

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Механіко-математичний факультет

Кафедра геометрії, топології і динамічних систем

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора
з навчальної роботи

«___» _____ 20__ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ¹

Основи сучасної геометрії

для студентів

галузь знань

0402 фізико-математичні науки

напрямок підготовки

040201 математика

КИЇВ – 2017

¹ Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролю.

Робоча програма «**Основи сучасної геометрії**»

для студентів *галузі знань /напрямку підготовки* 0402 фізико-математичні науки/
040201 математика

«24» квітня 2017 року - 13 с.

Розробник²: Пришляк Олександр Олегович, доктор фізико-математичних наук,
професор.

Робоча програма дисципліни «*Основи сучасної геометрії*» затверджена на засіданні
кафедри геометрії, топології і динамічних систем

Протокол № 9 від «12» квітня 2017 року

Завідувач кафедри _____
(підпис)

(Парасюк І.О.)
(прізвище та ініціали)

«12» квітня 2017 року

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол № 9 від «24» квітня 2017 року

Голова науково-методичної комісії _____ (Курченко О.О.)
(підпис) (прізвище та ініціали)

«24» квітня 2017 року

© О.О.Пришляк, 2017 рік

² Розробляється лектором. Робоча програма навчальної дисципліни розглядається на засіданні кафедри (циклової комісії – для коледжів), науково-методичної комісії факультету/інституту (раді навчального закладу - коледжу), підписується завідувачем кафедри (головою циклової комісії), головою науково-методичної комісії факультету/інституту (головою ради) і затверджується заступником декана/директора інституту з навчальної роботи (заступником директора коледжу).

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Основи сучасної геометрії» є складовою є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за *освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр»* галузі знань 0402

з *напрямку підготовки 040201 математика,*

Дана дисципліна є дисципліною вільного вибору.

Викладається у **другому семестрі 4 курсу** в обсязі **90 год. (3 кредитів ECTS³)** зокрема: *лекції – всього 42 год., консультацій 6 год., самостійна робота – 42 год.* У курсі передбачено 2 *змістових модулі* та 2 *модульні контрольні роботи*. Завершується дисципліна **заліком**.

Мета дисципліни – оволодіння теоретичними положеннями та методами геометрії гладких многовидів, груп та алгебр Лі, головних та векторних розшарувань, зв'язності, ріманової та інших геометричних структур на многовидах.

Завдання – набуття студентами необхідних методичних та методологічних знань і практичних навичок застосування геометричних структур при роботі з многовидами, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Структура курсу: тензорна алгебра не на многовидах, групи та алгебри Лі, головні розшарування та зв'язності на них, векторні розшарування, ріманові та псевдо ріманові структури.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: означення та приклади гладких многовидів, означення тезора на многовиді та його властивості, означення головного розшарування та зв'язності на ньому, структурні рівняння груп Лі, головних розшарувань, властивості ріманових многовидів, властивості комплексних та ермітових структур;

вміти: визначати чи є задана простір гладким многовидом, знаходити алгебри Лі для груп Лі, знаходити тензори кривини та скруту, будувати ріманові, комплексні та ермітові структури на многовидах, застосовувати метод приєднаних G-структур.

Місце дисципліни (в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідної спеціальності). Навчальна дисципліна „Основи сучасної геометрії” є складовою освітнього циклу підготовки фахівців освітнього рівня „бакалавр”.

Зв'язок з іншими дисциплінами. Навчальна дисципліна «Основи сучасної геометрії» базується на циклі дисциплін професійної та практичної підготовки, зокрема «Диференціальна геометрія та топологія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння». Вона використовується при вивченні сучасних курсів з геометрії, топології, якісної теорії диференціальних рівнянь та інших.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти. Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою. У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1-3, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) входять теми 4-5. У період з 23.01 по

28.02 студенти один раз на тиждень повинні на електронну адресу викладача надсилати виконані ними завдань самостійної роботи, які передбачені в цій робочій програмі. За результатами виконаних у цей період завдань студент повинен отримати не менше 5 балів.

