



## ЗАВДАННЯ XLIX МІЖНАРОДНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ (ОГЛЯД ЗАДАЧНОГО КООРДИНАТОРА)

*Ігор Мітельман,*

заслужений вчитель України, доцент, кандидат фізико-математичних наук,  
задачний координатор ММО-2008

49-та Міжнародна математична олімпіада проходила з 10 по 22 липня 2008 року в столиці Королівства Іспанії — місті Мадриді. Почесним Президентом Організаційного комітету олімпіади був спадкоємець престолу Його Королівська Високість принц Астурійський Дон Феліпе. Головою Оргкомітету ММО-2008 була призначена доктор Ольга Хіль Медрано — голова Іспанського Королівського математичного товариства, Міністерство освіти, соціальної політики та спорту Іспанії, Іспанське Королівське математичне товариство — за підтримки мерії Мадрида, інших числених організацій та спонсорів — зуміли перетворити Міжнародну математичну олімпіаду на яскраве свято для найкращих юних математиків світу. Для учнів перебування в Іспанії було прикрашено, крім, звісно, олімпіадного змагання, спортивними та культурними заходами, цікавими екскурсіями тощо. Відтак, учні, керівники команд, координатори побували в місті Аранхуесі, де мали нагоду переглянути фламенко-шоу. Незабутнє враження на учасників та гостей олімпіади справила екскурсія до середньовічної столиці Іспанії міста Толедо. Величний кафедральний собор є справжнім шедевром архітектури, і, понад це, у соборі створено чудову картинну галерею, у якій представлено полотна таких видатних майстрів як Ель Греко, Веласкес, Рафаель, Тіціан, Караваджо, Гойя.

Урочисте відкриття олімпіади відбулось 15 липня за участі Міністра освіти, соціальної політики та спорту Іспанії пані Мерседес Кабрера Кальво-Сотело. 16 та 17 липня учасники виконували завдання олімпіади.

У Міжнародній математичній олімпіаді 2008 року взяли участь 535 учнів з 97 країн (кожна команда складається не більше від 6 учнів). Журі олімпіади складається з наукових керівників команд (Team Leaders) країн-учасниць. Голова журі призначається окремо — з числа математиків країни-організатора. Очолював журі ММО-2008 професор Карлос Андрадас Еранс. Основна мета роботи журі — укладання завдання міжнародної математичної олімпіади з попереднього переліку задач (Short List). Кожна країна-учасник має право подати на розгляд Міжнародного задачного комітету (Problem Selection Committee), який починає працювати за два місяці до початку олімпіади, щонайбільше шість обов'язково оригінальних авторських задач, котрі презентують такі розділи елементарної математики, як алгебра, теорія чисел, геометрія та комбінаторика. Цього року Міжнародний задачний комітет був сформований із шести авторитетних математиків: Вісенте Муньос Веласкес (Іспанія, голова комітету), Хуан Мануель Конде Калеро (Іспанія), Даніель Ласаоса Медарде (Іспанія), Геза Кьош (Угорщина), Светослав Савчев (Болгарія), Марсін Кучма (Польща). Варто

окремо зауважити, що, наприклад, С. Савчев і М. Кучма беруть участь у роботі задачних комітетів ММО вже протягом багатьох років і мають величезний досвід такої роботи, блискучу ерудицію з олімпіадної тематики. Найкращі з надісланих задач (як правило — 28-30 задач) утворюють Short List, який складається з чотирьох названих вище розділів. На жаль, на відміну від багатьох попередніх років, задачі, подані Україною, до Short List ММО-2008 не потрапили.

Журі Міжнародної олімпіади спочатку завжди працює відокремлено від решти її учасників. Цього року це відбувалось у місті Сеговії з 10 по 15 липня. Результатом роботи журі на даному етапі має стати відібраний спеціальною системою рейтингового голосування комплект із шести задач, які прийнято умовно розподіляти на дві “легкі” задачі, дві задачі “середнього” рівня складності і дві “складні” задачі. Зауважимо, що спочатку створюються такі пари задач, а потім відбір задач відбувається саме сформованими парами. Журі зобов’язане забезпечити тематичне розмаїття завдання, у якому повинні бути представлені всі чотири розділи Short List’а.

До того ж, журі ММО затверджує докладну систему критеріїв оцінювання (Marking Scheme) для кожної з шести відібраних задач (нагадаємо, що повне розв’язання кожної із задач оцінюється в 7 балів). Ця схема є одним із основних



Проф. Ігнасі Мундет -  
керівник координації  
ММО-2008

законів олімпіади, яким забезпечується дотримання однакових вимог до всіх робіт. Зрозуміло, що для Міжнародної олімпіади є дуже важливим, щоб за однакові (рівнозначні) просування учні отримували однакову кількість балів, а також — щоб однаково знижувались оцінки за рівнозначні недоліки в розв’язаннях.

Роботи учнів, написані їхніми рідними мовами, перевіряють, як добре відомо, наукові керівники відповідних команд. Після цього оцінки, запропоновані науковими керівниками, мають пройти складну й відповідальну процедуру координації, яка й гарантує виконання вимог Marking Scheme. Міжнародні математичні олімпіади створюють для цього групи спеціальних експертів — задачних координаторів (Problem Coordinators).

На Міжнародній математичній олімпіаді 2008 року працювало 75 задачних координаторів, яких очолював професор Барселонського університету Ігнасі Мундет (керівник координації — Chief Coordinator). Керівник координації також очолює розробку Marking Scheme.

Традиційно групи координаторів складаються переважно з математиків країни-організатора. Як виняток, персонально запрошуються фахівці високої кваліфікації з інших країн. Серед координаторів цього року були математики з Росії, Швеції, Швейцарії, Нідерландів, Мексики, Колумбії, Німеччини, В’єтнаму, Республіки Кореї, Ки-



I.M. Мігельман -  
задачний координатор  
ММО-2008

таю, Румунії, Греції, США (дехто з них зараз проживає або перебуває на навчанні в інших країнах). Координаторами-радниками були й члени Задачного комітету. Учетверте для такої роботи був запрошений український математик і викладач доцент кандидат фізико-математичних наук І. М. Мітельман (м. Одеса). Інтернаціональний склад команди координаторів є, на наш погляд, значним чинником, що сприяє вдалому проведенню Міжнародних олімпіад, позаяк дозволяє якнайкраще врахувати, наприклад, різні традиції обґрунтування математичних фактів в учнівських роботах.

Координація проходила 18 та 19 липня в Мадриді, у конференц-залі готелю “Convención”, де з 13 липня працювали всі задачні координатори, а з 17 липня також і наукові керівники команд (Leaders) та їхні заступники (Deputy Leaders).



**Координатори обговорюють роботи учасників**

Професор Ігнасі Мундет сформував шість груп координаторів (за кількістю задач), і кожну групу, очолювану старшим координатором (Problem Captain), було розбито на підгрупи з 2-3 координаторів (так звані “столи координації”). Наукові керівники отримують графік сесій координації для своїх команд. Одночасно з керівниками команд (але абсолютно незалежно від них) копії робіт учасників олімпіади перевіряються представниками групи координаторів, і для кожної роботи координатори готують свої попередні пропозиції щодо оцінювання досягнень учнів у відповідності до Marking Scheme. Під час сесій координації відбувається ретельне обговорення оцінок між керівниками команд та координаторами (зазвичай у такому обговоренні беруть участь керівник команди, його заступник та двоє координаторів відповідної підгрупи). Такі дискусії завжди носять доброзичливий і творчий характер і мають за мету максимально точно оцінити реальні досягнення учасників олімпіади, а також кори-

сні з точки зору розглядуваної задачі математичні ідеї, що їх фіксували в своїх роботах учні. Загальний позитивний настрій, що домінує на координації, поєднується з науковою принциповістю та вимогливістю, оскільки кожен бал може мати вирішальне значення для остаточних підсумків олімпіади. Якщо керівники команди та координатори дійшли згоди в оцінюванні робіт, то вони підписують спеціальний протокол сесії координації, котрий миттєво потрапляє до групи обробки результатів. У разі виявлення різних позицій щодо майбутньої оцінки питання обговорюється спочатку за участі старшого координатора, а потім, якщо потрібно, — за участі керівника координації. Якщо й це не дає бажаних результатів, то керівник координації виносить таку ситуацію на розгляд журі олімпіади, висновок якого є остаточним.



Робота координаторів є надзвичайно складною також і тому, що нерідко трапляється оцінювати роботи, у яких задачу не розв'язано повністю, і окремі просування учасника не підпадають під запроваджену схему оцінювання. Отже, координаторам треба мати значний досвід та високу математичну кваліфікацію, щоб коректно оцінити перспективи застосування учасником тих чи інших ідей та підходів і визначитись з їхнім еквівалентом з точки зору офіційної Marking Scheme.

За загальною думкою всіх керівників команд, висловленою під час заключного засідання журі, команда координаторів Міжнародної математичної олімпіади 2008 року впевнено впоралась із покладеними на неї обов'язками і провела координацію бездоганно.

