Завдання XLIX міжнародної математичної олімпіади
(огляд задачного координатора)[1]

І. М. Мітельман[2]

49-та Міжнародна математична олімпіада проходила з 10 по 22 липня 2008 року в столиці Королівства Іспанії — місті Мадриді. Почесним Президентом Організаційного комітету олімпіади був спадкоємець престолу Його Королівська Високість принц Астурійський Дон Феліпе. Головою Оргкомітету ММО-2008 була призначена доктор Ольга Хіль Медрано — голова Іспанського Королівського математичного товариства, Міністерство освіти, соціальної політики та спорту Іспанії, Іспанське Королівське математичне товариство — за підтримки мерії Мадрида, інших числених організацій та спонсорів — зуміли перетворити Міжнародну математичну олімпіаду на яскраве свято для найкращих юних математиків світу. Для учнів перебування в Іспанії було прикрашено, крім, звісно, олімпіадного змагання, спортивними та культурними заходами, цікавими екскурсіями тощо. Відтак, учні, керівники команд, координатори побували в місті Аранхуесі, де мали нагоду переглянути фламенко-шоу. Незабутнє враження на учасників та гостей олімпіади справила екскурсія до середньовічної столиці Іспанії міста Толедо. Величний кафедральний собор є справжнім шедевром архітектури, і, понад це, у соборі створено чудову картинну галерею, у якій представлено полотна таких видатних майстрів як Ель Греко, Веласкес, Рафаель, Тіціан, Караваджо, Гойя.

Урочисте відкриття олімпіади відбулось 15 липня за участі Міністра освіти, соціальної політики та спорту Іспанії пані Мерседес Кабрера Кальво-Сотело. 16 та 17 липня учасники виконували завдання олімпіади.

У Міжнародній математичній олімпіаді 2008 року взяли участь 535 учнів з 97 країн (кожна команда складається не більше від 6 учнів). Журі олімпіади складається з наукових керівників команд (Team Leaders) країн-учасниць. Голова журі призначається окремо — з числа математиків країни-організатора. Очолював журі ММО-2008 професор Карлос Андрадас Еранс. Основна мета роботи журі — укладання завдання міжнародної математичної олімпіади з попереднього переліку задач (Short List). Кожна країна-учасник має право подати на розгляд Міжнародного задачного комітету (Problem Selection Committee), який починає працювати за два місяці до початку олімпіади, щонайбільше шість обов'язково оригінальних авторських задач, котрі презентують такі розділи елементарної математики, як алгебра, теорія чисел, геометрія та комбінаторика. Цього року Міжнародний задачний комітет був сформований із шести авторитетних математиків: Вісенте Муньос Веласкес (Іспанія, голова комітету), Хуан Мануель Конде Калеро (Іспанія), Даніель Ласаоса Медарде (Іспанія), Геза Кьош (Угорщина), Свєтослав Савчев (Болгарія), Марсін Кучма (Польща). Варто окремо зауважити, що, наприклад, С. Савчев і М. Кучма беруть участь у роботі задачних комітетів ММО вже протягом багатьох років і мають величезний досвід такої роботи,

[1] друкується з деякими скороченнями. Повний варіант статті міститься в Інтернеті за адресою `http://www.mechmat.univ.kiev.ua/dload/school/IMO2008_Mitelman_USM.pdf`

[2] заслужений вчитель України, доцент, кандидат фізико-математичних наук, задачний координатор XLIX Міжнародної математичної олімпіади

блискучу ерудицію з олімпіадної тематики. Найкращі з надісланих задач (як правило — 28-30 задач) утворюють Short List, який складається з чотирьох названих вище розділів. На жаль, на відміну від багатьох попередніх років, задачі, подані Україною, до Short List ММО-2008 не потрапили.

Журі Міжнародної олімпіади спочатку завжди працює відокремлено від решти її учасників. Цього року це відбувалось у місті Сеговії з 10 по 15 липня. Результатом роботи журі на даному етапі має стати відібраний спеціальною системою рейтингового голосування комплект із шести задач, які прийнято умовно розподіляти на дві "легкі" задачі, дві задачі "середнього" рівня складності і дві "складні" задачі. Зауважимо, що спочатку створюються такі пари задач, а потім відбір задач відбувається саме сформованими парами. Журі зобов'язане забезпечити тематичне розмаїття завдання, у якому повинні бути представлені всі чотири розділи Short List'a.

До того ж, журі ММО затверджує докладну систему критеріїв оцінювання (Marking Scheme) для кожної з шести відібраних задач (нагадаємо, що повне розв'язання кожної із задач оцінюється в 7 балів). Ця схема є одним із основних законів олімпіади, яким забезпечується дотримання однакових вимог до всіх робіт. Зрозуміло, що для Міжнародної олімпіади є дуже важливим, щоб за однакові (рівнозначні) просування учні отримували однакову кількість балів, а також — щоб однаково знижувались оцінки за рівнозначні недоліки в розв'язаннях.