Оцінювання за формами контролю:

	<i>ЗМ1</i>		<i>ЗМ2</i>	
	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>
Виконання студентом завдань для самостійної роботи у період з 23 січня по 28 лютого	5	10		
Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи	1	10	3	15
Модульна контрольна робота 1	3	10		
Модульна контрольна робота 2			3	15

Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум 35 балів*, для одержання заліку обов'язково повинні написати на потрібну кількість балів додаткову контрольну роботу за матеріалом відповідного семестру та доскладають домашні завдання для підвищення балів за виконання самостійної роботи.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

Форма заліку в кожному семестрі – письмово-усна.

Розрахунок балів, які студент отримує при успішній здачі заліку:

	Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	залік	Підсумкова оцінка
<i>Мінімум</i>	<i>17</i>	<i>18</i>	<i>25</i>	<i>60</i>
Максимум	30	30	40	100

При цьому, кількість балів:

- **1-59** відповідає оцінці «не зараховано»;

• **60-100** відповідає оцінці «зараховано».

•

• **Шкала відповідності**

•

•

•

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100 («відмінно»)	зараховано
85 – 89 («дуже добре»)	
75 – 84 («добре»)	
65 – 74 («задовільно»)	
60 – 64 («достатньо»)	
1 – 59 («не задовільно»)	не зараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ОСНОВИ СУЧАСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ»

Змістовий модуль 1. Зв'язність на головному розшаруванні.

ТЕМА 1. Тензорна алгебра на многовидах (10 год.)⁴

Гладкі структури на многовидах. Приклади. Гладкі відображення многовидів. Гладкі функції на многовидах. Критичні та особливі точки. Три означення дотичного вектора. Їх еквівалентність. Дотичний простір. Диференціал відображення. Векторні поля на многовидах. Траєкторії. Особливі точки. Ріманова метрика. Векторне поле градієнта. Тензорна алгебра гладкого многовида. Алгебра Грассмана гладкого многовида. Оператор зовнішнього диференціювання. ϕ -зв'язані векторні поля. Захоплення й антизахоплення тензорів при гладких відображеннях. Розподіл та інтегрованість. Локальні потоки на многовидах Диференціювання Лі.

ТЕМА 2. Групи Лі та алгебри Лі (18 год.)

Групи Лі. Явна побудова гладкої структури на групі $O(n, \mathbb{R})$. Конструкція Келі. Алгебри Лі. Алгебра Лі групи Лі. Структурні рівняння груп Лі. Гомоморфізми груп Лі й алгебр Лі. Підгрупи Лі. Однопараметричні підгрупи груп Лі й експонентне відображення. Властивості гомоморфізмів груп Лі й алгебр Лі. Неперервні гомоморфізми. Експонентне відображення для повно лінійно групи. Накриття груп Лі. Замкнені підгрупи групи Лі. Приєднане зображення. Автоморфізми й диференціювання білінійних операцій і форм. Приєднана група. Форма Кіллінга. Нанівпрості алгебри Лі. Компактні групи Лі. Компактні алгебри Лі. Повна лінійна група. Деякі підгрупи Лі в $GL(n, \mathbb{C})$ і їх алгебри Лі

ТЕМА 3. Головні розшарування (16 год.)

Дія груп на многовидах Однорідні простори Фундаментальні векторні поля. Визначення та приклади головних розшарувань. Структурні рівняння головного розшарування. Зв'язності в головних розшаруваннях. Горизонтальний ліфт. Гомоморфізми зв'язностей. Структурні рівняння зв'язності. Теорема Картана-Лаптева. Існування та приклади зв'язностей в головних розшаруваннях.

Змістовий модуль 2. Геометричні структури на многовидах

ТЕМА 4. Векторні розшарування (20 год.)

Векторне розшарування як головне розшарування реперів. Узагальнена лема Картана. Структурні рівняння головного розшарування реперів Основна

⁴ Зазначається загальна кількість годин з урахуванням лекцій, практичних (семінарських, лабораторних) і самостійної роботи.

