КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Механіко-математичний факультет

Кафедра математичної фізики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Заступник декана
з навчально-виховної роботи

____

«____»____________2017 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Нелінійний аналіз та його застосування

для студентів

галузі знань	11 математика та статистика
спеціальність	111 математика
освітня програма	математика

КИЇВ – 2017

Робоча програма **“Нелінійний аналіз та його застосування”**

для студентів *галузі знань/спеціальності/освітньої програми/* 11 математика та статистика / 111 математика / математика

« 4 » квітня 2017 року – 11с.

Розробник: Мельник Тарас Анатолійович, доктор фізико-математичних наук, професор

Робоча програма дисципліни “*Нелінійний аналіз та його застосування*” затверджена на засіданні кафедри математичної фізики

Протокол № 8 від “ 6 ” квітня 2017 року

Завідувач кафедри ____________________________ В.Г. Самойленко

« 6 » квітня 2017 року

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол від « 24 » квітня 2017 року № 9

Голова науково-методичної комісії ______________________ О.О.Курченко

« 24 » квітня 2017 року

ВСТУП

Навчальна дисципліна “Нелінійний аналіз та його застосування” є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «магістр» галузі знань 11 математика та статистика зі *спеціальності* 111 математика освітньої програми «математика».

Дана дисципліна є обов’язковою.

Викладається у **2** семестрі **1** курсу в обсязі **90 год**. ***(3 кредита ECTS)*** зокрема: *лекції – 28 год., самостійна робота – 60 год.* У курсі передбачено 2 *змістових модулі* та 2 *модульні контрольні роботи*. Завершується дисципліна **заліком у другому семестрі.**

Мета дисципліни – ознайомлення та оволодіння сучасними методами та положеннями нелінійного аналізу та застосування цих методів для дослідження нелінійних крайових задач.

Завдання – набуття студентами необхідних методичних та методологічних теоретичних знань з теорії нелінійного аналізу і практичних навичок застосування сучасних методів дослідження узагальнених розв’язків нелінійних крайових задач еліптичного та параболічного типу.

Структура курсу: основні факти з теорії банахових та соболєвських просторів, зокрема залежних від часової змінної, та їх властивості; основні методи дослідження нелінійних крайових задач: варіаційний метод Ойлера-Лагранжа, метод монотонності та метод компактності, теореми про нерухому точку нелінійних відображень в банахових просторах, за допомогою яких досліджуються деякі модельні крайові задачі для еліптичних та параболічних нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні означення та поняття теорії нелінійного аналізу, а саме:

- простори Соболєва $W^{k,p}(\Omega)$ та їх елементарні властивості,
- простір $H^{-1}(\Omega)$ та його властивості,
- простори $W^{1,p}(0,T;B)$ та їх властивості,
- означення коерцитивного, слабко семі-неперервного знизу та випуклого фунціонала,
- перша та друга варіації,
- рівняння Ойлера-Лагранжа,
- означення семі-неперервного та монотонного оператора,
- означення компактного нелінійного оператора
- формулювати основні теореми даного курсу;

вміти: застосовувати різні методи нелінійного аналізу (варіаційний метод, метод компактності, метод монотонності) до дослідження (встановлення існування, єдиності узагальненого розв'язків) нелінійних крайових задач.

Місце дисципліни (*в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідної спеціальності)*. Обов'язкова навчальна дисципліна ''Нелінійний аналіз та його застосування" є складовою освітнього циклу підготовки фахівців освітнього рівня „магістр".

Зв'язок з іншими дисциплінами. ''Нелінійний аналіз та його застосування" завершує сучасну підготовку по спеціальності ''диференціальні рівняння " і є базовою дисципліною для вивчення спеціальних дисциплін по цій спеціальності, наприклад, ''Комп'ютерне моделювання в математичній фізиці. Аналітичні та чисельні методи сучасної математичної фізики".