Роботи учнів, написані їхніми рідними мовами, перевіряють, як добре відомо, наукові керівники відповідних команд. Після цього оцінки, запропоновані науковими керівниками, мають пройти складну й відповідальну процедуру координації, яка й гарантує виконання вимог Marking Scheme. Міжнародні математичні олімпіади створюють для цього групи спеціальних експертів — задачних координаторів (Problem Coordinators).

На Міжнародній математичній олімпіаді 2008 року працювало 75 задачних координаторів, яких очолював професор Барселонського університету Ігнасі Мундет (керівник координації — Chief Coordinator). Керівник координації також очолює розробку Marking Scheme.

Проф. Ігнасі Мундет —
керівник координації
ММО-2008.

Традиційно групи координаторів складаються переважно з математиків країни-організатора. Як виняток, персонально запрошуються фахівці високої кваліфікації з інших країн. Серед координаторів цього року були математики з Росії, Швеції, Швейцарії, Нідерландів, Мексики, Колумбії, Німеччини, В'єтнаму, Республіки Кореї, Китаю, Румунії, Греції, США (дехто з них зараз проживає або перебуває на навчанні в інших країнах). Координаторами-радниками були й члени Задачного комітету. Учетверте для такої роботи був запрошений український математик і викладач, доцент, кандидат фізико-математичних наук І. М. Мітельман (м. Одеса). Інтернаціональний склад команди координаторів є, на наш погляд, значним чинником, що сприяє вдалому проведенню Міжнародних олімпіад, позаяк дозволяє якнайкраще врахувати, наприклад, різні традиції обґрунтування математичних фактів в учнівських роботах.

І.М.Мітельман — задачний координатор ММО-2008.

Координація проходила 18 та 19 липня в Мадриді, у конференц-залі готелю "Convención", де з 13 липня працювали всі задачні координатори, а з 17 липня також і наукові керівники команд (Leaders) та їхні заступники (Deputy Leaders).

Координатори обговорюють роботи учасників.

Професор Ігнасі Мундет сформував шість груп координаторів (за кількістю задач), і кожну групу, очолювану старшим координатором (Problem Captain), було розбито на підгрупи з 2-3 координаторів (так звані "столи координації"). Наукові керівники отримують графік сесій координації для своїх команд. Одночасно з керівниками команд (але абсолютно незалежно від них) копії робіт учасників олімпіади перевіряються представниками групи координаторів, і для кожної роботи координатори готують свої попередні пропозиції щодо оцінювання досягнень учнів у відповідності до Marking Scheme. Під час сесій координації відбувається ретельне обговорення оцінок між керівниками команд та координаторами (зазвичай у такому обговоренні беруть участь керівник команди, його заступник та двоє координаторів відповідної підгрупи). Такі дискусії завжди носять доброзичливий і творчий характер і мають за мету максимально точно оцінити реальні досягнення учасників олімпіади, а також корисні з точки зору розглядуваної задачі математичні ідеї, що їх фіксували в своїх роботах учні. Загальний позитивний настрій, що домінує на координації, поєднується з науковою принциповістю та вимогливістю, оскільки кожен бал може мати вирішальне значення для остаточних підсумків олімпіади. Якщо керівники команди та координатори дійшли згоди в оцінюванні робіт, то вони підписують спеціальний протокол сесії координації, котрий миттєво потрапляє до групи обробки результатів. У разі виявлення різних позицій щодо майбутньої оцінки питання обговорюється спочатку за участі старшого координатора, а потім, якщо потрібно, — за участі керівника координації. Якщо й це не дає бажаних результатів, то керівник координації виносить таку ситуацію на розгляд журі олімпіади, висновок якого є остаточним.

На координації керівник команди Угорщини
голова IMO Advisory Board проф. Йожеф Пелікан.

Робота координаторів є надзвичайно складною також і тому, що нерідко трапляється оцінювати роботи, у яких задачу не розв'язано повністю, і окремі просування учасника не підпадають під запроваджену схему оцінювання. Отже, координаторам треба мати значний досвід та високу математичну кваліфікацію, щоб коректно оцінити перспективи застосування учасником тих чи інших ідей та підходів і визначитись з їхнім еквівалентом з точки зору офіційної Marking Scheme.

За загальною думкою всіх керівників команд, висловленою під час заключного засідання журі, команда координаторів Міжнародної математичної олімпіади 2008 року впевнено впоралась із покладеними на неї обов'язками і провела координацію бездоганно.

