

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Механіко-математичний факультет

Кафедра геометрії, топології і динамічних систем

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора
з навчальної роботи

« ____ » _____ 20__ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ¹

Сучасна топологія

для студентів

галузь знань	11 математика та статистика
спеціальність	111 математика
освітня програма	математика

КИЇВ – 2017

¹ Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролю.

Робоча програма «Сучасна топологія»

для студентів галузі знань/спеціальності/освітньої програми 11 математика та статистика / 111 математика / математика

« 24 » квітня 2017 року - 10 с.

Розробники²: Пришляк Олександр Олегович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Робоча програма дисципліни «Сучасна топологія» затверджена на засіданні кафедри геометрії, топології і динамічних систем

Протокол № 9 від « 12 » квітня 2017 року

Завідувач кафедри _____ (Парасюк І.О.)
(підпис) (прізвище та ініціали)

« 12 » квітня 2017 року

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол № 9 від « 24 » квітня 2017 року

Голова науково-методичної комісії _____ (Курченко О.О.)
(підпис) (прізвище та ініціали)

« 24 » квітня 2017 року

© О.О. Пришляк, 2017 рік

² Розробляється лектором. Робоча програма навчальної дисципліни розглядається на засіданні кафедри (циклової комісії – для коледжів), науково-методичної комісії факультету/інституту (раді навчального закладу - коледжу), підписується завідувачем кафедри (головою циклової комісії), головою науково-методичної комісії факультету/інституту (головою ради) і затверджується заступником декана/директора інституту з навчальної роботи (заступником директора коледжу).

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Сучасна топологія» є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «магістр» галузі знань 11 математика та статистика зі спеціальності 111 математика освітньої програми «математика».

Дана дисципліна є обов'язковою.

Викладається у **першому** семестрі **1** курсу в обсязі **90 год. (3 кредитів ECTS³)** зокрема: *лекції – 20 год., практичні – 8 год., консультації – 2 год., самостійна робота – 60 год.* У курсі передбачено **2 змістових модулі та 2 модульні контрольні роботи.** Завершується дисципліна **заліком.**

Мета дисципліни – оволодіння теоретичними положеннями та методами гомотопічної топології, теорії гомологій, гладких многовидів.

Завдання – набуття студентами необхідних методичних та методологічних знань і практичних навичок застосування гомотопічної топології, теорії гомологій, гладких многовидів для розв'язання задач в топології та інших розділах математики, їх використання в подальших курсах з математики, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Структура курсу: гомотопічна топологія, кліткові простори, накриття та розшарування, фундаментальна група, гомотопічні групи, групи гомологій, їх властивості та застосування.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: означення та приклади гомотопних відображень, означення та приклади гомотопічно еквівалентних просторів, означення та приклади кліткових просторів, накриттів та розшарувань, означення та властивості фундаментальної групи, означення та властивості груп гомологій та когомологій кліткових просторів, властивості гомотопічних та гомологічних інваріантів многовидів;

вміти: знаходити фундаментальну групу кліткового простору, знаходити групи гомологій та когомологій кліткових просторів, будувати кліткові розбиття многовидів та знаходити їх гомотопічні та гомологічні інваріанти, будувати діаграми Хегора, будувати діаграми Кірбі.

Місце дисципліни (в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідної спеціальності). Обов'язкова навчальна дисципліна „Сучасна топологія” є складовою освітнього циклу підготовки фахівців освітнього рівня „магістр”.

Зв'язок з іншими дисциплінами. Сучасна топологія базується на циклі дисциплін професійної та практичної підготовки, зокрема «Диференціальна геометрія та топологія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння». Вона використовується при вивченні сучасних курсів з геометрії, топології, якісної теорії диференціальних рівнянь та інших.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти. Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою. У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входить тема 1, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) входять теми 2 та 3.

³ кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

Оцінювання за формами контролю:

	ЗМ1		ЗМ2	
	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>
Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи	5	10	5	10
Модульна контрольна робота 1	8	20		
Модульна контрольна робота 2			8	20

Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум 35 балів*, для одержання заліку обов'язково повинні написати на потрібну кількість балів додаткову контрольну роботу за матеріалом відповідного семестру та доскладають домашні завдання для підвищення балів за виконання самостійної роботи.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

Розрахунок балів, які студент отримує при успішній здачі заліку:

	Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	<i>залік</i>	Підсумкова оцінка
Мінімум	24	11	25	60
Максимум	40	20	40	100

При цьому, кількість балів:

- **1-59** відповідає оцінці «не зараховано»;
- **60- 100** відповідає оцінці «зараховано».

Шкала відповідності (за умови іспиту)

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою	
90 – 100	5	відмінно
85 – 89	4	добре
75 – 84		
65 – 74	3	задовільно
60 – 64		
35 – 59	2	незадовільно
1 – 34		

Шкала відповідності (за умови заліку)

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	Зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1. Гомотопічна топологія.

ТЕМА 1. Гомотопічна топологія (40 год.)⁴

Базові поняття загальної топології. Операції з топологічними просторами: циліндр, конус, надбудова, приклеювання, простори відображень, петель. Гомотопія та гомотопічна еквівалентність. Ретракти. Кліткові простори. Теорема Борсука. Теорема про кліткову апроксимацію. Фундаментальна група. Обчислення фундаментальної групи кліткового простору. Накриття. Теорема про підняття відображення. Гомотопічні групи. Гомотопічна послідовність пари. Теорема Уайтхеда. Розширення. Теорема про накриваючу гомотопію. Гомотопічна послідовність розширення.

Змістовий модуль 2. Гомології та многовиди

ТЕМА 2. Теорія гомологій (40 год.)

Сингулярні гомології. Гомології кліткових просторів. Обчислення гомологій класичних просторів. Зв'язок між гомотопічними групами та групами гомологій: теорема Гуревича. Гомології з коефіцієнтами та когомології. Гомології многовидів. Двоїстість Пуанкаре. Векторні розширення.

ТЕМА 3. Топологія гладких многовидів (36 год.)

Гладкі многовиди. Орієнтація. Дотичне розширення. Вкладення та занурення. Теорема про вкладення многовидів. Трансверсальність. Зведення до загального положення. Апроксимації. Невироджені критичні точки. Функції Морса. Розклад на ручки. Класифікація двовимірних многовидів. Вузли та зачеплення. Теорема Редемайстера. Фундаментальна група вузла. Інваріанти вузлів та зачеплень. Оснащені зачеплення. Діаграми Кірбі.

⁴ Зазначається загальна кількість годин з урахуванням лекцій, практичних (семінарських, лабораторних) і самостійної роботи.

**СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ, ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

Теми	Назва теми I семестр	Кількість годин				
		Лекції	Практичні заняття	Самост. робота	Контр. модульна робота	Інші форми контролю
Змістовий модуль 1. Гомотопічна топологія						
1	Гомотопічна топологія	10	4	30	2	
Змістовий модуль 2. Елементи топології						
2	Теорія гомологій	6	2	16	2	
3	Топологія гладких многовидів	4	2	14		
Всього годин за I семестр		20	8	60	4	

Змістовий модуль 1. Теорія гомотопій.

Тема 1. Теорія гомотопій.

Лекція 1. Операції на топологічних просторах з відміченою точкою – 2 год.

Лекція 2. Елементи теорії груп . Гомотопні відображення – 2 год.

Лекція 3. Кліткові простори – 2 год.

Лекція 4. Фундаментальна група. Накриття – 2 год.

Лекція 5. Гомотопічні групи. Розшарування – 2 год.

Практичне заняття 1. Гомотопні відображення та гомотопічно еквівалентні простори.– 2 год.

Практичне заняття 2. Фундаментальна група кліткового простору.– 2 год.

Завдання для самостійної роботи (30 год.)