Формуючи комплект завдань олімпіади, журі намагалось максимально врахувати значні вади завдання попередньої ММО. Нагадаємо, що в 2007 році задачі №3 та №6 виявилися настільки складними, що першу з них розв'язали

тільки чотири учасники, а другу — п'ять, причому жоден з учасників не впорався з обома цими задачами. Крім того, минулого року обидві геометричні задачі були не виправдано простими. Відтак, ММО-2007 реально пройшла за чотирма задачами, що є абсолютно неприпустимим. З іншого боку, журі ММО-2008 вочевидь проявило схильність до задач на математичний “здоровий глузд” — у порівнянні із задачами на застосування “високих олімпіадних технологій” у вигляді спеціальних теорем та професійних “трюків”. Задачею №6 виявилась вишукана та складна задача з класичної геометрії, що трапляється, на превеликий жаль, надто рідко. Це схвально було оцінено всіма фахівцями, які працювали на олімпіаді. Класична геометрія є важливою складовою шкільної математики і, зокрема, олімпіадної підготовки школярів. Такі задачі дозволяють краще висвітлити рівень математичних обдарувань учня. З іншого боку, задача №6 припускала не тільки суто геометричні “естетичні” способи розв'язування, але — що є позитивним чинником — нетривіальні аналітичні підходи (тригонометричні міркування, застосування комплексних чисел). До речі, задача №6 могла б стати певним “козирем” для членів команд України та Росії, які зазвичай демонструють високий рівень підготовки саме в галузі елементарної геометрії. Складна геометрична задача №6 була збалансована в комплекті задач олімпіади простою геометричною задачею №1, для якої учасники запропонували чимало різноманітних розв'язань. Далі, наявність пункту б) в задачі №2 є своєрідною підказкою для вибору стратегії розв'язування. Задача №3 для учнів виявилась важким випробуванням, хоча за своєю математичною “консистенцією” вона є абсолютно прозорою, з нескладним авторським розв'язанням (хоча, як ви можете побачити далі, деякі підходи потребують витончених теоретико-числових міркувань). Можливо, саме пошук нетривіального змісту в задачі з “магічним” для учасників ММО номером 3 завдав багатьом конкурсантам досягти успіху в її розв'язуванні. Задача №4 — традиційне функціональне рівняння, яке передбачає володіння технікою алгебраїчних підстановок. Задача №5 може слугувати зразком комбінаторної олімпіадної задачі середнього рівня складності, під час розв'язування якої учасники продемонстрували різні способи комбінаторних міркувань (установлення відповідності, метод математичної індукції, рекурентні співвідношення, твірні функції тощо). Узагалі, завдання Міжнародної математичної олімпіади 2008 року було оцінено переважною більшістю спеціалістів як доволі вдале і виважене за рівнем складності.

На заключному засіданні журі 20 липня було визначено, що золоті медалі отримують 47 учасників з 31-42 балами, срібні медалі — 100 учасників з 22-30 балами, бронзові медалі — 120 учасників з 15-21 балом. Отже, 267 з 535 конкурсантів вибороли медалі 49-ої Міжнародної математичної олімпіади. Учні, котрі не одержують медалі, але мають повні 7 балів хоча б з однієї задачі, за Регламентом заслуговують на Почесну грамоту ММО. Таких учасників виявилось цього разу 103.

Троє учасників — Xiaosheng Mu (*Китай*), Dongyi Wei (*Китай*), Alex (Lin) Zhai (*США*) — набрали 42 бали і стали абсолютними переможцями ММО-2008.

Після затвердження результатів олімпіади місце головуючого зайняв Йожеф Пелікан (*Угорщина*) — Голова Консультативної Ради ММО (IMO Advisory Board). Професор Пелікан стисло підвів підсумки ММО-2008, нагадав, що

Міжнародна олімпіада 2009 року відбудеться в Німеччині, олімпіада 2010 року — в Казахстані, Нідерланди прийматимуть ММО в 2011 році, а також оголосив рішення ІМО Advisory Board щодо проведення Міжнародної математичної олімпіади 2012 року в Аргентині, уряд якої подав відповідну офіційну заявку. Відбулась планова ротація у складі ІМО Advisory Board: місце представника Російської Федерації Назара Агаханова, чия каденція закінчилась цього року, посів представник Словенії Грегор Долінар (до речі, він очолював журі ММО-2006).

Результати найсильніших двадцяти п'яти команд ММО-2008 виглядають так.

Команда	Медалі			Результати по задачах						Σ	місце
	З	С	Б	1	2	3	4	5	6		
Китай	5	1	0	42	42	42	42	35	14	<b>217</b>	<b>1</b>
Росія	6	0	0	42	33	35	42	42	5	<b>199</b>	<b>2</b>
США	4	2	0	42	30	20	41	42	15	<b>190</b>	<b>3</b>
Республіка Корея	4	2	0	41	42	26	42	35	2	<b>188</b>	<b>4</b>
Іран	1	5	0	42	37	14	42	37	9	<b>181</b>	<b>5</b>
Таїланд	2	3	1	42	40	13	42	37	1	<b>175</b>	<b>6</b>
КНДР	2	4	0	40	41	29	37	24	2	<b>173</b>	<b>7</b>
Туреччина	3	1	2	40	39	28	39	23	1	<b>170</b>	<b>8</b>
Тайвань	2	4	0	42	33	15	42	36	0	<b>168</b>	<b>9</b>
Угорщина	2	3	1	38	23	10	39	42	13	<b>165</b>	<b>10</b>
Японія	2	3	1	40	28	18	41	35	1	<b>163</b>	<b>11</b>
В'єтнам	2	2	2	42	31	14	41	22	9	<b>159</b>	<b>12</b>
Польща	2	3	1	42	30	14	36	35	0	<b>157</b>	<b>13</b>
Болгарія	2	1	3	42	28	14	35	19	16	<b>154</b>	<b>14</b>
Україна	2	2	2	42	31	16	31	26	7	<b>153</b>	<b>15</b>
Бразилія	0	5	1	42	29	2	42	35	2	<b>152</b>	<b>16</b>
Перу	1	3	2	42	36	10	36	14	3	<b>141</b>	<b>17-18</b>
Румунія	0	4	2	42	22	15	42	17	3	<b>141</b>	<b>17-18</b>
Австралія	0	5	1	42	22	4	35	35	2	<b>140</b>	<b>19</b>
Сербія*	1	3	0	37	22	15	41	22	2	<b>139</b>	<b>20-21</b>
Німеччина	1	2	3	41	21	12	33	23	9	<b>139</b>	<b>20-21</b>
Канада	0	2	4	42	29	1	38	25	0	<b>135</b>	<b>22</b>
Велика Британія	0	4	2	38	15	3	38	38	1	<b>133</b>	<b>23</b>
Італія	0	3	3	42	15	15	41	18	1	<b>132</b>	<b>24</b>
Казахстан	1	2	3	42	26	6	39	8	7	<b>128</b>	<b>25</b>

\* Команда Сербії виборола також ще 2 Почесні грамоти.

Як бачимо, команда України (команду супроводжували науковий керівник С. М. Торба — співробітник Інституту математики НАН України, кандидат фізико-математичних наук, керівник Н. С. Прокопенко — головний спеціаліст МОН України) посіла 15 місце з такими персональними результатами.

Учасник	Результати по задачах						$\Sigma$	Нагорода
	1	2	3	4	5	6		
Міщенко Павло, ліцей “Ерудит”, м. Донецьк	7	7	7	7	7	0	35	золота медаль
Шишацький Юрій, ліцей “Лідер”, м. Київ	7	5	7	6	7	0	32	золота медаль
Сердюк Назар, ліцей №208, м. Київ	7	5	0	1	7	7	27	срібна медаль
Соболєв Дмитро, гімназія №47, м. Харків	7	7	2	4	3	0	23	срібна медаль
Сенін Віталій, ліцей №208, м. Київ	7	5	0	6	2	0	20	бронзова медаль
Семікіна Юлія, ліцей “Лідер”, м. Київ	7	2	0	7	0	0	16	бронзова медаль

Щиро вітаємо учнів та їхніх учителів з нагородами 49-ої Міжнародної математичної олімпіади. Приємно, що всі українські учасники привезли додому медалі, серед яких дві — золоті.

Повні статистичні матеріали ММО-2008 містяться на сайтах [www.imo-2008.com](http://www.imo-2008.com), [www.imo-official.org](http://www.imo-official.org).

Закриття Міжнародної математичної олімпіади 2008 року та нагородження переможців пройшло в Університеті Карлоса III в присутності принца Дона Феліпе та його дружини принцеси Летиції. Їхні Королівські Високості разом з іншими поважними гостями церемонії закриття також брали участь у врученні учасникам медалей. Принц Феліпе звернувся до учасників та гостей ММО-2008 з промовою. Прапор з емблемою Міжнародної математичної олімпіади було урочисто передано представникам Німеччини, яка наступного року в місті Бремені прийматиме ювілейну 50-ту Міжнародну математичну олімпіаду.

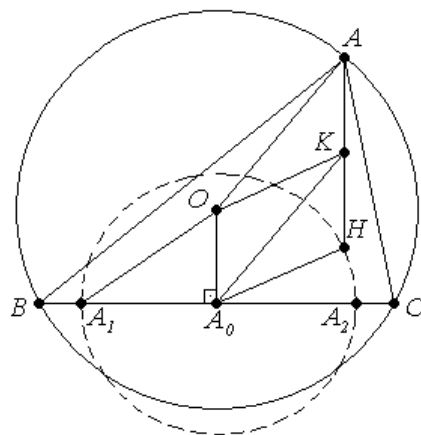
### Задачі 49-ої Міжнародної математичної олімпіади

**Задача 1 (Росія).** Нехай  $H$  — точка перетину висот гострокутного трикутника  $ABC$ . Коло з центром у середині сторони  $BC$  проходить через точку  $H$  та перетинає пряму  $BC$  в точках  $A_1$  і  $A_2$ . Аналогічно, коло з центром у середині сторони  $CA$  проходить через точку  $H$  та перетинає пряму  $CA$  в точках  $B_1$  і  $B_2$ ,

коло з центром у середині сторони  $AB$  проходить через точку  $H$  та перетинає пряму  $AB$  в точках  $C_1$  і  $C_2$ . Доведіть, що точки  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  лежать на одному колі.