Формуючи комплект завдань олімпіади, журі намагалось максимально врахувати значні вади завдання попередньої ММО. Нагадаємо, що в 2007 році задачі №3 та №6 виявилися настільки складними, що першу з них розв'язали тільки чотири учасники, а другу — п'ять, причому жоден з учасників не впорався з обома цими задачами. Крім того, минулого року обидві геометричні задачі були невиправдано простими. Відтак, ММО-2007 реально пройшла за чотирма задачами, що є абсолютно неприпустимим. З іншого боку, журі ММО-2008 вочевидь проявило схильність до задач на математичний "здоровий глузд" — у порівнянні із задачами на застосування "високих олімпіадних технологій" у вигляді спеціальних теорем та професійних "трюків". Задачею №6 виявилась вишукана та складна задача з класичної геометрії, що трапляється, на превеликий жаль, надто рідко. Це схвально було оцінено всіма фахівцями, які працювали на олімпіаді. Класична геометрія є важливою складовою шкільної математики і, зокрема, олімпіадної підготовки школярів. Такі задачі дозволяють краще висвітлити рівень математичних обдарувань учня. З іншого боку, задача №6 припускала не тільки суто геометричні "естетичні" способи розв'язування, але — що є позитивним чинником — нетривіальні аналітичні підходи (тригонометричні міркування, застосування комплексних чисел). Складна геометрична задача №6 була збалансована в комплекті задач олімпіади простою геометричною задачею №1, для якої учасники запропонували чимало різноманітних розв'язань. Далі, наявність пункту *б)* в задачі №2 є своєрідною підказкою для вибору стратегії розв'язування. Задача №3 для учнів виявилась важким випробуванням, хоча за своєю математичною "консистенцією" вона є абсолютно прозорою, з нескладним авторським розв'язанням (хоча, як ви можете побачити далі, деякі підходи потребують витончених теоретико-числових міркувань). Можливо, саме пошук нетривіального змісту в задачі з "магічним" для учасників ММО номером 3 завадив багатьом конкурсантам досягти успіху в її розв'язуванні. Задача №4 — традиційне функціональне рівняння, яке передбачає володіння технікою алгебраїчних підстановок. Задача №5 може слугувати зразком комбінаторної олімпіадної задачі середнього рівня складності, під час розв'язування якої учасники продемонстрували різні способи комбінаторних міркувань (установлення відповідності, метод математичної індукції, рекурентні співвідношення, твірні функції тощо). Узагалі, завдання Міжнародної математичної олімпіади 2008 року було оцінено переважною більшістю спеціалістів як доволі вдале і виважене за рівнем складності.

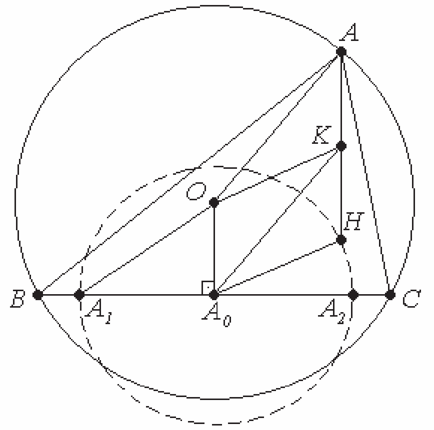
На заключному засіданні журі 20 липня виступив Йожеф Пелікан (Угорщина) — Голова Консультативної Ради ММО (IMO Advisory Board). Професор Пелікан стисло підвів підсумки ММО-2008, нагадав, що Міжнародна олімпіада 2009 року відбудеться в Німеччині, олімпіада 2010 року — в Казахстані, Нідерланди прийматимуть ММО в 2011 році, а також оголосив рішення IMO Advisory Board щодо проведення Міжнародної математичної олімпіади 2012 року в Аргентині, уряд якої подав відповідну офіційну заявку. Відбулась планова ротація у складі IMO Advisory Board: місце представника Російської Федерації Назара Агаханова, чия каденція закінчилась цього року, посів представник Словенії Грегор Долінар (до речі, він очолював журі ММО-2006).

Наведемо деякі можливі розв'язання задач олімпіади та критерії оцінювання робіт учасників.

Розв'язання задач 49-ої Міжнародної математичної олімпіади

(Умови задач див. в статті С.М.Торби в цьому ж номері журналу.)

Задача 1. *Розв'язання 1.* Серединні перпендикуляри відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 також є серединними перпендикулярами до відповідних сторін трикутника ABC, а тому центром шуканого кола може бути лише центр O описаного кола трикутника ABC. Нехай A_0, B_0, C_0 — середини сторін BC, CA, AB відповідно, точка K — середина відрізка AH. Тоді $OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2$. Як добре відомо [1, с. 5], чотирикутники AKA_0O і KHA_0O — паралелограми. Якщо R — радіус описаного кола трикутника ABC, то $A_0K = OA = R$



$$2\left(OA_0^2 + A_0H^2\right) = OH^2 + A_0K^2 = OH^2 + R^2.$$

Звідси $OA_1^2 = \frac{1}{2}\left(OH^2 + R^2\right)$. Зрозуміло, що відстані від точки O до точок A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 також будуть дорівнювати $\sqrt{\frac{1}{2}\left(OH^2 + R^2\right)}$.

Учасники запропонували чимало розв'язань із використанням тригонометрії, векторів, аналітичних методів, комплексних чисел тощо. Наведемо тут одне з "векторних" розв'язань.

Розв'язання 2. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC, R — його радіус, A_0 — середина сторони BC. Скористаємося відомою векторною рівністю $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ (її часто називають формулою Гамільтона [1, с. 185]).