1. Перевірка означення категорії та функтора на прикладах.
2. Приклади кофункторів.
3. Знаходження гомотопії між відображеннями.
4. Побудова гомотопічної еквівалентності між просторами.
5. Побудова кліткових розбиттів для класичних просторів.
6. Фундаментальна група накриваючого простору.
7. Перевірка точності гомотопічної послідовності пари.
8. Опрацювання лекційного матеріала.
9. Розв'язання задач.

Контрольні запитання до теми 1

1. Як визначаються такі операції з топологічними просторами: циліндр, конус, надбудова, приклеювання, простори відображень, петель?
2. Навести приклади гомотопії та гомотопічної еквівалентності.
3. Чим відрізняється ретракт від деформаційного ретракту?.
4. Який зв'язок між скінченністю та компактністю кліткового простору?
5. Чому неперервне відображення кола в сферу гомотопне постійному відображенню?
6. Як знаходити фундаментальну групу кліткового простору?
7. Що буде універсальним накриттям проєктивного простору?
8. Як залежать гомотопічні групи від вибору відміченої точки?
9. Навести приклад локально тривіального розшарування.

Типова контрольна робота:

1. Показати, що гомотопічна еквівалентність є відношенням еквівалентності.

2. Якщо в X існує шлях між точками x_0 і y_0 , то $\pi_2(X, x_0) \approx \pi_2(X, y_0)$.
3. Знайти $\pi_1(X)$, де $X = \Sigma(0, 0)$.
4. Чи стягується по собі в точку векторний простір \mathbb{R}^n ?
5. Довести, що має місце ізоморфізм $\pi_n(\bigvee_k S^n) \cong \bigoplus_k \pi_n(S^n)$

Змістовий модуль 2. Гомології та многовиди.

Тема 2. Теорія гомологій.

Лекція 6. Симплиціальні комплекси. Симплиціальні гомології – 2 год.

Лекція 7. Сингулярні гомології. Відносні групи гомологій – 2 год.

Лекція 8. Аксиоми теорії гомологій. Кліткові гомології. Когомології – 2 год.

Практичне заняття 3. Обчислення груп гомологій та когомологій – 2 год.

Завдання для самостійної роботи (16 год.)

1. Ейлерова характеристика.
2. Δ -комплекс.
3. Симплиціальні гомології сфер.
4. Точні послідовності ланцюгових комплексів.
5. Комутативні діаграми.
6. Властивості гомологій з коефіцієнтами
7. Обчислення груп когомологій.
8. Опрацювання лекційного матеріала.
9. Розв'язання задач.

Контрольні запитання до теми 2

1. Як задається орієнтація симплексу?
2. Як будується барицентричне під розбиття?
3. Як визначається ланцюгова гомотопія?
4. Чим відрізняються сингулярні гомології від симплиціальних?
5. Як знайти гомології об'єднання двох просторів, якщо відомі гомології цих просторів та гомології їх перетину?
6. Які групи гомологій та когомологій мають сфери?
7. Як обчислюються гомології кліткових просторів?

Тема 3. Топологія гладких многовидів

Лекція 9. Гладкі многовиди та їх відображення. Функції Морса – 2 год.

Лекція 10. Групи гомологій та когомологій многовидів – 2 год.

Практичне заняття 4. Гладкі многовиди та їх групи гомологій – 2 год.

Завдання для самостійної роботи (14 год.)

1. Приклади гладких многовидів.

2. Дотичний вектор як диференціювання функцій.
3. Векторне поле як переріз дотичного розшарування.
4. Розбиття та діаграми Хегора.
5. Вузли. Теорема Редемайстера. Група вузла та її представлення.
6. Діаграми Кірбі тривимірних та чотиривимірних многовидів. Рухи Кірбі.
7. Опрацювання лекційного матеріала.
8. Розв'язання задач.