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Результати навчальної діяльності студентів з навчальної дисципліни "Нелінійний аналіз та його застосування" оцінюються за модульно-рейтинговою системою за 100-бальною шкалою в цілому за весь курс.

Передбачаються такі форми контролю: *поточний контроль:* відповіді на питання під час лекцій; *модульний контроль:* модульні контрольні роботи (МКР1 та МКР2); *підсумковий контроль:* залік. Також у період з 24.01 по 28.02 студенти один раз на тиждень повинні на електронну адресу викладача надсилати виконані ними завдань самостійної роботи, які передбачені в цій робочій програмі.

Оцінювання за формами контролю:

	ЗМ1		***ЗМ2***	
	Min. – балів	*Max. – балів*	*Min. – балів*	*Max. – балів*
Виконання студентом завдань для самостійної роботи у період з 24 січня по 28 лютого	6	10		
Модульна контрольна робота 1	16	25		
Модульна контрольна робота 2			16	25

Студенти, яким модульна контрольна робота була не зарахована (вони набрали менше 16 балів) і які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум 35 балів,* для допущення до заліку обов'язково повинні написати на потрібну кількість балів додаткову контрольну роботу за матеріалом відповідного модуля для підвищення кількості балів. *Переписування* контрольної роботи та самостійної роботи відбувається на консультаціях викладача і за наявності зробленого самостійного завдання.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу" від 1 жовтня 2010 року.

Після завершення семестру студенти складають залік. За результатами заліку студент може отримати максимум 40 балів. На залік виносяться матеріали усіх лекцій.

Остаточна оцінка за дисципліну "Нелінійний аналіз та його застосування" визначається як сума балів отриманих за самостійну роботу, за змістові модулі плюс кількість балів отриманих на заліку. Бали за змістовий модуль підраховуються як сума балів за кожну модульну контрольну роботу та сума балів за відповіді на питання під час лекцій. Сумарна кількість балів не перевищує 100. При цьому, кількість балів переводиться в оцінку за такою шкалою:

Шкала відповідності

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1. Простори Соболєва

Самостійна робота з теми: Простори Соболєва та їх властивості
(у період з 24 січня по 28 лютого) **(10 год.** *самостійної роботи***)**

Мета цієї роботи навчитись самостійно опрацьовувати як теоретичний матеріал (розділ 5 [1]), так і опанувати практичні методи розв'язання задач (теми 7, 8, 9, 12 [2]).

ТЕМА 1. Простори Соболєва та їх властивості

Узагальнені похідні. Простори Соболєва $W^{k,p}(\Omega)$ *та їх елементарні властивості. Оператор сліду. Теореми вкладення. Простір* $H^{-1}(\Omega)$ *та його властивості. Простори Соболєва залежні від часу* $W^{1,p}(0,T;B)$.

Самостійне завдання 1. Опрацювати: § 1.2 та 1.3 з [1]. Розв'язати задачі 1 – 13 з теми 1 [2].
Самостійне завдання 2. Опрацювати: § 5 з підручника [1]. Розв'язати задачі 1 – 4 з теми 5 [2].

Самостійне завдання 3. Опрацювати: § 6 з підручника [1]. Розв'язати задачі 1 – 8 з теми 6 [2].

Самостійне завдання 4. Опрацювати: § 8 з [1].

Самостійне завдання 5. Опрацювати: § 9 [1].

Перша модульна контрольна робота «Простори Соболєва»

На контрольну роботу виносяться задачі з тем 5 – 9 з [2]. Контрольна робота проводиться на початку березня.