Маємо

$$\overline{A_0H} = \overline{OH} - \overline{OA_0} = \frac{2\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}}{2},$$

$$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2 = \frac{1}{4}\left(\overline{OB}^2 + 2\overline{OB}\cdot\overline{OC} + \overline{OC}^2\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(4\overline{OA}^2 + 4\overline{OA}\cdot\overline{OB} + 4\overline{OA}\cdot\overline{OC} + \overline{OB}^2 + 2\overline{OB}\cdot\overline{OC} + \overline{OC}^2\right) =$$
$$= 2R^2 + \overline{OA}\cdot\overline{OB} + \overline{OA}\cdot\overline{OC} + \overline{OB}\cdot\overline{OC}.$$

Очевидно, що решта потрібних квадратів відстаней буде подаватись такою ж самою формулою, яка має симетричний "характер".

Marking Scheme для задачі №1 передбачала 1 бал за обґрунтування того, що центром шуканого кола буде центр описаного кола трикутника ABC. До 5 балів оцінювалось одержання для однієї з відстаней (наприклад, для OA_1) "симетричного" виразу через параметри трикутника ABC. І ще 1 бала коштував висновок щодо того, як із структури одержаної формули випливає потрібний результат. Для розв'язання 1 у 2 бали оцінювали спостереження про те, що чотирикутники AKA_0O і KHA_0O паралелограми (чи еквівалентні факти), і в 3 бали

— виведення формули $OA_1^2 = \frac{1}{2}\left(OH^2 + R^2\right)$. Доведення того, що, наприклад, чотири точки B_1, B_2, C_1, C_2 лежать на одному колі (див. розв'язання 1 у статті С.М. Торби) оцінювали в 4 бали. Для векторних, тригонометричних розв'язань, розв'язань із використанням техніки комплексних чисел тощо з 5 балів, передбачених за основну частину доведення, 2 бали виставляли за обчислення A_0H. Оскільки задача вважалась легкою, то доведення методом координат оцінювались за схемою "0-1-7" (знов-таки, 1 бал виставлявся за обґрунтування розташування центра кола), тобто окремі частинні просування балів учням не приносили, і оцінювались тільки завершені аналітичні розв'язання.

Зауваження. Коло, про яке йдеться в задачі, називається другим колом Дроза-Фарні (`http://demonstrations.wolfram.com/SecondDrozFarnyCircle`). Див. також `http://www.pandd.demon.nl/drozf.htm`.

Задача 2. *Розв'язання. а)* Після заміни $z = \frac{1}{xy}$ та стандартної підстановки $p = x + y$, $q = xy$ доводжувана нерівність, як можна переконатись (зробіть це!), набуває вигляду $\left(q^2 - 3q + p\right)^2 \geq 0$.

б) Зауважимо, що x і y є коренями квадратного рівняння $t^2 - pt + q = 0$. З урахуванням рівності $q^2 - 3q + p = 0$ дискримінант цього рівняння дорівнює $p^2 - 4q = \left(3q - q^2\right)^2 - 4q = q\,(q-1)^2\,(q-4)$. Задачу буде розв'язано, якщо q і $q - 4$ будуть квадратами раціональних чисел. А це зводиться, як легко зрозуміти, до рівняння в цілих числах $4m^2 + \ell^2 = n^2$. Із теорії піфагорових трійок (див., наприклад, [3, сс. 333-334], [5, сс. 154-157]) і випливає потрібний результат.

Marking Scheme для задачі №2 встановлювала, що пункт *а)* оцінюється 4 балами, пункт *б)* — 3 балами (пред'явлення безлічі потрібних трійок або коректне доведення існування, можливо — із застосуванням відомих результатів теорії чисел, наприклад, теорії піфагорових трійок). У пункті *а)* 1 бал можна було отримати за певні алгебраїчні просування (заміна змінної тощо), що призводили до більш простих ("зручних") виразів, шляхи для доведення невід'ємності яких були "зрозумілими". У пункті *б)* зведення задачі до "однопараметричної" (на кшталт дискримінанта відповідного квадратного тричлена) також у багатьох ситуаціях оцінювалось під час координації в 1 бал. Незначні помилки технічного характеру (як у пункті *а)*, так і в пункті *б)*), які не впливали на загальний хід доведення, могли призвести до втрати 1 бала.

Задача 3. *Розв'язання 1.* Спочатку згадаємо ([2, сс. 17-18], [3, сс. 172-182], [4, сс. 68-72], [5, сс. 66-71]), що число -1 за будь-яким простим модулем $p = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, є квадратичним лишком (символ Лежандра $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$), а за будь-яким простим модулем $p = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, — квадратичним нелишком (символ Лежандра $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$). Далі, існує безліч простих чисел p вигляду $p = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Цей відомий теоретичний факт випливає і з теореми Діріхле про прості числа в арифметичних прогресіях (якщо a і b — взаємно прості цілі числа, то серед чисел вигляду $ak{+}b$, $k \in \mathbb{N}$, є безліч простих; доведенню цієї теореми присвячено дуже цікаву та змістовну книжку [6]), і з елементарних міркувань, які варто навести тут. Нехай $G = \{p_1; p_2; \ldots; p_m\}$ — множина (скінченна) всіх простих чисел, що дають остачу 1 за $\mathrm{mod} 4$. Тоді число $\left(p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m\right)^2 + 1$, яке дає остачу 2 за $\mathrm{mod} 4$, має простий дільник $p > 2$, що не входить до множини G. Отже, $\left(p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m\right)^2 \equiv -1\,(\mathrm{mod} p)$, і тому