*Розв'язання 1.*

Серединні перпендикуляри відрізків  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  також є серединними перпендикулярами до відповідних сторін трикутника  $ABC$ , а тому центром шуканого кола може бути тільки центр  $O$  описаного кола трикутника  $ABC$ . Нехай  $A_0, B_0, C_0$  — середини сторін  $BC, CA, AB$  відповідно, точка  $K$  — середина відрізка  $AH$ . Тоді  $OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2$ . Як добре відомо [1, с. 5], чотирикутники  $AKA_0O$  і  $KHA_0O$  — паралелограми. Якщо  $R$  — радіус описаного кола трикутника  $ABC$ , то



$$A_0K = OA = R, \quad 2(OA_0^2 + A_0H^2) = OH^2 + A_0K^2 = OH^2 + R^2.$$

Звідси  $OA_1^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$ . Зрозуміло, що відстані від точки  $O$  до точок  $A_2,$

$B_1, B_2, C_1, C_2$  також будуть дорівнювати  $\sqrt{\frac{1}{2}(OH^2 + R^2)}$ .

*Розв'язання 2.*

Позначимо кола, про які йдеться в умові задачі,  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  відповідно. Нехай  $A'$  — відмінна від  $H$  спільна точка кіл  $\omega_b$  та  $\omega_c$ . Оскільки  $B_0C_0$  — лінія центрів цих кіл, і  $AH \perp B_0C_0$ , то  $A' \in AH$ . Позаяк  $AC_1 \cdot AC_2 = AA' \cdot AH = AB_1 \cdot AB_2$ , чотирикутник  $B_1B_2C_1C_2$  є циклічним. Відтак,  $OB_1 = OB_2 = OC_1 = OC_2$  (див. міркування з розв'язання 1 щодо точки  $O$ ). Аналогічно встановлюється, що  $OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2$  і  $OA_1 = OA_2 = OC_1 = OC_2$ .

Учасники запропонували чимало розв'язань із використанням тригонометрії, векторів, аналітичних методів, комплексних чисел тощо. Наведемо тут одне з “векторних” розв'язань.

*Розв'язання 3.*

Нехай  $O$  — центр описаного кола трикутника  $ABC$ ,  $R$  — його радіус,  $A_0$  — середина сторони  $BC$ .

Скористаємося відомою векторною рівністю  $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$  (її часто називають формулою Гамільтона [1, с. 185]).

Маємо:

$$\overline{A_0H} = \overline{OH} - \overline{OA_0} = \frac{2\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}}{2},$$



$$\begin{aligned}
OA_1^2 &= OA_0^2 + A_0A_1^2 = OA_0^2 + A_0H^2 = \\
&= \frac{1}{4}(\overline{OB}^2 + 2\overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC}^2) + \\
&+ \frac{1}{4}(4\overline{OA}^2 + 4\overline{OA} \cdot \overline{OB} + 4\overline{OA} \cdot \overline{OC} + \overline{OB}^2 + 2\overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC}^2) = \\
&= 2R^2 + \overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \overline{OC} + \overline{OB} \cdot \overline{OC}.
\end{aligned}$$

Очевидно, що решта потрібних квадратів відстаней буде подаватись такою ж самою формулою, яка має симетричний “характер”.

Marking Scheme для задачі №1 передбачала 1 бал за обґрунтування того, що центром шуканого кола буде центр описаного кола трикутника  $ABC$ . До 5 балів оцінювалось одержання для однієї з відстаней (наприклад, для  $OA_1$ ) “симетричного” виразу через параметри трикутника  $ABC$ . І ще 1 бала коштував висновок щодо того, як із структури одержаної формули впливає потрібний результат. Для розв’язання 1 у 2 бали оцінювали спостереження про те, що чотирикутники  $AKA_0O$  і  $KHA_0O$  паралелограми (чи еквівалентні факти), і в 3 бали — виведення формули  $OA_1^2 = \frac{1}{2}(OH^2 + R^2)$ . У розв’язанні 2 доведення циклічності четвірки точок (наприклад,  $B_1, B_2, C_1, C_2$ ) оцінювали в 4 бали. Для векторних, тригонометричних розв’язань, розв’язань із використанням техніки комплексних чисел тощо з 5 балів, передбачених за основну частину доведення, 2 бали виставляли за обчислення  $A_0H$ . Оскільки задача вважалась легкою, то доведення методом координат оцінювались за схемою “0-1-7” (знов-таки, 1 бал виставлявся за обґрунтування розташування центра кола), тобто окремі частинні просування балів учням не приносили, і оцінювались тільки завершені аналітичні розв’язання.

*Зауваження.* Коло, про яке йдеться в задачі, називається другим колом Дроза-Фарні (<http://demonstrations.wolfram.com/SecondDrozFarnyCircle>). Див. також <http://www.pandd.demon.nl/drozf.htm>.

**Задача 2 (Австрія).** а) Доведіть, що для всіх відмінних від 1 дійсних чисел  $x, y, z$ , які задовольняють рівність  $xuz = 1$ , справджується нерівність

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

б) Доведіть, що існує безліч трійок відмінних від 1 раціональних чисел  $x, y, z$  таких, що дана нерівність перетворюється на рівність.

*Розв’язання 1.*

а) Позначимо:  $a = \frac{x}{x-1}, b = \frac{y}{y-1}, c = \frac{z}{z-1}$ . Тепер треба довести нерівність

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$  за умови, що відмінні від 1 дійсні числа  $a, b, c$  задовольняють

рівність  $(a-1)(b-1)(c-1)=abc$ . Але ж остання рівність рівносильна співвідношенням

$$\begin{aligned} a+b+c-1 &= ab+bc+ca, \\ a^2+b^2+c^2-2 &= (a+b+c)^2-2(a+b+c), \\ a^2+b^2+c^2-1 &= (a+b+c-1)^2. \end{aligned}$$

Відтак,  $a^2+b^2+c^2-1 \geq 0$ .

б) Неважко помітити, що умова рівності еквівалентна системі

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, \\ a+b+c=1, \\ a, b, c \neq 1. \end{cases}$$

Таку систему задовольняють, наприклад, такі трійки раціональних чисел:

$$\left( \frac{k}{k^2-k+1}; \frac{k^2-k}{k^2-k+1}; \frac{1-k}{k^2-k+1} \right), \quad k \in \mathbb{Y}, \quad k \geq 2. \quad \text{Звідси легко отримати}$$

$$x = -\frac{k}{(k-1)^2}, \quad y = k - k^2, \quad z = \frac{k-1}{k^2}, \quad k \in \mathbb{Y}, \quad k \geq 2. \quad \text{Зрозуміло, що таких різних трі-}$$

йок безліч.

*Зауваження 1.* Такі трійки можна визначити, якщо розглядати квадратне рівняння (відносно  $b$ )  $b^2 + (a-1)b + a(a-1) = 0$ , дискримінант якого дорівнює  $(1-a)(1+3a)$ . Якщо раціональне  $a$  подати у вигляді  $a = \frac{k}{m}$ ,  $k \in \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{Y}$ , то

варто взяти  $m = k^2 - k + 1$ , щоб зробити  $m - k$  та  $m + 3k$  точними квадратами.

*Зауваження 2.* Для пункту б) можна взяти й трійки  $x = \frac{2u-2}{(u+1)^2}$ ,  $y = \frac{2u+2}{(u-1)^2}$ ,

$$z = \frac{u^2-1}{4}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad u \neq \pm 1.$$

*Розв'язання 2.*

а) Після заміни  $z = \frac{1}{xy}$  та стандартної підстановки  $p = x + y$ ,  $q = xy$  доводжува- на нерівність, як можна переконатись (зробіть це!), набуває вигляду  $(q^2 - 3q + p)^2 \geq 0$ .

б) Зауважимо, що  $x$  і  $y$  є коренями квадратного рівняння  $t^2 - pt + q = 0$ . З ура- хуванням рівності  $q^2 - 3q + p = 0$  дискримінант цього рівняння дорівнює  $p^2 - 4q = (3q - q^2)^2 - 4q = q(q-1)^2(q-4)$ . Задачу буде розв'язано, якщо  $q$  і  $q-4$  будуть квадратами раціональних чисел. А це зводиться, як легко зрозумі-

ти, до рівняння в цілих числах  $4m^2 + 1^2 = n^2$ . Із теорії піфагорових трійок (див., наприклад, [3, сс. 333-334], [5, сс. 154-157]) і впливає потрібний результат.

Marking Scheme для задачі №2 встановлювала, що пункт *a*) оцінюється 4 балами, пункт *b*) — 3 балами (пред'явлення безлічі потрібних трійок або коректне доведення існування, можливо — із застосуванням відомих результатів теорії чисел, наприклад, теорії піфагорових трійок). У пункті *a*) 1 бал можна було отримати за певні алгебраїчні просування (заміна змінної тощо), що призводили до більш простих (“зручних”) виразів, шляхи для доведення невід’ємності яких були “зрозумілими”. У пункті *b*) зведення задачі до “однопараметричної” (на кшталт дискримінанта відповідного квадратного тричлена) також у багатьох ситуаціях оцінювалось під час координації в 1 бал. Незначні помилки технічного характеру (як у пункті *a*), так і в пункті *b*)), котрі не впливали на загальний хід доведення, могли призвести до втрати 1 бала.

**Задача 3 (Литва).** Доведіть, що існує безліч таких натуральних  $n$ , що число  $n^2 + 1$  має простий дільник, більший від  $2n + \sqrt{2n}$ .

*Розв’язання 1.*

Спочатку згадаємо ([2, сс. 17-18], [3, сс. 172-182], [4, сс. 68-72], [5, сс. 66-71]), що число  $-1$  за будь-яким простим модулем  $p = 4k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , є квадратичним

лишком (символ Лежандра  $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ ), а за будь-яким простим моду-

лем  $p = 4k + 3$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , — квадратичним нелишком (символ Лежандра

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$ ). Далі, існує безліч простих чисел  $p$  вигляду  $p = 4k + 1$ ,

$k \in \mathbb{N}$ . Цей відомий теоретичний факт впливає і з теореми Діріхле про прості числа в арифметичних прогресіях (якщо  $a$  і  $b$  — взаємно прості цілі числа, то серед чисел вигляду  $ak + b$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , є безліч простих; доведенню цієї теореми присвячено дуже цікаву та змістовну книжку [6]), і з елементарних міркувань, які варто навести тут. Нехай  $G = \{p_1; p_2; \dots; p_m\}$  — множина (скінченна) всіх

простих чисел, що дають остачу 1 за  $\text{mod} 4$ . Тоді число  $(p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_m)^2 + 1$ , яке дає остачу 2 за  $\text{mod} 4$ , має простий дільник  $p > 2$ , що не входить до множини

$G$ . Отже,  $(p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_m)^2 \equiv -1 \pmod{p}$ , і тому  $-1$  є квадратичним лишком за  $\text{mod} p$  (конгруенція  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  має розв’язок!), тобто  $p \equiv 1 \pmod{4}$  і  $p \notin G$ .