ЗРАЗОК МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 1

1. Знайти слід функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 < 1, \\ 2, & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

2. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^2$ і $\partial\Omega \in C^1$. Чи кожна функція з простору $W^{1,3}(\Omega)$ буде належати до простору $L^{21}(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$.
3. Знайти спряжений простір до простору $L^5(0,a;H_0^1(\Omega))$.
4. Банаховий простір V неперервно вкладається в бананoвий простір W. Чи можна стверджувати, що $W^* \in V^*$? Відповідь обґрунтувати.
5. Довести, що оператро Лапласа $-\Delta: H_0^1(\Omega) \longmapsto H^{-1}(\Omega)$ є ізометричним оператором

Коментарі: *Кожне завдання буде оцінюватися до 5 балів. При розв'язанні задач потрібно робити детальні пояснення.*

Змістовий модуль 2. Варіаційний метод Ойлера-Лагранжа та метод монотонності

ТЕМА 2. Варіаційний метод Ойлера-Лагранжа.. .... (10 *год.*)

Перша тадруга варіація, рівняння Ойлера-Лагранжа. Опуклі функції. Коерцитивність та напівнеперервність знизу функціонала. Застосування варіаційної теорії до задач з обмеженнями:нелінійні спектральні задачі, варіаційні нерівності, гармонічні відображення.

ТЕМА 3. Метод монотонності..**(10 *год.*)**

Означення монотонної вектор-функції. Лема про нуль векторного поля. Теорема про існування узагальненого розв'язку еліптичної крайової задачі для квазілінійного диференціального рівняння дивергентного типу. Метод Мінті-Браудера. Теорема єдності узагальненого розв'язку.

ТЕМА 4. Застосування теорем про нерухому точку до дослідження нелінійних крайових задач... **(8 *год.*)**

Теорема Банаха про нерухому точку. Теорема Шаудера про нерухому точку. Теорема Лере-Шаудера про нерухому точку. Застосування цих теорем до дослідження нелінійних крайових задач.

Друга модульна контрольна робота
«Варіаційний метод Ойлера-Лагранжа»,

На контрольну роботу виносяться задачі з теми 2 (§ 14 та 15 з [1]).

ЗРАЗОК МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 2

1. Виписати рівняння Ойлера-Лагранжа для функціоналу

$$I[u] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\right)dx$$

   де $F(z) = \int_0^z f(y)dy$.

2. Довести, що функціонал $I[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ є випуклим.

3. Довести, що функціонал $I[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ є слабко семі-неперервним знизу.

4. Довести, що мінімізатор функціоналу

$$I[\omega] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla \omega|^2 - f\cdot\omega\right)dx$$

   на множині $\mathcal{A} := \{\omega \in H_0^1(\Omega) \mid \quad \omega \geq h \quad \text{м. с. в } \Omega\}$, де задана функція $f \in L^2(\Omega)$, а функція $h: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, яка називається обмеженням і належить до простору $C_0^\infty(\Omega)$, є узагальненим розв'язком варіаційної нерівності

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\omega - u)\,dx \geq \int_\Omega f(\omega - u)dx \quad \forall \omega \in \mathcal{A}.$$

Коментарі: *Перші три завдання будуть оцінюватися до 6 балів, четверте – до 7 балів.*

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ

1. Означення $*$-слабкої збіжності та властивості такої збіжності.
2. Співвідношення між банановими просторами та їх спряженими просторами. Сума та перетин бананових просторів.
3. Простори $L^p(a, b; X)$ та їх властивості.
4. Означення семі-неперервного та монотонного оператора.
5. Означення коерцитивних, слабко нижньо семінеперервних та випуклих фунціоналів заданих на банановых просторах.
6. Перша та друга варіації. Рівняння Ойлера – Лагранжа.
7. Використовуючи метод компактності, довести теорему про існування розв'язку початково-крайової задачі для нелінійного гіперболічного диференціального рівняння
$$u'' - \Delta u + |u|u^{\delta} = f \ .$$
8. Використовуючи метод монотонності, довести теорему про існування розв'язку початково-крайової задачі для нелінійного параболічного диференціального рівняння
$$u' - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \ .$$
9. Використовуючи варіаційний метод, довести теорему про існування розв'язку нелінійної спектральної задачі
$$-\Delta u = \lambda g(u) \ \text{ в } \ \Omega, \quad u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \, .$$