-1 є квадратичним лишком за $\mathrm{mod} p$ (конґруенція $x^2 \equiv -1\,(\mathrm{mod} p)$ має розв'язок!), тобто $p \equiv 1\,(\mathrm{mod} 4)$ і $p \notin G$. Одержали суперечність. Відтак, розглядаємо прості $p \equiv 1\,(\mathrm{mod} 4)$, $p > 20$. Конґруенція $x^2 + 1 \equiv 0\,(\mathrm{mod} p)$ має два розв'язки, рівно один з яких (позначимо його n) задовольняє умову $0 < n < \frac{p}{2}$. Нехай $n = \frac{p-k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, k — непарне. Тоді $\left(\frac{p-k}{2}\right)^2 + 1 \equiv 0\,(\mathrm{mod} p)$, і звідси дістаємо, що $k^2 + 4 \equiv 0\,(\mathrm{mod} p)$, $k^2 \geq p - 4$, $k \geq \sqrt{p-4}$.

Маємо

$$n \leq \frac{p - \sqrt{p-4}}{2}, \quad p \geq 2n + \sqrt{p-4}, \quad p - 4 \geq 2n + \sqrt{p-4} - 4 > 2n.$$

Отже, $p \geq 2n + \sqrt{p-4} > 2n + \sqrt{2n}$. Якщо множина S таких n буде скінченною, то скінченною буде й множина $W = \{n^2 + 1 |\, n \in S\}$, що неможливо, оскільки кожне просте $p \equiv 1\,(\mathrm{mod} 4)$, $p > 20$, буде дільником принаймні одного елемента множини W.

Зауваження 1. Незначна модифікація цих міркувань дає оцінку $p > 2n + \sqrt{10n}$. Будемо розглядати прості $p \equiv 1\,(\mathrm{mod} 8)$ (таких простих чисел існує безліч, і, зрозуміло, число -1 за цими простими модулями є квадратичним лишком). Подамо n у вигляді $n = \frac{p-1}{2} - \ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \geq 0$. Тоді $\left(\frac{p-1}{2} - \ell\right)^2 + 1 \equiv 0\,(\mathrm{mod} p)$, $(2\ell+1)^2 + 4 \equiv 0\,(\mathrm{mod} p)$. Отже, $(2\ell+1)^2 + 4 = rp$, $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$. Оскільки $(2\ell+1)^2 \equiv 1 \equiv p\,(\mathrm{mod} 8)$, то $r \equiv 5\,(\mathrm{mod} 8)$, і $r \geqslant 5$. Маємо: $(2\ell+1)^2 + 4 \geqslant 5p$, $\ell \geqslant \frac{\sqrt{5p-4}-1}{2}$. Позначимо $\lambda = \sqrt{5p-4}$. Тоді $n \leqslant \frac{p-\lambda}{2}$, і $\lambda^2 - 5\lambda - 10n + 4 \geqslant 0$. Звідси $\lambda \geqslant \frac{5+\sqrt{40n+9}}{2}$. Відтак,

$$p \geqslant 2n + \lambda \geqslant 2n + \frac{5 + \sqrt{40n+9}}{2} > 2n + \sqrt{10n}.$$

Зауваження 2. Використовуючи більш глибокі теоретико-числові результати щодо розподілу простих вигляду $4k+1$, можна отримати для p оцінки порядку $n \log n$.

Розв'язання 2. Будемо розглядати прості числа p, які можна подати у вигляді $p = 16s + 9$, $s \in \mathbb{N}$. Таких простих чисел, як випливає з теореми Діріхле, існує безліч. Легко бачити, що такі p неможливо подати ані у вигляді $a^2 + 1$, $a \in \mathbb{N}$, ані у вигляді $a^2 + 4$, $a \in \mathbb{N}$. З іншого боку, ці прості p дають остачу 1 за $\mathrm{mod} 4$, а тому, згідно з теоремою Ферма-Ейлера ([5, сс. 117-124], [7]), вони подаються у вигляді суми квадратів двох взаємно простих чисел. Отже, візьмемо довільне просте $p \equiv 9\,(\mathrm{mod} 16)$ і запишемо його у вигляді $p = a^2 + b^2$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 3$, $b \geqslant 3$. Оскільки числа a і b взаємно прості, то, як відомо, існують такі ненульові цілі числа x і y, що $xa - yb = 1$, причому можна вважати, що $|x| \leqslant \frac{b}{2}$. Якщо $x = \pm\frac{b}{2}$, то з рівності $xa - yb = 1$ випливає, що $b| \pm ab - 2$, і тому $b|2$, що неможливо. Аналогічно доводиться, що $y \neq \pm\frac{a}{2}$. Відтак, $|x| \leqslant \frac{b-1}{2}$. З цієї нерівності випливає, що $|y| \leqslant \frac{a}{2}$. Але, з урахуванням того, що $|y| \neq \frac{a}{2}$, маємо оцінку $|y| \leqslant \frac{a-1}{2}$. Скористаємось тотожністю

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(a^2 + b^2\right) = (ya + xb)^2 + (xa - yb)^2.$$

Нехай $n = |ya + xb|$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = n^2 + 1$, $(x^2 + y^2)\,p = n^2 + 1$.