Одержали суперечність. Відтак, розглядаємо прості  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $p > 20$ . Конгруенція  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  має два розв’язки, рівно один з яких (позначимо його

$n$ ) задовольняє умову  $0 < n < \frac{p}{2}$ . Нехай  $n = \frac{p-k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  — непарне. Тоді

$\left(\frac{p-k}{2}\right)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , і звідси дістаємо, що  $k^2 + 4 \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $k^2 \geq p-4$ ,  
 $k \geq \sqrt{p-4}$ .

Маємо:

$$n \leq \frac{p - \sqrt{p-4}}{2}, \quad p \geq 2n + \sqrt{p-4}, \quad p-4 \geq 2n + \sqrt{p-4} - 4 > 2n.$$

Отже,  $p \geq 2n + \sqrt{p-4} > 2n + \sqrt{2n}$ . Якщо множина  $S$  таких  $n$  буде скінченною, то скінченною буде й множина  $W = \{n^2 + 1 \mid n \in S\}$ , що неможливо, оскільки кожне просте  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $p > 20$ , буде дільником принаймні одного елемента множини  $W$ .

*Зауваження 1.* Незначна модифікація цих міркувань дає оцінку  $p > 2n + \sqrt{10n}$ . Будемо розглядати прості  $p \equiv 1 \pmod{8}$  (таких простих чисел існує безліч, і, зрозуміло, число  $-1$  за цими простими модулями є квадратичним лишком). Пода-

мо  $n$  у вигляді  $n = \frac{p-1}{2} - \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1} \in \mathfrak{C}$ ,  $\mathbf{1} \geq 0$ . Тоді  $\left(\frac{p-1}{2} - \mathbf{1}\right)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ,

$(2\mathbf{1} + 1)^2 + 4 \equiv 0 \pmod{p}$ . Отже,  $(2\mathbf{1} + 1)^2 + 4 = rp$ ,  $r \in \mathfrak{C}$ ,  $r \geq 0$ . Оскільки

$(2\mathbf{1} + 1)^2 \equiv 1 \equiv p \pmod{8}$ , то  $r \equiv 5 \pmod{8}$ , і  $r \geq 5$ . Маємо:  $(2\mathbf{1} + 1)^2 + 4 \geq 5p$ ,

$\mathbf{1} \geq \frac{\sqrt{5p-4} - 1}{2}$ . Позначимо  $\lambda = \sqrt{5p-4}$ . Тоді  $n \leq \frac{p-\lambda}{2}$ , і  $\lambda^2 - 5\lambda - 10n + 4 \geq 0$ .

Звідси  $\lambda \geq \frac{5 + \sqrt{40n+9}}{2}$ . Відтак,  $p \geq 2n + \lambda \geq 2n + \frac{5 + \sqrt{40n+9}}{2} > 2n + \sqrt{10n}$ .

*Зауваження 2.* Використовуючи більш глибокі теоретико-числові результати щодо розподілу простих вигляду  $4k+1$ , можна отримати для  $p$  оцінки порядку  $n \log n$ .

*Розв'язання 2.*

Будемо розглядати прості числа  $p$ , які можна подати у вигляді  $p = 16s + 9$ ,  $s \in \mathfrak{Y}$ . Таких простих чисел, як випливає з теореми Діріхле, існує безліч. Легко

бачити, що такі  $p$  неможливо подати ані у вигляді  $a^2 + 1$ ,  $a \in \mathfrak{Y}$ , ані у вигляді  $a^2 + 4$ ,  $a \in \mathfrak{Y}$ . З іншого боку, ці прості  $p$  дають остачу 1 за  $\text{mod } 4$ , а тому, згід-

но з теоремою Ферма-Ейлера ([5, сс. 117-124], [7]), вони подаються у вигляді суми квадратів двох взаємно простих чисел. Отже, візьмемо довільне просте

$p \equiv 9 \pmod{16}$  і запишемо його у вигляді  $p = a^2 + b^2$ ,  $a \in \mathfrak{Y}$ ,  $b \in \mathfrak{Y}$ ,  $a \geq 3$ ,  $b \geq 3$ .

Оскільки числа  $a$  і  $b$  взаємно прості, то, як відомо, існують такі ненульові цілі

числа  $x$  і  $y$ , що  $xa - yb = 1$ , причому можна вважати, що  $|x| \leq \frac{b}{2}$ . Якщо  $x = \pm \frac{b}{2}$ ,

то з рівності  $xa - yb = 1$  випливає, що  $b \mid \pm ab - 2$ , і тому  $b \mid 2$ , що неможливо.

Аналогічно доводиться, що  $y \neq \pm \frac{a}{2}$ . Відтак,  $|x| \leq \frac{b-1}{2}$ . З цієї нерівності випливає, що  $|y| \leq \frac{a}{2}$ . Але, з урахуванням того, що  $|y| \neq \frac{a}{2}$ , маємо оцінку  $|y| \leq \frac{a-1}{2}$ .

Скористаємось тотожністю  $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (ya + xb)^2 + (xa - yb)^2$ . Нехай  $n = |ya + xb|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді  $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = n^2 + 1$ ,  $(x^2 + y^2)p = n^2 + 1$ .

Далі,

$$4(x^2 + y^2) \leq (a-1)^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 - 2(a+b) + 2 = p - 2(a+b-1).$$

Для  $a \geq 3$  і  $b \geq 3$  маємо:  $a + b - 1 > \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 2ab + 1 > 2a + 2b$ . Але ж остання нерівність є очевидною, оскільки  $ab > 2a$  і  $ab > 2b$ . Отже,  $4(x^2 + y^2) < p - 2\sqrt{p}$ . Припустимо, що  $p \leq 2n + \sqrt{2n}$ . Позаяк

$n \leq a|y| + b|x| < \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{p}{2}$ , то  $\sqrt{2n} < 2\sqrt{p} - \sqrt{2n}$ , і, беручи до уваги нерівність  $p \leq 2n + \sqrt{2n}$ , одержуємо, що  $p < 2n + 2\sqrt{p} - \sqrt{2n}$ ,  $p - 2\sqrt{p} < 2n - \sqrt{2n}$ .

Тоді

$$\begin{aligned} 4(n^2 + 1) &= 4(x^2 + y^2)p < (p - 2\sqrt{p})(2n + \sqrt{2n}) < \\ &< (2n - \sqrt{2n})(2n + \sqrt{2n}) = 4n^2 - 2n < 4n^2. \end{aligned}$$

Одержали суперечність. Доведення слід завершити таким самим, як і в розв'язанні 1, міркуванням щодо нескінченності побудованої множини потрібних  $n$ .

Marking Scheme для задачі №3 передбачала, що учасники можуть з належним посиленням без доведення використовувати будь-які класичні теореми теорії чисел. Наявність у роботі (з безпосереднім доведенням або як наслідок теоретичних результатів) факта існування безлічі натуральних  $n$  таких, що  $p \mid n^2 + 1$  для деякого простого  $p$  за умови  $0 \leq n < p$ , оцінювалась в 1 бал. Нерівності для  $p - 2n$ , які призводять до потрібного результату, оцінювались у 5 балів. Поєднання всіх міркувань для завершення розв'язання оцінювалось в 1 бал. Наразі відсутності, наприклад, обґрунтованих висновків щодо нескінченності множини потрібних  $n$  учасник втрачав цей бал. Незначні технічні недоліки також коштували учням 1 бала. Якщо учасник, розглядаючи простий дільник  $p$  якогось числа  $m^2 + 1$ , доводив існування такого натурального  $n < \frac{p}{2}$ , що  $p \mid n^2 + 1$ , то це часткове просування приносило 1 бал (але цей бал конкурсант не отримував, якщо обмежувався нерівністю  $n < p$ ). За одержані конгруенції  $(p - 2n)^2 + 4 \equiv 0 \pmod{p}$  (або подібні досягнення) виставляли 2 бали.

**Задача 4** (Республіка Корея). Знайдіть усі такі функції  $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ , що для довільних додатних дійсних чисел  $w, x, y, z$ , які задовольняють умову  $wx = yz$ , має місце рівність

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(x^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}.$$

*Розв'язання.*

Функції  $f(x) = x, x > 0$ , і  $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ , як легко перевірити, задовольняють умову задачі. Доведемо, що інших розв'язків дане функціональне рівняння не має. Візьмемо  $w = x = y = z = 1$  і одержимо, що  $(f(1))^2 = f(1)$ , тобто  $f(1) = 1$ .

Нехай  $x = 1, y = z = \sqrt{w}$ . Тоді, як неважко переконатись, маємо рівність  $(wf(w) - 1)(f(w) - w) = 0$ . Відтак, для кожного дійсного  $x > 0$   $f(x) = x$  або  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Припустимо, що існують такі додатні дійсні числа  $a$  і  $b$ , що

$f(a) \neq a$  і  $f(b) \neq \frac{1}{b}$ , тобто  $f(a) = \frac{1}{a}, f(b) = b$  (зрозуміло, що ці числа  $a$  і  $b$  повинні бути відмінними від 1). Покладемо у функціональному рівнянні  $w = a,$

$x = b, y = z = \sqrt{ab}$ . Матимемо:  $f(ab) = \frac{ab\left(\frac{1}{a^2} + b^2\right)}{a^2 + b^2}$ . Якщо  $f(ab) = ab$ , то лег-

ко одержати, що  $a = 1$ . Якщо ж  $f(ab) = \frac{1}{ab}$ , то безпосередньо виводимо, що  $b = 1$ . У обох випадках дістали суперечність.