*теорема тензорного аналізу. Зв'язність у головному розшируванні реперів
Контраваріантна форма структурних рівнянь Коваріантне
диференціювання. Альтернативне визначення афінної зв'язності.
Компоненти тензорів скруту й кривини Тотожності Біанкі та Річі. Тензор
афінної деформації. Паралелізм і геодезичні.*

ТЕМА 5. Ріманові та псевдоріманові структури

(20 год.)

*Існування ріманової та псевдоріманової структур. Основна теорема
ріманової геометрії. $O(n,s,R)$ -структура . Тензор Рімана-Кристоффеля.
Секційна кривина. Тензор Річчі. Комплексні структури.*

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ, ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№ теми	Назва теми II семестр	Кількість годин				
		лекції	практичні заняття	Самост. робота	Контр. модульна робота	Інші форми контролю
Змістовий модуль 1 Зв'язність на головному розшаруванні						
1	Самостійна робота у період з 23 січня по 28 лютого: Тензорна алгебра на многовидах			10		
2	Групи Лі та алгебри Лі	12		6		
3	Головні розшарування	10		6	2	
Змістовий модуль 2 Геометричні структури на многовидах						
4	Векторні розшарування	10		10		
5	Ріманові та псевдоріманові структури	10		10	2	
Всього годин		42		42		

Змістовий модуль 1. Зв'язність на головному розшаруванні

Самостійна робота у період з 23 січня по 28 лютого.

Тема 1. Тензорна алгебра на многовидах (10 год. самостійної роботи)

Самостійне завдання 1. Опрацювати: Розділ 2 Тензорна алгебра на многовидах: §1 Алгебра гладких функцій, §2 Векторні поля [3, 83-91]. Розв'язати задачі 5.1.9, 5.1.10 [4].

Самостійне завдання 2. Опрацювати: Розділ 2 Тензорна алгебра на многовидах: §3 Дотичні вектор, §Алгебра Лі векторних полів [3, стор.92-98]. Розв'язати задачі 5.1.11, 5.1.12 [4].

Самостійне завдання 3. Опрацювати: Розділ 2 Тензорна алгебра на многовидах: §5 Тензорна алгебра, §Алгебра Грасмана [3, стор.105-117]. Розв'язати задачі 5.1.13, 5.1.14 [4].

Самостійне завдання 4. Опрацювати: Розділ 2 Тензорна алгебра на многовидах: §7 Диференціал відображення §8 Захоплення тензорів [3, стор.115-120]. Розв'язати задачі 5.1.15, 5.1.16 [4].

Самостійне завдання 5. Опрацювати: Розділ 2 Тензорна алгебра на многовидах: §10 Локальні потоки §11 Диференціювання Лі [3, стор.259-263]. Розв'язати задачі 5.1.17 -19 [4].

Тема 2. Групи та алгебри Лі.

Лекція 1 Групи Лі. Конструкція Келі - 2 год.

Лекція 2. Алгебри Лі. Алгебра Лі групи Лі. Структурні рівняння груп Лі.
– 2 год.

Лекція 3. Гомоморфізми груп Лі й алгебр Лі. Підгрупи Лі. – 2 год.

Лекція 4. Приєднане зображення. – 2 год.

Лекція 5. Форма Кіллінга. Напівпрості алгебри Лі.– 2 год.

Лекція 6. Компактні групи Лі. Компактні алгебри Лі.– 2 год.

Консультація. Знаходження алгебр Лі груп Лі. - 4 год.