Контрольні запитання до змістового модуля 2

1. Чи буде декартів добуток (об'єднання) гладких многовидів гладким многовидом?
2. В евклідові простори яких розмірностей вкладаються (занурюються) гладкі 2-многовиди?
3. Чи може образ при гладкому відображенні мати більшу розмірність чим прообраз?
4. Які з проєктивних просторів є орієнтованими многовидами?
5. Які з проєкцій тора (як поверхні обертання кола) на координатні осі є функціями Морса?
6. Якою є група тривіального вузла?

Типова контрольна робота

1. Який простір вийде, якщо в 2-симплексі $\Delta(v_0, v_1, v_2)$ ототожнити ребро (v_0, v_1) з ребром (v_1, v_2) за лінійним гомеоморфізмом, що зберігає порядок вершин. Обчислити його групи гомологій.
2. Нехай A ретракт X . Довести, що

$$H^n(X; G) \approx H^n(A; G) \oplus H^n(X, A; G).$$
3. Гомології з коефіцієнтами
4. Обчислити групи гомологій та когомологій простору $T^2 \vee (\mathbf{RP}^2 \cup D^2)$ так, що $\mathbf{RP}^2 \cap D^2 = \mathbf{RP}^1 = \partial D^2$
5. Довести, що якщо M – накриваючий простір над N , то M буде гладким многовидом \Leftrightarrow гладким многовидом буде N .

Перелік запитань на залік

1. Базові поняття загальної топології: топологічний простір, відкриті та замкнені множини, внутрішність та замикання, окіл, неперервність та гомеоморфізм, зв'язність, аксіоми відокремлення, база топології, топологічний добуток та фактортопологія. Класичні топологічні простори.
2. Операції з топологічними просторами: циліндр, конус, надбудова, приклеювання, простори відображень, петель.
3. Гомотопія та гомотопічна еквівалентність. Ретракти.
4. Кліткові простори. Теорема Борсука. Теорема про кліткову апроксимацію.

5. Фундаментальна група. Обчислення фундаментальної групи кліткового простору.
6. Накриття. Теорема про підняття відображення.
7. Гомотопічні групи. Гомотопічна послідовність пари. Теорема Уайтхеда.
8. Розшарування. Теорема про накриваючу гомотопію. Гомотопічна послідовність розшарування.
9. Сингулярні гомології. Гомології кліткових просторів. Обчислення гомологій класичних просторів.
10. Зв'язок між гомотопічними групами та групами гомологій: теорема Гуревича.
11. Гомології з коефіцієнтами та когомології.
12. Гомології многовидів. Двоїстість Пуанкаре.
13. Векторні розшарування.
14. Гладкі многовиди. Орієнтація. Дотичне розшарування. Вкладення та занурення.
15. Теорема про вкладення многовидів. Трансверсальність. Зведення до загального положення. Апроксимації.
16. Невироджені критичні точки. Функції Морса. Розклад на ручки.
17. Класифікація двовимірних многовидів.
18. Вузли та зачеплення. Теорема Редемайстера. Фундаментальна група вузла. Інваріанти вузлів та зачеплень.
19. Оснащені зачеплення. Діаграми Кірбі.

Типова залікова робота

1. Довести, що циліндр та лист М'юбіуса гомотопічно-еквівалентні.
2. Довести теорему про накриваючий шлях.
3. Знайти групи гомологій проективної площини.
4. Знайти фундаментальну групу пляшки Клейна.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

а) основна:

1. С. В. Матвеев. Лекции по алгебраической топологии. - М., 2002
2. О.О.Пришля. Основи сучасної топології. К. 2006.
3. А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс. Курс гомотопической топологии. М. 1989.
4. В.А.Рохлин, Д.Б. Фукс. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М. 1977

б) додаткова:

5. А. Дольд. Лекции по алгебраической топологии. М. 1976.
6. Э. Спеньер. Алгебраическая топология. М.1971.
7. М. Хирш. Дифференциальная топология. М. 1979.
8. О.О.Пришляк. Теорія Морса. К. 2002.