*Відповідь:*  $f(x) = x$  для всіх  $x > 0$ ;  $f(x) = \frac{1}{x}$  для всіх  $x > 0$ .

Згідно з Marking Scheme для задачі №4 відсутність перевірки призводила до втрати 1 бала. Якщо задачу не було розв'язано, оцінювали окремі просування (причому ці бали не "накопичувались", тобто винагороджувалось тільки одне — найвагомніше — з часткових досягнень). Рівність  $f(1) = 1$  коштувала 1 бал.

Одним балом оцінювалась констатація того, що функції  $f(x) = x$  і  $f(x) = \frac{1}{x}$  є розв'язками. У 4 бали оцінювали доведення того, що для кожного дійсного  $x > 0$   $f(x) = x$  або  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Наближені до цього результати, але більш слабкі, приносили учасникам 3 бали.

**Задача 5** (Франція). Нехай  $n$  та  $k$  — такі натуральні числа, що  $k \geq n$ , і число  $k - n$  парне. Є  $2n$  ламп, занумерованих числами  $1, 2, \dots, 2n$ , кожна з яких може

знаходиться в одному з двох *протилежних* станів: увімкнена або вимкнена. Спочатку всі лампи були вимкнені. Розглядаються впорядковані послідовності з  $k$  кроків: щокроку рівно одна лампа змінює свій стан на протилежний. Позначимо через  $N$  число таких послідовностей з  $k$  кроків, що призводять до такого стану: усі лампи з номерами  $1, \dots, n$  увімкнені, а решта ламп вимкнена. Позначимо через  $M$  число таких послідовностей з  $k$  кроків, що призводять до такого ж самого стану, але за умови, що лампи з номерами  $n+1, \dots, 2n$  не змінювали свого стану жодного разу. Знайдіть значення відношення  $N/M$ .

*Розв'язання 1.*

Назвемо послідовності, кількість яких в умові задачі позначено через  $N$ ,  $A$ -процесами (від англ. *admissible process*), і послідовності, кількість яких в умові позначено через  $M$ , —  $R$ -процесами (від англ. *restricted process*). Сукупності  $A$ -процесів та  $R$ -процесів позначимо через  $\Omega$  та  $\Phi$  відповідно. У будь-якому  $A$ -процесі кожна лампа з номерами  $1, \dots, n$  змінювала свій стан непарну кількість разів, а решта ламп змінювала свій стан парну кількість разів. Очевидно, що  $M \neq 0$  (треба спочатку увімкнути лампи  $1, \dots, n$ , а потім одну з них перемикає  $k-n$  разів; згадаємо, що  $k-n$  парне число). Візьмемо довільний  $R$ -процес  $\varphi \in \Phi$ . Нехай лампа з номером  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , перемикалась  $k(i)$  разів,

$k(i) \equiv 1 \pmod{2}$  для всіх  $i = \overline{1, n}$ . Зауважимо, що  $\sum_{i=1}^n k(i) = k$ . Оберемо  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

і розглянемо множину  $S_i$  всіх  $k(i)$  кроків-перемикань  $i$ -тої лампи. Ця множина має  $2^{k(i)-1}$  підмножин парної потужності (нагадаємо, що  $m$ -елементна множина має рівно  $2^{m-1}$  підмножину, котра складається з парної кількості елементів). Нехай  $B \subset S_i$ ,  $|B| \equiv 0 \pmod{2}$ . Натомість кожного кроку-перемикання з підмножини  $B$  робимо крок-перемикання лампи з номером  $n+i$  (і таку процедуру здійснюємо для будь-якої підмножини парної потужності множини  $S_i$ ). У такий спосіб розглядуваному  $R$ -процесу  $\varphi$  поставлено у відповідність  $2^{k(1)-1} \cdot 2^{k(2)-2} \cdot \dots \cdot 2^{k(n)-1} = 2^{k-n}$  попарно різних  $A$ -процесів, сукупність яких позначимо  $F(\varphi)$ . Неважко бачити, що для будь-якого процесу  $\omega \in \Omega$  існує процес  $\varphi \in \Phi$  такий, що  $\omega \in F(\varphi)$ , причому побудоване відображення  $\varphi \rightarrow F(\varphi)$  оборотне в тому розумінні, що, насправді, процес  $\varphi \in \Phi$  визначається однозначно (слід у процесі  $\omega \in \Omega$  кожне перемикання лампи з номером  $i > n$  замінити перемиканням лампи з номером  $i-n$ ; одержаний унаслідок цього процес  $\varphi \in \Phi$  і буде єдиним шуканим  $R$ -процесом). Отже,  $\bigcup_{\varphi \in \Phi} F(\varphi) = \Omega$ , причому для двох

різних  $R$ -процесів  $\varphi'$  і  $\varphi''$   $F(\varphi') \cap F(\varphi'') = \emptyset$  (у таких ситуаціях використовують запис  $\Omega = \bigcup_{\varphi \in \Phi} F(\varphi)$ ; це називається диз'юнктивним об'єднанням). Відтак,

$$N = M \cdot 2^{k-n}.$$

*Відповідь:*  $2^{k-n}$ .

Розв'язання 2.

Нехай лампа з номером  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , перемикалась  $2a_i + 1$  разів,  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $a_i \geq 0$ , а лампа з номером  $n + j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , перемикалась  $2b_j$  разів,  $b_j \in \mathbb{C}$ ,  $b_j \geq 0$ . Позначимо:  $A = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_n + n$  (загальна кількість перемикання "першої" половини ламп),  $B = 2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_n$  (загальна кількість перемикання "другої" половини ламп). Тоді

$$N = \sum_{A+B=k} k! \left( \prod_{i=1}^n (2a_i + 1)! (2b_i)! \right)^{-1}, \quad M = \sum_{A=k} k! \left( \prod_{i=1}^n (2a_i + 1)! \right)^{-1}.$$

Розглянемо спочатку випадок  $n=1$ ,  $k$  — непарне число. Зрозуміло, що  $M(1, k) = 1$ . До того ж,  $N(1, k) = 2^{k-1}$ , позаяк кількість  $A$ -процесів для  $n=1$  співпадає з кількістю таких  $(0, 1)$ -наборів довжини  $k$ , у яких парна кількість нулів.

Припустимо, що для деякого  $n$  і всіх  $k \geq n$ ,  $k \equiv n \pmod{2}$ ,  $N(n, k) = M(n, k) \cdot 2^{k-n}$ . Покажемо, що  $N(n+1, k) = 2^{k-(n+1)} \cdot M(n+1, k)$  для всіх  $k \geq n+1$ ,  $k \equiv n+1 \pmod{2}$ . Тоді потрібне твердження буде обґрунтовано методом математичної індукції.

Перетворюючи відповідні суми, маємо:

$$M(n+1, k) = \sum_{A=k-\eta} \sum_{\substack{1 \leq \eta \leq k-n \\ \eta \equiv 1 \pmod{2}}} \frac{k! \cdot (k-\eta)!}{\eta! (k-\eta)! (2a_1+1)! \dots (2a_n+1)!} = \sum_{\substack{1 \leq \eta \leq k-n \\ \eta \equiv 1 \pmod{2}}} C_k^\eta M(n, k-\eta),$$

$$\begin{aligned} N(n+1, k) &= \sum_{A+B=k-\eta} \sum_{\substack{1 \leq \eta \leq k-n \\ \eta \equiv 1 \pmod{2}}} C_k^\eta 2^{\eta-1} \frac{(k-\eta)!}{(2a_1+1)! \dots (2a_n+1)! (2b_1)! \dots (2b_n)!} = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \eta \leq k-n \\ \eta \equiv 1 \pmod{2}}} C_k^\eta 2^{\eta-1} N(n, k-\eta). \end{aligned}$$

(У перетворенні другої суми використано співвідношення

$$\sum_{(2a_{n+1}+1)+2b_{n+1}=\eta} \frac{\eta!}{(2a_{n+1}+1)! (2b_{n+1})!} = 2^{\eta-1},$$

яке має простий комбінаторний зміст — кількість підмножин парної потужності  $\eta$ -елементної множини.)

Відтак, з урахуванням припущення індукції,

$$\begin{aligned} N(n+1, k) &= \sum_{\substack{1 \leq \eta \leq k-n \\ \eta \equiv 1 \pmod{2}}} C_k^\eta 2^{\eta-1} 2^{k-\eta-n} M(n, k-\eta) = \\ &= 2^{k-(n+1)} \sum_{\substack{1 \leq \eta \leq k-n \\ \eta \equiv 1 \pmod{2}}} C_k^\eta M(n, k-\eta) = 2^{k-(n+1)} M(n+1, k). \end{aligned}$$



*Розв'язання 3.*

Розглянемо многочлени

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^k$$

та

$$g(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) = (y_1 + \dots + y_n + z_1 + \dots + z_n)^k.$$

Згідно з поліноміальною формулою [9, с. 37],  $M$  буде сумою коефіцієнтів усіх одночленів вигляду  $x_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\varepsilon_n}$ ,  $\varepsilon_i \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , многочлена  $f(x_1, \dots, x_n)$ , а  $N$  — сумою коефіцієнтів усіх одночленів вигляду  $y_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot y_n^{\alpha_n} \cdot z_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n}$ ,  $\alpha_i \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $\beta_i \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , многочлена  $g(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$ .

