбільше на відрізку $[1, a]$ значення. Залишилося знайти це значення. Зауважимо, що $f(1) = f(a) = a + 1$, та перевіримо, що при всіх $t \in (1; a)$ має місце нерівність $f(t) < a + 1$. Справді, після рівносильних перетворень маємо

$$t + \frac{a}{t} < a + 1, \quad t^2 - (a+1)t + a < 0, \quad (t-a)(t-1) < 0.$$

Остання нерівність при $1 < t < a$ є очевидною. Таким чином, найбільше значення виразу дорівнює $a + 1$ та досягається при $x = y = z = 1$ або $x = y = z = a$.

Відповідь: найбільше значення 2014, найменше значення $2\sqrt{2013}$.

5. З умови індукцією за $k \ge 1$ дістаємо, що рівність

$$f(x + k \cdot 2^y) = f(x) + k \cdot 2^{f(y)} \tag{$*$}$$

виконується при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ та $k \in \mathbb{N}$. Зокрема при $k = 2$ звідси дістаємо, що

$$f(x) + 2^{f(y+1)} = f(x + 2^{y+1}) = f(x + 2 \cdot 2^y) = f(x) + 2 \cdot 2^{f(y)} = f(x) + 2^{f(y)+1}.$$

Таким чином,

$$f(y+1) = f(y) + 1 \quad \text{при всіх} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{$**$}$$

При $y = 0$ з вихідного рівняння отримуємо $f(x+1) = f(x) + 2^{f(0)}$. Порівнюючи цю рівність з $(**)$, знаходимо $f(0) = 0$, а тому $(**)$ дозволяє послідовно встановити значення функції f у всіх натуральних та всіх цілих від'ємних точках: $f(n) = n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Тепер при $x = 0$ та $y = -n$, $n \in \mathbb{N}$, з $(*)$ дістанемо, що

$$f\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{k}{2^n} \quad \text{при всіх} \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Далі, функція f зростає, бо для довільних $x_1 < x_2$ при $y = \log_2(x_2 - x_1)$ маємо $f(x_2) = f(x_1 + 2^y) = f(x_1) + 2^{f(y)} > f(x_1)$.

Тепер доведемо, що $f(x) = x$ при всіх $x > 0$. Справді, припустимо, що для деякого $a > 0$ маємо $f(a) > a$. Тоді знайдуться такі $k, n \in \mathbb{N}$, що $f(a) > \frac{k}{2^n} > a$. Це означає, що $\frac{k}{2^n} > a$, але $f(\frac{k}{2^n}) = \frac{k}{2^n} < f(a)$, суперечність, бо функція f зростає. Аналогічно дістаємо суперечність, якщо для деякого $a > 0$ маємо $f(a) < a$.

Нарешті, для довільного $x < 0$ оберемо $k \in \mathbb{N}$ так, що $x + k > 0$. Тоді внаслідок рівності $(**)$ маємо $f(x + k) = f(x) + k = x + k$, а отже $f(x) = x$. Таким чином, $f(x) = x$ при всіх $x \in \mathbb{R}$ та лишається зробити перевірку.

Відповідь: $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Нехай гострий кут α — це кут нахилу прямої FA (рис. 3). Проектуючи

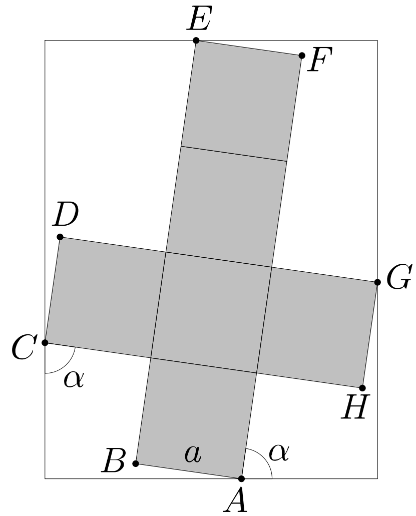

Рис. 3

фігуру на сторони прямокутника, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a(4\sin\alpha + \cos\alpha) = n + 7, \\ a(3\sin\alpha + \cos\alpha) = n. \end{cases}$$

Звідси $\sin\alpha = \dfrac{7}{a}$, $\cos\alpha = \dfrac{n-21}{a} > 0$, тому $n \geq 22$.

Залишилося перевірити, що для $n = 22$ фігуру з шести квадратів зі стороною $a = \sqrt{50}$ можна розташувати в прямокутнику розміру 22×29. Для цього наведемо координати деяких вершин фігури: $A(13;0)$, $B(6;1)$, $C(0;9)$, $D(1;16)$, $E(10;29)$, $F(17;28)$, $G(22;13)$, $H(21;6)$.