Самостійна робота 6 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань)

Контрольні питання і завдання:

1. Групи Лі. Явна побудова гладкої структури на групі $O(n, \mathbb{R})$. Конструкція Келі
2. Алгебри Лі. Алгебра Лі групи Лі. Структурні рівняння груп Лі
3. Гомоморфізми груп Лі й алгебр Лі
4. Підгрупи Лі
5. Однопараметричні підгрупи груп Лі й експонентне відображення.
6. Властивості гомоморфізмів груп Лі й алгебр Лі
7. Неперервні гомоморфізми
8. Повна лінійна група
9. Замкнені підгрупи групи Лі
10. Приєднане зображення
11. Автоморфізми й диференціювання білінійних операцій і форм
12. Приєднана група
13. Форма Кіллінга
14. Напівпрості алгебри Лі
15. Компактні групи Лі
16. Компактні алгебри Лі

Тема 3. Головні розшарування

Лекція 7. Однорідні простори – 2 год.

Лекція 8. Головні розшарування – 2 год.

Лекція 9. Зв'язності в головних розшаруваннях – 2 год.

Лекція 10. Структурні рівняння зв'язності – 2 год.

Лекція 11. Існування зв'язностей – 2 год.

Самостійна робота 6 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань)

Контрольні питання і завдання:

1. Дія груп на многовидах Однорідні простори Фундаментальні векторні поля.
2. Визначення та приклади головних розшарувань
3. Структурні рівняння головного розшарування
4. Визначення зв'язності в головних розшаруваннях. Горизонтальний ліфт
5. Гомоморфізми зв'язностей
6. Структурні рівняння зв'язності. Теорема Картана-Лаптева
7. Існування та приклади зв'язностей

Типове завдання модульної контрольної роботи № 1.

1. Перевірити чи буде атлас на сфері, карти якого задаються проектуваннями на координатні площини, гладко еквівалентний атласу, що задається стереографічними проекціями?
2. Знайти критичні точки функції відстані однопорожненого гіперболоїда до початку координат.
3. Знайти траєкторії поля градієнта функції $f(x,y)=x^2-y^2$.

Змістовий модуль 2. Геометричні структури на многовидах

Тема 4. Векторні розшарування

Лекція 12. Векторне розшарування як головне розшарування реперів – 2 год.

Лекція 13. Узагальнена лема Картана – 2 год.

Лекція 14. Основна теорема тензорного аналізу – 2 год.

Лекція 15. Зв'язність у векторному розшаруванні. Коваріантна похідна – 2 год.

Лекція 16. Тотожності Біанкі та Річчі. Паралельний переніс та геодезичні – 2 год.

Самостійна робота 10 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань)

Контрольні питання і завдання:

1. Довести існування зв'язностей в головних розшаруваннях. Навести приклади.

2. Подати векторне розшарування як головне розшарування реперів.
3. Довести узагальнену лему Картана. Вивести структурні рівняння головного розшарування реперів
4. Довести основну теорему тензорного аналізу.
5. Як задається зв'язність у головному розшаруванні реперів
6. Дати альтернативне визначення афінної зв'язності. Як знаходити компоненти тензорів скруту й кривини?
7. Тотожності Біанкі та Річі.

Тема 5. Ріманові та псевдоріманові структури

Лекція 17. Існування ріманової та псевдоріманової структур – 2 год.

Лекція 18. Зв'язність Леві-Чівіта – 2 год.

Лекція 19. Тензор Рімана-Кристоффеля – 2 год.

Лекція 20. Секційна кривина. Тензор Річчі – 2 год.

Лекція 21. Комплексні структури – 2 год.

Консультація Знаходження зв'язності Леві-Чевіта та тензорів Рімана-Кристоффеля та Річчі. – 2 год.

Самостійна робота 10 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань)

Контрольні питання і завдання:

1. Що таке тензор афінної деформації? Як паралельно перенести тензор вздовж кривої?
2. Властивості коваріантного диференціювання.
3. Довести існування ріманової та псевдоріманової структур.
4. Основна теорема ріманової геометрії.
5. Тензор Рімана-Кристоффеля.
6. Секційна кривина. Тензор Річчі
7. Комплексифікація лінійного простору. Комплексні структури.

Типове завдання модульної контрольної роботи № 2.

1. Довести узагальнену лему Картана.
2. Знайти коефіцієнти тензору ріманової зв'язності тривимірної сфери при стандартному вкладенні в чотиривимірний простір.
3. Довести тотожність Річчі.