Нехай  $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_i \in \{-1; 1\}, i = \overline{1, n}\}$ . Тоді  $M = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in X} (-1)^{\sigma(x)} f(x)$ ,

$N = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{y, z \in X} (-1)^{\sigma(y)} g(y, z)$ , де для точки  $x \in X$  через  $\sigma(x)$  позначається кі-

лькість координат, рівних  $-1$ . Неважко бачити, що останні дві суми можна записати у вигляді

$$M = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^n (-1)^s C_n^s (n-2s)^k, \quad N = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{t=0}^n \sum_{m=0}^n (-1)^t C_n^t C_n^m (2n-2t-2m)^k.$$

Позначимо  $p = t + m$ , тоді  $N = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{p=0}^{2n} (2n-2p)^k \sum_{t=0}^n (-1)^t C_n^t C_n^{p-t}$ . Відомо, що

для парного  $p = 2s$   $\sum_{t=0}^n (-1)^t C_n^t C_n^{p-t} = (-1)^s C_n^s$ , а для непарного  $p$

$\sum_{t=0}^n (-1)^t C_n^t C_n^{p-t} = 0$  (це легко доводиться, якщо порівняти в лівій та правій час-

тинах тотожності  $(1-x)^n (1+x)^n = (1-x^2)^n$  коефіцієнти при  $x^p$ ; див. також [8, с. 256]).

Отже,

$$N = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{s=0}^n (-1)^s C_n^s (2n-4s)^k = \frac{2^k}{2^{2n}} \sum_{s=0}^n (-1)^s C_n^s (n-2s)^k = 2^{k-n} M,$$

що й треба було довести.

*Розв'язання 4.*

Ідея використання твірних функцій ([8, сс. 217-256], [9, сс. 47-58], [10]) може бути реалізована із застосуванням гіперболічних функцій. Зрозуміло, що  $\frac{M}{k!}$

можна розглядати як коефіцієнт при  $x^k$  в такому формальному розвиненні

$\operatorname{sh}^n x = \left( x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)^n$ , а  $\frac{N}{k!}$  — як коефіцієнт при  $x^k$  у формальному розвиненні

$$\operatorname{sh}^n x \cdot \operatorname{ch}^n x = \left( x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)^n \left( 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^n.$$

Далі,

$$2^n \operatorname{sh}^n x \cdot \operatorname{ch}^n x = \operatorname{sh}^n 2x, \quad \operatorname{sh}^n x \cdot \operatorname{ch}^n x = \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{sh}^n 2x,$$

а тому  $\frac{N}{k!} x^k = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{M}{k!} (2x)^k$ . Звідси й одержуємо потрібну відповідь.

Marking Scheme для задачі №5 передбачала 1 бал за правильну відповідь. Певні незавершені просування, аналогічні ідеям розв'язання 1, оцінювались в 1-2 бали. Подання  $N$  і  $M$  у вигляді сум (див. розв'язання 2) оцінювались в 1 бал, ще 1 бал можна було отримати за деякі корисні перетворення виразу для  $N$ . Співвідношення

$$M(n+1, k) = \sum_{\substack{1 \leq \eta \leq k-n \\ \eta \equiv 1 \pmod{2}}} C_k^\eta M(n, k-\eta), \quad N(n+1, k) = \sum_{\substack{1 \leq \eta \leq k-n \\ \eta \equiv 1 \pmod{2}}} C_k^\eta 2^{\eta-1} N(n, k-\eta)$$

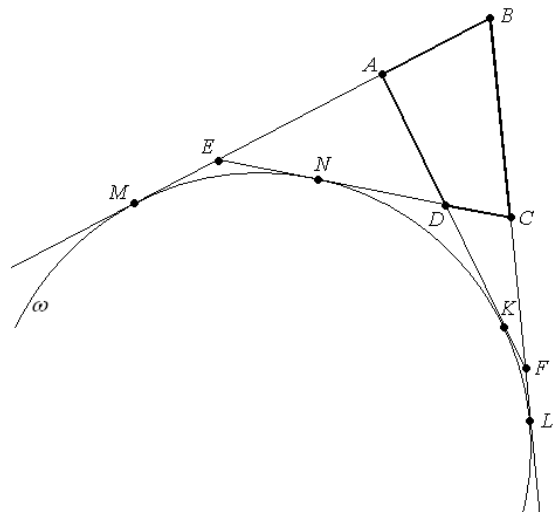
(див. розв'язання 2) вважались вартими 2 балів. Доведення бази індукції та формулювання припущення індукції оцінювали в 1 бал. Зв'язок  $\frac{M}{k!}$  та  $\frac{N}{k!}$  з коефі-

цієнтами розвинення в ряди (див. розв'язання 4) приносив 2 бали. Бали, які нараховуються за окремі досягнення в різних способах міркувань, звісно, не додавались одне до одного.

**Задача 6 (Росія).** Нехай  $ABCD$  — опуклий чотирикутник, у якому  $BA \neq BC$ . Позначимо вписані кола трикутників  $ABC$  та  $ADC$  через  $\omega_1$  та  $\omega_2$  відповідно. Припустимо, що існує коло  $\omega$ , яке дотикається до продовження відрізка  $BA$  за точку  $A$ , продовження відрізка  $BC$  за точку  $C$ , а також дотикається до прямих  $AD$  та  $CD$ . Доведіть, що спільні зовнішні дотичні до кіл  $\omega_1$  і  $\omega_2$  перетинаються на колі  $\omega$ .

*Розв'язання 1.*

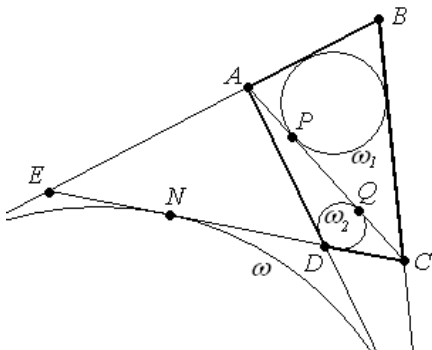
Спочатку доведемо, що  $AB + AD = CB + CD$ . Нехай промені  $BA$  і  $CD$  перетинаються в точці  $E$ , а промені  $BC$  і  $AD$  перетинаються в точці  $F$ . Позначимо через  $M, N, K$  і  $L$  точки дотику кола  $\omega$  з прямими  $AB, CD, AD$  і  $BC$  відповідно (див. рис.).



Тоді за властивістю відрізків дотичних, проведених до кола із однієї точки, маємо:

$$\begin{aligned} AB + AD &= AB + AK - DK = AB + AM - DN = BM - DN = \\ &= BL - DN = BC + CL - DN = BC + CN - DN = CB + CD, \end{aligned}$$

що й треба було довести.



Нехай коло  $\omega_1$  дотикається до  $AC$  в точці  $P$ , а коло  $\omega_2$  дотикається до  $AC$  в точці  $Q$  (див. рис.). Тоді, як відомо,

$$AP = \frac{AB + AC - BC}{2} \text{ і } CQ = \frac{AC + CD - AD}{2}.$$

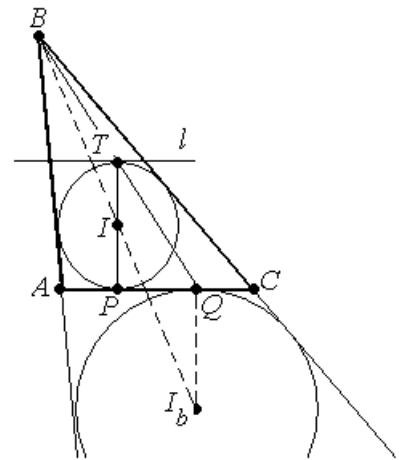
Оскільки  $AB - BC = CD - AD$ , то  $AP = CQ$ .

Нехай вписане коло трикутника  $ABC$  дотикається сторони  $AC$  в точці  $P$ , а відрізок  $PT$  є діаметром цього кола. Якщо пряма  $BT$  перетинає сторону  $AC$  в точці  $Q$ . Тоді спільна точка  $Q$  прямої  $BT$  і сторони  $AC$  є точкою дотику зовнішнього кола трикутника  $ABC$  зі стороною  $AC$  (див. рис.).

Для доведення треба провести через точку  $T$  пряму  $l \parallel AC$  і розглянути гомотетію з центром у

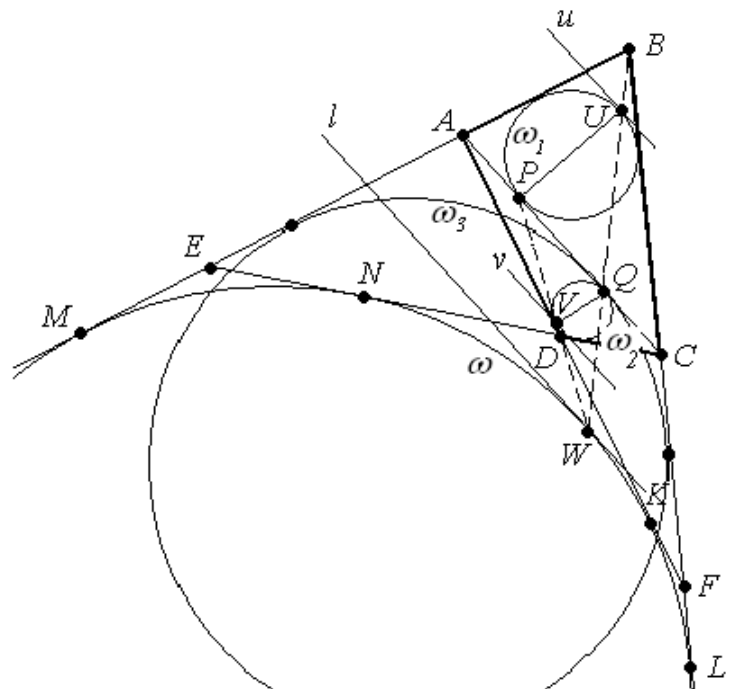
точці  $B$  та коефіцієнтом  $k = \frac{BQ}{BT}$ .

Розглянемо зовнішні кола  $\omega_3$  і  $\omega_4$  трикутників  $ABC$  і  $ACD$  відповідно, які дотикаються до сторони  $AC$ . Тоді, за доведеним,  $\omega_3$  дотикається до  $AC$  в точці  $Q$ , а  $\omega_4$  дотикається до  $AC$  в точці  $P$ . Точки  $P$  і  $Q$  не співпадають, оскільки  $AB \neq BC$ .