Відповідь: $n = 22$.

Зауваження. Якщо вимагати, щоб не тільки по одній вершині фігури належало сторонам прямокутника, але й щоб точка E лежала правіше за точку A, а точка G — нижче за точку C (на рис. 1 це так), то відповіддю буде $n = 24$.

7. Нехай ω дотикається до AC та AB у точках E та F відповідно та вдруге перетинає AD у точці G. Тоді M, N — середини дуг $\smile DMG$, $\smile DNG$, а

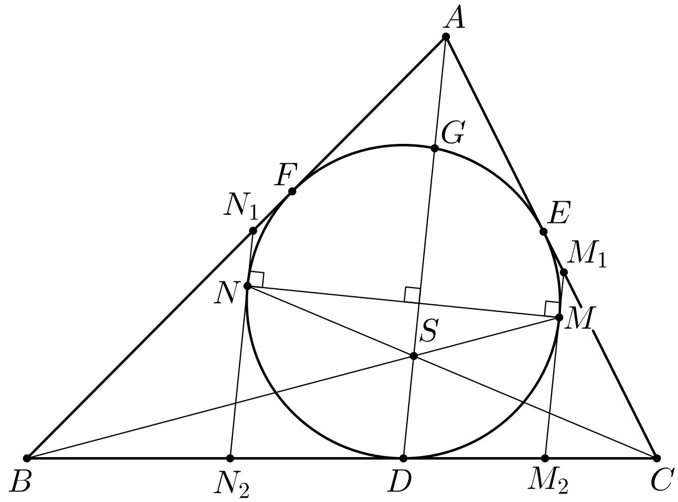

Рис. 4

тому MN — діаметр кола ω, перпендикулярний до AD. Проведемо дотичні M_1M_2 та N_1N_2 до кола ω у точках M та N (рис. 4), тоді прямі M_1M_2, N_1N_2 та AD є перпендикулярними до MN, а отже паралельні між собою.

Покладемо $p_a = p-a$, $p_b = p-b$, $p_c = p-c$, де p — півпериметр трикутника ABC. Тоді $BD = p_b$, $CD = p_c$. Нехай $N_2D = N_2N = x$, $M_2D = M_2M = y$.

Позначимо S та S' точки перетину AD з CN та BM. Доведемо, що $DS = DS'$. Звідси буде випливати, що $S = S'$, тобто прямі AD, CN та BM перетинаються в одній точці. З подібності трикутників NN_2C та SDC, MM_2B та $S'DB$, маємо

$$DS = \frac{p_c x}{p_c + x}, \quad DS' = \frac{p_b y}{p_b + y}.$$

Отже, залишилося довести рівність цих виразів.

Трикутники BAD та BN_1N_2 є подібними, тому їх периметри відносяться як відповідні сторони: $P_{BAD}/P_{BN_1N_2} = BD/BN_1$. Декілька разів використавши рівність дотичних, проведених до кола зі спільної точки, дістанемо

$$\begin{aligned} P_{BN_1N_2} &= BN_1 + N_1N + BN_2 + N_2N = BN_1 + N_1F + BN_2 + N_2D \\ &= NF + ND = 2p_b. \end{aligned}$$

Оскільки $P_{BAD} = p_a + 2p_b + AD$, $BN_1 = p_b - x$, $BD = p_b$, то

$$\frac{p_a + 2p_b + AD}{2p_b} - 1 = \frac{p_b}{p_b - x} - 1, \quad \frac{p_a + AD}{2p_b} = \frac{x}{p_b - x} \quad \text{та} \quad p_a + AD = \frac{2p_b x}{p_b - x}.$$

Аналогічно з подібних трикутників CM_1M_2 та CAD знаходимо $p_a + AD = \dfrac{2p_c y}{p_c - y}$, отже

$$\frac{2p_b x}{p_b - x} = \frac{2p_c y}{p_c - y}, \quad \frac{p_b - x}{p_b x} = \frac{p_c - y}{p_c y}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{p_b} = \frac{1}{y} - \frac{1}{p_c},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{p_c}=\frac{1}{y}+\frac{1}{p_b},\quad \frac{p_c+x}{p_cx}=\frac{p_b+y}{p_by}.$$

Таким чином, $DS = DS'$, що завершує доведення.

Зауваження. Якщо позначити T та T' точки перетину AD з CM та BN, то

$$DT=\frac{p_cy}{p_c-y},\quad DT'=\frac{p_bx}{p_b-x}.$$

Отже, зі встановлених під час розв'язання рівностей випливає, що $T = T'$, тобто прямі AD, CM та BN також перетинаються в одній точці.