Далі,

$$4\left(x^2+y^2\right) \leqslant (a-1)^2+(b-1)^2 = a^2+b^2-2(a+b)+2 = p-2(a+b-1).$$

Для $a \geqslant 3$ і $b \geqslant 3$ маємо $a+b-1 > \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 2ab+1 > 2a+2b$. Але ж остання нерівність є очевидною, оскільки $ab > 2a$ і $ab > 2b$. Отже, $4\left(x^2+y^2\right) < p-2\sqrt{p}$. Припустимо, що $p \leqslant 2n+\sqrt{2n}$. Позаяк $n \leqslant a\,|y|+b\,|x| < \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{p}{2}$, то $\sqrt{2n} < 2\sqrt{p}-\sqrt{2n}$, і, беручи до уваги нерівність $p \leqslant 2n+\sqrt{2n}$, одержуємо, що $p < 2n+2\sqrt{p}-\sqrt{2n}$, $p-2\sqrt{p} < 2n-\sqrt{2n}$.

Тоді

$$\begin{gathered} 4\left(n^2+1\right) = 4\left(x^2+y^2\right)p < \left(p-2\sqrt{p}\right)\left(2n+\sqrt{2n}\right) < \\ < \left(2n-\sqrt{2n}\right)\left(2n+\sqrt{2n}\right) = 4n^2-2n < 4n^2. \end{gathered}$$

Одержали суперечність. Доведення слід завершити таким самим, як і в розв'язанні 1, міркуванням щодо нескінченності побудованої множини потрібних n.

Marking Scheme для задачі №3 передбачала, що учасники можуть з належним посиланням без доведення використовувати будь-які класичні теореми теорії чисел. Наявність у роботі (з безпосереднім доведенням або як наслідок теоретичних результатів) факта існування безлічі натуральних n таких, що n^2+1 ділиться на p для деякого простого p за умови $0 \leqslant n < p$, оцінювалась в 1 бал. Нерівності для $p-2n$, які призводять до потрібного результату, оцінювались у 5 балів. Поєднання всіх міркувань для завершення розв'язання оцінювалось в 1 бал. Наразі відсутності, наприклад, обґрунтованих висновків щодо нескінченності множини потрібних n учасник втрачав цей бал. Незначні технічні недоліки також коштували учням 1 бала. Якщо учасник, розглядаючи простий дільник p якогось числа m^2+1, доводив існування такого натурального $n < \frac{p}{2}$, що n^2+1 ділиться на p, то це часткове просування приносило 1 бал (але цей бал конкурсант не отримував, якщо обмежувався нерівністю $n < p$). За одержані конґруенції $(p-2n)^2+4 \equiv 0\,(\mathrm{mod}p)$ (або подібні досягнення) виставляли 2 бали.

Задача 4. Розв'язання задачі див. в статті С.М.Торби в цьому ж номері журналу.

Згідно з Marking Scheme для задачі №4 відсутність перевірки призводила до втрати 1 бала. Якщо задачу не було розв'язано, оцінювали окремі просування (причому ці бали не "накопичувались", тобто винагороджувалось тільки одне — найвагоміше — з часткових досягнень). Рівність $f(1)=1$ коштувала 1 бал. Одним балом оцінювалась констатація того, що функції $f(x)=x$ і $f(x)=\frac{1}{x}$ є розв'язками. У 4 бали оцінювали доведення того, що для кожного дійсного $x>0$ $\;f(x)=x$ або $f(x)=\frac{1}{x}$. Наближені до цього, але більш слабкі результати, приносили учасникам 3 бали.

Задача 5. *Розв'язання 1.* Розглянемо многочлени $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1+\ldots+x_n)^k$ та

$$g(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_n) = (y_1+\ldots+y_n+z_1+\ldots+z_n)^k.$$

Згідно з поліноміальною формулою [6, с. 37], M буде сумою коефіцієнтів усіх одночленів вигляду $x_1^{\varepsilon_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i \equiv 1\,(\mathrm{mod}2)$, $1 \leq i \leq n$, многочлена $f(x_1,\ldots,x_n)$, а N — сумою коефіцієнтів усіх одночленів вигляду $y_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{\alpha_n}\cdot z_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\beta_n}$, $\alpha_i \equiv 1\,(\mathrm{mod}2)$, $\beta_i \equiv 0\,(\mathrm{mod}2)$, $1 \leq i \leq n$, многочлена $g(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_n)$.