Нехай прямі  $l, u, v$ , кожна з яких паралельна до  $AC$ , — дотичні до кіл  $\omega, \omega_1, \omega_2$  відповідно,  $W, U, V$  — відповідні точки дотику (див. рис.). Зазначимо, що на цьому рисунку коло  $\omega_4$  не зображено.

Розглянемо таку гомотетію з центром  $B$  і коефіцієнтом, більшим від одиниці, якою коло  $\omega_1$  відображається в коло  $\omega_3$ . Цією гомотетією точка  $U$  відображається в точку  $Q$ , а тому точки  $B, U, Q$  колінеарні. А гомотетія з центром  $B$  і відповідним коефіцієнтом, більшим від одиниці, яка відображає коло  $\omega_1$  у коло  $\omega$ , точку  $U$  відображає в



точку  $W$ . Отже, точки  $B, U, W$  колінеарні. Відтак, точки  $B, U, Q, W$  лежать на одній прямій.

Аналогічно, використовуючи гомотетії з центром  $D$  та відповідними від'ємними коефіцієнтами, ми доводимо, що точки  $D, V, P, W$  колінеарні.

Оскільки  $v \mathbf{PAC}$  і  $u \mathbf{PAC}$ , то  $VQ$  і  $UP$  — діаметри кіл  $\omega_2$  і  $\omega_1$  відповідно, причому ці діаметри перпендикулярні до  $AC$ , тобто  $VQ \perp UP$ . Це означає, що точка  $W$ , яка лежить на  $\omega$ , є центром гомотетії, що відображає коло  $\omega_1$  у коло  $\omega_2$ .

Коефіцієнт такої гомотетії дорівнює  $\frac{UP}{VQ}$ . Тоді, як відомо, спільні зовнішні дотичні цих кіл перетинатимуться в центрі гомотетії, тобто в точці  $W$ , що й треба було довести.

### Розв'язання 2.

Продемонструємо тригонометричне доведення (деякі технічні деталі залишаємо читачам). Нехай  $AB < BC$ . Для зручності в цьому розв'язанні коло  $\omega$  будемо позначати як  $\omega_3$ . Нехай  $O_1, O_2, O_3$  — центри кіл  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  відповідно, а  $r_1, r_2, r_3$  — їхні радіуси. Нехай  $P$  — точка дотику кола  $\omega_1$  та прямої  $AC$ ,  $S$  — точка дотику кола  $\omega_1$  та прямої  $BC$ ,  $Q$  — точка дотику кола  $\omega_2$  та прямої  $AC$ ,  $R$  — точка дотику кола  $\omega_3$  та прямої  $BC$ . Зауважимо, що  $AP = CQ$  (див. розв'язання 1). Позначимо  $x = AP = CQ$ ,  $y = CP$ . Нехай точка  $X$  є точкою перетину спільних зовнішніх дотичних кіл  $\omega_1$  та  $\omega_2$ . Покладемо  $\angle ABC = 2\alpha$ ,  $\angle BAC = 2\beta$ ,  $\angle ACB = 2\varphi$ ,  $\angle ACD = 2\psi$ ,  $\angle DCR = 2\delta$ .

Тоді  $\alpha + \beta + \varphi = \varphi + \psi + \delta = 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r_1}{y}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{r_1}{x}$ ,  $\operatorname{tg} \psi = \frac{r_2}{x}$ .

Звідси одержуємо:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \beta} = \frac{r_1(x + y)}{xy - r_1^2},$$

$$\operatorname{ctg} \delta = \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi} = \frac{xr_1 + yr_2}{xy - r_1 r_2}.$$

Оскільки  $y + r_1 \operatorname{ctg} \alpha = CS + SB = BC = r_3(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \delta)$ , то знаходимо, що

$$r_3 = \frac{xy - r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

Далі,

$$O_1 O_3 = BO_3 - BO_1 = \frac{r_3 - r_1}{\sin \alpha} = \frac{xy - r_1^2}{(r_1 - r_2) \sin \alpha},$$

$$O_2 O_3 = O_2 D + O_3 D = \frac{r_2 + r_3}{\sin \beta} = \frac{xy - r_2^2}{(r_1 - r_2) \sin \beta},$$

$$O_1 O_2 = \sqrt{(y - x)^2 + (r_1 + r_2)^2}.$$

Позаяк  $\frac{XO_2}{XO_1} = \frac{r_2}{r_1}$ , то  $XO_2 = \frac{r_2 \cdot O_1 O_2}{r_1 - r_2}$ ,  $XO_1 = \frac{r_1 \cdot O_1 O_2}{r_1 - r_2}$ .

Маємо:

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 (\varphi + \beta) = (\cos \varphi \cos \beta - \sin \varphi \sin \beta)^2 = \frac{(xy - r_1^2)^2}{(y^2 + r_1^2)(x^2 + r_1^2)},$$

$$\sin^2 \beta = \frac{(xy - r_2^2)^2}{(y^2 + r_2^2)(x^2 + r_2^2)}.$$

Застосуємо тепер теорему косинусів для трикутників  $O_1O_3X$  та  $O_1O_2O_3$ :

$$\begin{aligned} O_3X^2 &= O_1O_3^2 + XO_1^2 - 2O_1O_3 \cdot O_1X \cos \angle XO_1O_3 = \\ &= \frac{(xy - r_1^2)^2}{(r_1 - r_2)^2 \sin^2 \alpha} + \frac{r_1^2 O_1O_2^2}{(r_1 - r_2)^2} - 2O_1O_3 \cdot \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot O_1O_2 \cdot \frac{O_1O_3^2 + O_2O_1^2 - O_2O_3^2}{2O_1O_3 \cdot O_1O_2} = \\ &= \frac{(xy - r_1^2)^2}{(r_1 - r_2)^2 \sin^2 \alpha} + \frac{r_1^2 O_1O_2^2}{(r_1 - r_2)^2} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot \frac{(xy - r_1^2)^2}{(r_1 - r_2)^2 \sin^2 \alpha} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot O_1O_2^2 + \\ &\quad + \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot \frac{(xy - r_2^2)^2}{(r_1 - r_2)^2 \sin^2 \beta} = \left( \frac{xy - r_1 r_2}{r_1 - r_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Ми довели, що  $r_3 = O_3X$ , із чого й випливає твердження задачі.

### Розв'язання 3.

Як ми зараз побачимо, ця складна задача розв'язується і за допомогою комплексних чисел (потрібні формули, а також інші відомості щодо застосування комплексних чисел для розв'язування планіметричних задач містяться, наприклад, у [11-14]). Будемо вважати, що коло  $\omega$  є одиничним колом комплексної площини (його центр — точка  $O$  — відповідає комплексному числу  $z=0$ ), його рівняння —  $z \cdot \bar{z} = 1$ . Маленькими латинськими літерами, як і завжди, будемо позначати комплексні числа, що відповідають “однойменним” точкам із розв'язання 1. Нехай через точку  $S$  проведено пряму  $\mathbf{l}$  (будемо вважати, що пряма  $\mathbf{l}$  не містить точку  $O$ ). Візьмемо точку  $Y \notin \mathbf{l}$ . Розглянемо вектор одиничної довжини  $\bar{g} \perp \mathbf{l}$ , який напрямимо так, щоб скалярний добуток  $\bar{g} \cdot \bar{YS}$  був додатним, якщо точки  $Y$  і  $O$  лежать по різні боки від прямої  $\mathbf{l}$ , і від'ємним — у протилежному випадку. Нагадаємо, що величина  $d(Y; \mathbf{l}) = \bar{g} \cdot \bar{YS}$  називається *орієнтованою відстанню* від точки  $Y$  до прямої  $\mathbf{l}$ . Якщо  $Y \in \mathbf{l}$ , то  $d(Y; \mathbf{l}) = 0$ . Якщо  $g$  — таке комплексне число з одиничним модулем, що його радіус-вектор дорівнює вектору  $\bar{g}$ , то в термінах геометрії комплексної площини  $d(Y; \mathbf{l}) = \frac{1}{2}(g\bar{y} + \bar{g}y - g\bar{s} - \bar{g}s)$  (пропонуємо читачеві самостійно довести цю формулу).

Будемо також неодноразово використовувати такий відомий факт: непаралельні дотичні до кола  $z \cdot \bar{z} = 1$ , проведені в його точках  $s_1$  та  $s_2$ , перетинаються в точці  $s = 2(\bar{s}_1 + \bar{s}_2)^{-1}$ .

Нехай коло  $\omega_1$  має центр  $Z_1(z_1)$  і радіус  $r_1$ , а коло  $\omega_2$  — центр  $Z_2(z_2)$  і радіус  $r_2$ . Через  $w$  позначимо комплексне число, яке відповідає точці перетину спільних зовнішніх дотичних цих двох кіл. Тоді  $\frac{w - z_1}{r_1} = \frac{w - z_2}{r_2}$ ,  $w = \frac{z_1 r_2 - z_2 r_1}{r_2 - r_1}$ .

Оскільки центр кола  $\omega_1$  лежить на прямій  $BO$ , то  $z_1 \bar{b} = \bar{z}_1 b$ , і, з урахуванням рівності  $b = 2(\bar{m} + \bar{l})^{-1}$ , маємо:  $z_1 = ml \bar{z}_1$ .

Зрозуміло, що  $r_1 = d(Z_1; AC) = -d(Z_1; AB)$ ,  $r_2 = -d(Z_2; AC) = d(Z_2; AB)$ . Візьмемо комплексне число  $\tau$  з радіус-вектором, перпендикулярним  $AC$ , таке, що  $|\tau| = 1$  і  $d(Z_1; AC) = \frac{1}{2}(\tau \bar{z}_1 + \bar{\tau} z_1 - 2\lambda)$ , де  $\lambda = \frac{\tau a + \bar{\tau} a}{2}$ . Оскільки пряма  $AB$  дотикається до кола  $\omega$  в точці  $M$ , то  $d(Z_1; AB) = \frac{1}{2}(z_1 \bar{m} + \bar{z}_1 m - 2)$  (ми врахували, що  $m \bar{m} = 1$ ).