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№ Теми	Назва теми	Лекції	Самостійна робота
Змістовий модуль 1. Простори Соболєва та їх властивості			
1	Самостійна робота у період з 24 січня по 28 лютого:(Простори Соболєва)		10
Перша модульна контрольна робота			2
Змістовий модуль 2. Варіаційний метод Ойлера-Лагранжа та метод монотонності			
2	Варіаційний метод Ойлера-Лагранжа	10	16
Друга модульна контрольна робота			2
3	Метод монотонності	10	16
4	Застосування теорем про нерухому точку до дослідження нелінійних крайових задач	8	14
Всього годин за лекції та самостійну роботу		28	60

Тема № 2. Варіаційний метод Ойлера-Лагранжа

Лекція 1. Приклади нелінійних диференціальних рівнянь в природо-знавстві. Огляд основних методів нелінійного аналізу. Банахові простори, спряжені до них та рефлексивні простори. (2 год.)

Лекція 2. Перша та друга варіація, рівняння Ойлера-Лагранжа. Опуклі функції. Коерцитивність та напівнеперервність знизу функціонала. Теорема про існування мінімізанта (2 год.)

Лекція 3. Застосування варіаційної теорії до задач з обмеженнями: нелінійні спектральні задачі. (2 год.)

Лекція 4. Застосування варіаційної теорії до задач з обмеженнями: варіаційні нерівності. (2 год.)

Лекція 5. Застосування варіаційної теорії до задач з обмеженнями: гармонічні відображення. (2 год.)

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 1-5 (16 год.)

Література [1, 2, 3].

Тема № 3. Метод монотонності.

Лекція 6. Означення монотонної вектор-функції. Лема про нуль векторного поля. (2 год.)

Лекція 7. Постановка задачі та поняття узагальненого розв’язку. Нелінійної крайової задачі дивергентного типу. Доведення допоміжних лем. (2 год.)

Лекції 8-9. Теорема про існування узагальненого розв’язку еліптичної крайової задачі для квазілінійного диференціального рівняння дивергентного типу. Метод Мінті-Браудера. (4 год.)

Лекція 10. Теорема єдності узагальненого розв’язку. (2 год.)

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 6-10 (16 год.)

Література [1, 4, 5].

Тема № 4. Застосування теорем про нерухому точку до дослідження нелінійних крайових задач

Лекція 11. Теорема Банаха про нерухому точку. Теорема Шаудера про нерухому точку. (2 год.)

Лекція 12. Теорема Лере-Шаудера про нерухому точку. (2 год.)

Лекції 13-14. Застосування теорем про нерухому точку до дослідження нелінійних крайових задач. (4 год.)

Самостійна робота з вивчення матеріалу лекцій 11-14 (14 год.)

Література [1, 4, 5].

Рекомендована література

а) основна література:

1. Т.А. Мельник, А.П. Креневич, *Теорія просторів Соболєва та узагальнені розв’язки крайових задач*. Підручник – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2017.

2. Т.А. Мельник, *Простори Соболєва та узагальнені розв’язки задач математичної фізики.* Навчальний посібник – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006.

3. Т.А.Мельник, *Простори Соболєва та узагальнені розв'язки задач математичної фізики*. Методичні вказівки до самостійної роботи зі спеціального курсу. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005.

4. L.C. Evans, *Partial differential equations*. – Graduate Studies in Math., Vol. 19, American Mathematical Society, 1999.
5. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* - М.: Мир, 1972.
6. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978.
7. Методичні вказівки до практичних занять із дисципліни "Диференціальні рівняння з частинними похідними" для студентів механіко-математичного факультету / Упорядники: Креневич А.П., Ловейкін А.В. – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2016.

б) додаткова література:

8. Y. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*. – Berlin: Springer, 2006.

9. Л. К. Эванс, *Методы слабой сходимости для нелинейных уравнений с частными производными.* – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2006.