Нехай $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \, x_i \in \{-1; 1\}, 1 \le i \le n\}$. Тоді

$$M = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in X} (-1)^{\sigma(x)} f(x), \quad N = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{y,\, z \in X} (-1)^{\sigma(y)} g(y,\, z),$$

де для точки $x \in X$ через $\sigma(x)$ позначається кількість координат, рівних -1. Неважко бачити, що останні дві суми можна записати у вигляді

$$M = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s (n-2s)^k, \quad N = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{t=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^t C_n^t C_n^m (2n-2t-2m)^k.$$

Позначимо $p = t + m$, тоді $N = \frac{1}{2^{2n}} \sum\limits_{p=0}^{2n} (2n-2p)^k \sum\limits_{t=0}^{n} (-1)^t C_n^t C_n^{p-t}$. Відомо, що для парного $p = 2s$

$$\sum_{t=0}^{n} (-1)^t C_n^t C_n^{p-t} = (-1)^s C_n^s,$$

а для непарного p

$$\sum_{t=0}^{n} (-1)^t C_n^t C_n^{p-t} = 0$$

(це легко доводиться, якщо порівняти в лівій та правій частинах тотожності $(1-x)^n (1+x)^n = (1-x^2)^n$ коефіцієнти при x^p; див. також [8, с. 256]).

Отже,

$$N = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s (2n-4s)^k = \frac{2^k}{2^{2n}} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s (n-2s)^k = 2^{k-n} M,$$

що й треба було довести.

Розв'язання 2. Ідея використання твірних функцій ([5, С. 217-256], [6, С. 47-58], [7]) може бути реалізована із застосуванням гіперболічного косинуса $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ та синуса $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$. Зрозуміло, що $\frac{M}{k!}$ можна розглядати як коефіцієнт при x^k в такому формальному розвиненні: $\operatorname{sh}^n x = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)^n$, а $\frac{N}{k!}$ — як коефіцієнт при x^k у формальному розвиненні

$$\operatorname{sh}^n x \cdot \operatorname{ch}^n x = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)^n \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)^n.$$

Далі,

$$2^n \ \operatorname{sh}^n x \cdot \operatorname{ch}^n x = \operatorname{sh}^n 2x, \quad \operatorname{sh}^n x \cdot \operatorname{ch}^n x = \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{sh}^n 2x,$$

а тому $\frac{N}{k!} x^k = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{M}{k!} (2x)^k$. Звідси й одержуємо потрібну відповідь.

Marking Scheme для задачі №5 передбачала 1 бал за правильну відповідь. Певні незавершені просування, аналогічні ідеям розв'язання 1 зі статті С.М. Торби, оцінювались в 1-2 бали.

Подання N і M у вигляді сум (див. розв'язання 2 зі статті С.М. Торби) оцінювались в 1 бал, ще 1 бал можна було отримати за деякі корисні перетворення виразу для N. Співвідношення

$$M\left(n+1,\, k\right)=\sum_{\substack{1\leqslant k'\leqslant k-n\\ k'\equiv 1 (\mathrm{mod} 2)}} C_k^{k'} M\left(n,\, k-k'\right), \quad N\left(n+1,\, k\right)=\sum_{\substack{1\leqslant k'\leqslant k-n\\ k'\equiv 1 (\mathrm{mod} 2)}} C_k^{k'} 2^{k'-1} N\left(n,\, k-k'\right)$$

(див. розв'язання 2 зі статті С.М. Торби) вважались вартими 2 балів. Доведення бази індукції та формулювання припущення індукції оцінювали в 1 бал. Зв'язок $\frac{M}{k!}$ та $\frac{N}{k!}$ з коефіцієнтами розвинення в ряди (див. розв'язання 2) приносив 2 бали. Бали, які нараховуються за окремі досягнення в різних способах міркувань, звісно, не додавались одне до одного.

Задача 6. *Розв'язання.* Продемонструємо тригонометричне доведення (деякі технічні деталі залишаємо читачам). Нехай $AB < BC$. Для зручності в цьому розв'язанні коло ω будемо позначати як ω_3. Нехай O_1, O_2, O_3 — центри кіл ω_1, ω_2, ω_3 відповідно, а r_1, r_2, r_3 — їхні радіуси. Нехай P — точка дотику кола ω_1 та прямої AC, S — точка дотику кола ω_1 та прямої BC, Q — точка дотику кола ω_2 та прямої AC, R — точка дотику кола ω_3 та прямої BC. Зауважимо, що $AP = CQ$ (див. розв'язання задачі 6, наведене у статті С.М. Торби). Позначимо $x = AP = CQ$, $y = CP$. Нехай точка X є точкою перетину спільних зовнішніх дотичних кіл ω_1 та ω_2. Покладемо $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle BAC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\phi$, $\angle ACD = 2\psi$, $\angle DCR = 2\delta$.

Тоді $\alpha+\beta+\phi = \phi+\psi+\delta = 90^\circ$, $\operatorname{tg}\phi = \frac{r_1}{y}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{r_1}{x}$, $\operatorname{tg}\psi = \frac{r_2}{x}$.

Звідси одержуємо

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\phi+\beta\right) = \frac{\operatorname{tg}\phi+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}\beta} = \frac{r_1\left(x+y\right)}{xy-r_1^2},$$

$$\operatorname{ctg}\delta = \operatorname{tg}\left(\phi+\psi\right) = \frac{\operatorname{tg}\phi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}\psi} = \frac{xr_1+yr_2}{xy-r_1r_2}.$$

Оскільки $y + r_1\operatorname{ctg}\alpha = CS + SB = BC = r_3\left(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\delta\right)$, то звідси $r_3 = \dfrac{xy-r_1r_2}{r_1-r_2}$.