Із рівності  $d(Z_1; AC) + d(Z_1; AB) = 0$  дістаємо:  $z_1 \bar{m} + \bar{z}_1 m - 2 + \tau \bar{z}_1 + \bar{\tau} z_1 - 2\lambda = 0$ . Звідси випливає, з урахуванням рівностей  $z_1 = ml \bar{z}_1$ ,  $m \bar{m} = 1$ ,  $l \bar{l} = 1$ , що  $z_1 = 2(1 + \lambda) / (\bar{m} + \bar{l} + \tau \bar{m} \bar{l} + \bar{\tau})$ .

А тому

$$r_1 = -\frac{1}{2}(z_1 \bar{m} + \bar{z}_1 m - 2) = \frac{-z_1(\bar{m} + \bar{l})}{2} + 1 = \frac{(\tau \bar{m} \bar{l} + \bar{\tau} - \lambda(\bar{m} + \bar{l}))}{(\bar{m} + \bar{l} + \tau \bar{m} \bar{l} + \bar{\tau})}.$$

Далі,  $\lambda = \frac{\tau a + \bar{\tau} a}{2} = \frac{\bar{\tau}}{m+k} + \frac{\tau}{m+k} = \bar{\tau} \left( \frac{mk}{m+k} - \frac{\tau^2}{m+k} \right)$ . Як відомо, пряма, що

проходить через точку  $a$  перпендикулярно радіус-вектору комплексного числа  $\mu \neq 0$ , задається рівнянням  $\frac{\bar{\mu}}{\mu} = -\frac{\bar{z} - a}{z - a}$ . Тому  $\tau^2 = -\frac{a - c}{a - c}$ ,

$$\tau^2 = -\frac{\bar{m} + \bar{k} - \bar{l} - \bar{n}}{m + k - l - n} m k n l.$$

Після спрощення матимемо:  $\lambda = \bar{\tau} \frac{mk - nl}{m + k - n - l}$ . Оскільки  $\lambda = \text{Re}(\tau a)$ , то

$$\lambda = \bar{\lambda} = \tau \frac{\bar{m} \bar{k} - \bar{n} \bar{l}}{m + k - n - l}, \quad \tau(k + m - l - n) = \frac{\bar{\tau}(\bar{k} + \bar{m} - \bar{l} - \bar{n})(km - nl)}{\bar{k} \bar{m} - \bar{n} \bar{l}}.$$

Відтак, стандартними перетвореннями (радимо читачам відтворити їх) знаходимо, що

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{\bar{\tau}(\bar{k} + \bar{m} - \bar{l} - \bar{n})(km - nl)\bar{m}\bar{l}}{\bar{k}\bar{m} - \bar{n}\bar{l}} + \bar{\tau}(k + m - l - n) - \bar{\tau}(\bar{m} + \bar{l})(km - nl) \\
&= \frac{(\bar{m} + \bar{l} + \bar{\tau}\bar{m}\bar{l} + \bar{\tau})(k + m - l - n)}{\bar{\tau} \cdot \frac{-(\bar{k} + \bar{m} - \bar{l} - \bar{n})kn + (k + m - l - n) - (km - nl)(\bar{m} + \bar{l})}{(\bar{m} + \bar{l} + \bar{\tau}\bar{m}\bar{l} + \bar{\tau})(k + m - l - n)}} \\
&= \bar{\tau} \cdot \frac{(\bar{l} - \bar{m})(l - k)(n - m)}{(\bar{m} + \bar{l} + \bar{\tau}\bar{m}\bar{l} + \bar{\tau})(k + m - l - n)}.
\end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}
r_2 &= d(Z_2; AD) = -d(Z_2; AC), \\
z_2 &= 2(1 + \lambda) / (\bar{k} + \bar{n} + \bar{\tau}\bar{k}\bar{n} + \bar{\tau}), \\
r_2 &= \bar{\tau} \cdot \frac{(\bar{k} - \bar{n})(l - k)(n - m)}{(\bar{k} + \bar{n} + \bar{\tau}\bar{k}\bar{n} + \bar{\tau})(k + m - l - n)}.
\end{aligned}$$

Отже, підставляючи отримані вирази до формули  $w = \frac{z_1 r_2 - z_2 r_1}{r_2 - r_1}$ , неважко одержати (зробіть це!), що

$$\begin{aligned}
w &= \frac{2(1 + \lambda)(\bar{k} + \bar{m} - \bar{n} - \bar{l})}{(\bar{k} - \bar{n})(\bar{m} + \bar{l} + \bar{\tau}\bar{m}\bar{l} + \bar{\tau}) - (\bar{l} - \bar{m})(\bar{k} + \bar{n} + \bar{\tau}\bar{k}\bar{n} + \bar{\tau})} \\
&= \frac{2(\bar{k} + \bar{m} - \bar{n} - \bar{l}) + 2\lambda(\bar{k} + \bar{m} - \bar{n} - \bar{l})}{(\bar{k} - \bar{n})(\bar{m} + \bar{l}) - (\bar{l} - \bar{m})(\bar{k} + \bar{n}) + \bar{\tau}(\bar{k} - \bar{n} + \bar{m} - \bar{l}) + \bar{\tau}(\bar{m}\bar{l}(\bar{k} - \bar{n}) - (\bar{l} - \bar{m}))} \\
&= \frac{2(\bar{k} + \bar{m} - \bar{n} - \bar{l}) + 2\tau(\bar{k}\bar{m} - \bar{n}\bar{l})}{2(\bar{m}\bar{k} - \bar{n}\bar{l}) + \bar{\tau}(\bar{k} - \bar{n} + \bar{m} - \bar{l}) + \bar{\tau}(\bar{m}\bar{l}(\bar{k} - \bar{n}) - \bar{k}\bar{n}(\bar{l} - \bar{m}))} \\
&= \frac{2(\bar{k} + \bar{m} - \bar{n} - \bar{l}) + 2\tau(\bar{k}\bar{m} - \bar{n}\bar{l})}{2(\bar{m}\bar{k} - \bar{n}\bar{l}) + \bar{\tau}(\bar{k} - \bar{n} + \bar{m} - \bar{l}) + \bar{\tau}\bar{k}\bar{n}\bar{l}\bar{m}(n + l - m - k)} \\
&= \frac{2(\bar{k} + \bar{m} - \bar{n} - \bar{l}) + 2\tau(\bar{k}\bar{m} - \bar{n}\bar{l})}{2(\bar{m}\bar{k} - \bar{n}\bar{l}) + 2\bar{\tau}(\bar{k} - \bar{n} + \bar{m} - \bar{l})}.
\end{aligned}$$

Помітимо, що

$$2(\bar{k} + \bar{m} - \bar{n} - \bar{l}) + 2\tau(\bar{k}\bar{m} - \bar{n}\bar{l}) = \tau \cdot \left( 2(\bar{m}\bar{k} - \bar{n}\bar{l}) + 2\bar{\tau}(\bar{k} - \bar{n} + \bar{m} - \bar{l}) \right),$$

тобто  $w = \tau$ , що й завершує доведення.

Таке “насичене” розв’язання підкреслює складність цієї красивої та змістовної геометричної задачі.

Для задачі №6 була затверджена Marking Scheme “0-1-2-6-7”: “the problem is essentially solved or problem is essentially unsolved”. За доведення рівності  $AP = CQ$  (чи еквівалентного факту) передбачався 1 бал, ще 1 бал можна було одержати за певні просування щодо геометричної “ідентифікації” точки перетину спільних зовнішніх дотичних до кіл  $\omega_1$  і  $\omega_2$  (якщо в роботі були наявними обидва такі досягнення, то це оцінювалось у 2 бали). 6 балів виставляли, якщо задачу розв’язано, але в роботі є незначні неточності.

На завершення хочу щиро подякувати Заслуженому вчителю України професорові В. М. Лейфурі (м. Миколаїв), Заслуженому вчителю України доцентіві В. А. Ясінському (м. Вінниця), а також координаторам ММО-2008 І. І. Богданову (Росія), Лоренцу Рейчелу (Швейцарія), Константиносу Рокасу (США-Греція) за плідне обговорення задачних матеріалів 49-ої Міжнародної математичної олімпіади.

### РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. І. А. Кушнір, Трикутник і тетраedr у задачах. — К.: Радянська школа, 1991. — 208 с.
2. В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський, Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язування. — Львів: Євросвіт, 1999. — 128 с.
3. А. А. Бухштаб, Теория чисел. — М.: Просвещение, 1966. — 384 с.
4. К. Айерлэнд, М. Роузен, Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987. — 416 с.
5. Г. Дэвенпорт, Высшая арифметика. — М.: Наука, 1965. — 176 с.
6. Э. Трост, Простые числа. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 136 с.
7. В. М. Тихомиров, Теорема Ферма-Эйлера о двух квадратах //Квант, №10(1991), сс. 9-12.
8. Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин, Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. — 400 с.
9. И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко, Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977. — 80 с.
10. С. К. Ландо, Лекции о производящих функциях. — М.: МЦНМО, 2002. — 144 с.
11. З. А. Скопец, Геометрические миниатюры. — М.: Просвещение, 1990. — 224 с.
12. Я. П. Понарин, Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. — М.: МЦНМО, 2004. — 160 с.
13. В. О. Тадеєв, Етюд про комплексні числа та їх застосування до розв’язування планіметричних задач //У світі математики, №1(2002), сс. 50-67; №2(2002), сс. 60-72.
14. В. А. Ясінський, Комплексні числа в планіметричних задачах //Математика, №7(2008), сс. 13-20.