Перелік питань на залік

1. Топологічні та гладкі многовиди. Приклади гладких многовидів
2. Алгебра гладких функцій гладкого многовида. Гладкі відображення гладких многовидів

3. Дотичні вектори, дотичний простір. Дотичні вектори як інфінітезимальні диференціювання на гладкому многовиді. Диференціал гладкого відображення.
4. Векторні поля на многовидах. Векторні поля як диференціювання алгебри функцій на гладкому многовиді. Алгебра Лі векторних полів гладкого многовида.
5. Тензорна алгебра гладкого многовида. Алгебра Грассмана гладкого многовида. Оператор зовнішнього диференціювання. \mathfrak{f} -зв'язані векторні поля. Захоплення й анти- захоплення тензорів при гладких відображеннях
6. Розподіл та інтегрованість. Локальні потоки на многовидах Диференціювання Лі.
7. Групи Лі. Явна побудова гладкої структури на групі $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$. Конструкція Келі
8. Алгебри Лі. Алгебра Лі групи Лі. Структурні рівняння груп Лі.
9. Гомоморфізми груп Лі й алгебр Лі. Підгрупи Лі. Однопараметричні підгрупи груп Лі й експонентне відображення. Властивості гомоморфізмів груп Лі й алгебр Лі. Неперервні гомоморфізми. Експонентне відображення для повно лінійно групи. Накриття груп Лі.
10. Замкнені підгрупи групи Лі. Приєднане зображення. Автоморфізми й диференціювання білінійних операцій і форм. Приєднана група
11. Форма Кіллінга. Напівпрості алгебри Лі.
12. Компактні групи Лі. Компактні алгебри Лі. Повна лінійна група. Деякі підгрупи Лі в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ і їх алгебри Лі
13. Дія груп на многовидах Однорідні простори Фундаментальні векторні поля
14. Визначення та приклади головних розшарувань. Структурні рівняння головного розшарування
15. Зв'язності в головних розшаруваннях. Горизонтальний ліфт. Гомоморфізми зв'язностей
16. Структурні рівняння зв'язності. Теорема Картана-Лаптева
17. Існування та приклади зв'язностей в головних розшаруваннях.
18. Векторне розшарування як головне розшарування реперів.
19. Узагальнена лема Картана. Структурні рівняння головного розшарування реперів
20. Основна теорема тензорного аналізу.
21. Зв'язність у головному розшаруванні реперів Контраваріантна форма структурних рівнянь
22. Коваріантне диференціювання. Альтернативне визначення афінної зв'язності. Компоненти тензорів скруту й кривини
23. Тотожності Біанкі та Річі.
24. Тензор афінної деформації. Паралелізм і геодезичні.
25. Існування ріманової та псевдоріманової структур.
26. Основна теорема ріманової геометрії.
27. $\mathbf{O}(n, s, \mathbf{R})$ -структура .
28. Тензор Рімана-Кристоффеля .
29. Секційна кривина. Тензор Річчі
30. Тензорні добутки модулів. Комплексифікація лінійного простору
31. Комплексні структури.

Типове завдання для заліку.

1. Диференціювання Лі.
2. Структурні рівняння зв'язності.
3. Тотожності Біанкі.
4. Тензор Рімана-Кристоффеля.

Рекомендована література

Базова

1. Кобаяши Ш., Номидзу К. Основания дифференциальной геометрии. В 2-х томах. М., Наука, 1981.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Наука, 1976.
3. Кузаконь В.М., Кириченко В.Ф., Пришляк А.О. Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти. К. Ін-т математики. 2013.
4. Кованцов Н.И. и др. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ: Сб. задач. К. Выща шк., 1989.

Додаткова

5. Пришляк О., Лукова-Чуйко Н. Диференціальна геометрія та топологія. Курс лекцій. Вид-во “Зовнішня торгівля”, Київ, 2012.
6. Постников М.М. Группы и алгебры Ли. М., Наука, 1982.
7. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М., Мир, 1964.