Далі,

$$O_1O_3 = BO_3 - BO_1 = \frac{r_3-r_1}{\sin\alpha} = \frac{xy-r_1^2}{\left(r_1-r_2\right)\sin\alpha},$$

$$O_2O_3 = O_2D + O_3D = \frac{r_2+r_3}{\sin\beta} = \frac{xy-r_2^2}{\left(r_1-r_2\right)\sin\beta},$$

$$O_1O_2 = \sqrt{\left(y-x\right)^2+\left(r_1+r_2\right)^2}.$$

Позаяк $\frac{XO_2}{XO_1} = \frac{r_2}{r_1}$, то $XO_2 = \frac{r_2\cdot O_1O_2}{r_1-r_2}$, $XO_1 = \frac{r_1\cdot O_1O_2}{r_1-r_2}$.

Маємо

$$\sin^2\alpha = \cos^2\left(\phi+\beta\right) = \left(\cos\phi\cos\beta - \sin\phi\sin\beta\right)^2 = \frac{\left(xy-r_1^2\right)^2}{\left(y^2+r_1^2\right)\left(x^2+r_1^2\right)},$$

$$\sin^2\beta = \frac{\left(xy-r_2^2\right)^2}{\left(y^2+r_2^2\right)\left(x^2+r_2^2\right)}.$$

Застосуємо тепер теорему косинусів для трикутників O_1O_3X та $O_1O_2O_3$:

$$\begin{aligned} O_3X^2 &= O_1O_3^2 + XO_1^2 - 2O_1O_3 \cdot O_1X \cos\angle XO_1O_3 = \\ &= \frac{(xy-r_1^2)^2}{(r_1-r_2)^2\sin^2\alpha} + \frac{r_1^2 O_1O_2^2}{(r_1-r_2)^2} - 2O_1O_3 \cdot \frac{r_1}{r_1-r_2} \cdot O_1O_2 \cdot \frac{O_1O_3^2 + O_2O_1^2 - O_2O_3^2}{2O_1O_3 \cdot O_1O_2} = \\ &= \frac{(xy-r_1^2)^2}{(r_1-r_2)^2\sin^2\alpha} + \frac{r_1^2 O_1O_2^2}{(r_1-r_2)^2} - \frac{r_1}{r_1-r_2} \cdot \frac{(xy-r_1^2)^2}{(r_1-r_2)^2\sin^2\alpha} - \frac{r_1}{r_1-r_2} \cdot O_1O_2^2 + \\ &\qquad + \frac{r_1}{r_1-r_2} \cdot \frac{(xy-r_2^2)^2}{(r_1-r_2)^2\sin^2\beta} = \left(\frac{xy-r_1r_2}{r_1-r_2}\right)^2. \end{aligned}$$

Ми довели, що $r_3 = O_3X$, звідки й випливає твердження задачі.

Також дану задачу можна розв'язати за допомогою комплексних чисел (див. повний варіант статті за адресою

www.mechmat.univ.kiev.ua/dload/school/IMO2008_Mitelman_USM.pdf).

Для задачі №6 була затверджена Marking Scheme "0-1-2-6-7": "задача в цілому розв'язана або задача в цілому не розв'язана". За доведення рівності $AP = CQ$ (чи еквівалентного факту) передбачався 1 бал, ще 1 бал можна було одержати за певні просування щодо геометричної "ідентифікації" точки перетину спільних зовнішніх дотичних до кіл ω_1 і ω_2 (якщо в роботі були наявними обидва такі досягнення, то це оцінювалось у 2 бали). 6 балів виставляли, якщо задачу розв'язано, але в роботі є незначні неточності.

На завершення хочу щиро подякувати Заслуженому вчителю України професорові В. М. Лейфурі (*м. Миколаїв*), Заслуженому вчителю України доцентові В. А. Ясінському (*м. Вінниця*), а також координаторам ММО-2008 І. І. Богданову (*Росія*), Лоренцу Рейчелу (*Швейцарія*), Константиносу Рокасу (*США-Греція*) за плідне обговорення задачних матеріалів 49-ої Міжнародної математичної олімпіади.

Література.

1. І. А. Кушнір, Трикутник і тетраедр у задачах. — К.: Радянська школа, 1991. — 208 с.

2. В. М. Лейфура, І. М Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський, Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування. — Львів: Євросвіт, 1999. — 128 с.

3. А. А. Бухштаб, Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966. — 384 с.

4. К. Айерлэнд, М. Роузен, Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987. — 416 с.

5. Г. Дэвенпорт, Высшая арифметика. — М.: Наука, 1965. — 176 с.

6. Э. Трост, Простые числа. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 136 с.

7. В. М. Тихомиров, Теорема Ферма-Эйлера о двух квадратах //Квант, №10(1991), сс. 9-12.

8. Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин, Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. — 400 с.

9. И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко, Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977. — 80 с.

10. С. К. Ландо, Лекции о производящих функциях. — М.: МЦНМО, 2002. — 144 с.