КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Механіко-математичний факультет
Кафедра геометрії, топології і динамічних систем

«**ЗАТВЕРДЖУЮ**»
Заступник декана/директора
з навчальної роботи

____

"____"______________2017 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ГЕОМЕТРІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

для студентів

галузі знань 0402 Фізико-математичні науки
напрям підготовки 6.040201 Математика

Київ – 2017

Робоча програма «Геометрія динамічних систем»
для студентів *галузі знань/напряму підготовки* 0402 Фізико-математичні науки/ 6.040201 Математика

"_24_" _квітня_ 2017 року — 16 с.

Розробники:
Парасюк Ігор Остапович, доктор фізико-математичних наук, професор
Пришляк Олександр Олегович, доктор фізико-математичних наук, професор

Робоча програма дисципліни __Геометрія динамічних систем__
затверджена на засіданні кафедри геометрії, топології і динамічних систем,
протокол №9 від "_12_" _квітня_ 2017 р.

Завідувач кафедри

____________________ (І. О. Парасюк)
"_12_" _квітня_ 2017 р.

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету,
протокол № 9 від "_24_" _квітня_ 2017 р.

Голова науково-методичної комісії ____________________ (Курченко О.О.)
"_24_" __квітня__ 2017 р.

Вступ

Навчальна дисципліна Геометрія динамічних систем є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «Бакалавр» галузі знань 0402 фізико-математичні науки напряму 6.040201 математика спеціалізації «Геометрія, топологія і динамічні системи».

Дана дисципліна за вибором викладається у 8 семестрі 4 курсу в обсязі **90 год. 3 кредити ECTS**, зокрема лекції — 42 год., консультації — 6 год., самостійна робота — 42 год.
У курсі передбачено 2 змістові модулі та 2 модульні контрольні роботи. Формою підсумкового контролю у 8 семестрі є залік.

Мета дисципліни — оволодіння основами геометричної теорії динамічних систем, базовими поняттями й методами, які використовуються в цій теорії, ознайомлення з топологічними властивостями потоків на поверхнях.

Завдання — сформувати чітке уявлення про теорію динамічних систем як одну з найбільш перспективних галузей сучасної математики, підготувати студентів до використання отриманих знань у подальшій професійній діяльності, сприяти розвитку логічного та аналітичного мислення студентів, підвищити їхню загальну математичну культуру.

Структура курсу: Основні поняття. Лінійні динамічні системи, класифікація фазових портретів двовимірних лінійних систем, спряження векторних полів і потоків, лінеаризація систем, динамічні системи на площині, граничні цикли, обертання векторного поля, векторні поля Морса-Смейла та їх топологічна класифікація на поверхнях, поля косого градієнта.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: поняття векторного поля, потоку, неперервної та дискретної динамічної системи, граничної множини траєкторії, циклу, обертання векторного поля, відображення Пуанкаре; індексу Кронекера – Пуанкаре; основні види відношень еквівалентності, які використовуються в теорії динамічних систем; основні факти теорії Пуанкаре – Бендіксона; топологічні властивості потоків Морса-Смейла та гамільтонових потоків на поверхнях.

вміти: будувати потоки інтегровних динамічних систем; будувати фазові портрети лінійних динамічних систем в $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{R}^3$; застосовувати теорему про випрямлення векторного поля, теорему Гробмана – Гартмана; класифікувати двовимірні системи за відношенням топологічної еквівалентності; визначати характер поведінки траєкторій в околі ізольованого циклу; обчислювати індекс Кронекера – Пуанкаре особливих точок векторних полів на поверхнях; будувати повні топологічні інваріанти для потоків на поверхнях; описувати можливі структури потоків Морса-Смейла на орієнтованих поверхнях

Зв'язок з іншими дисциплінами. Навчальна дисципліна «Геометрія динамічних систем» передбачає володіння основними поняттями, фактами та методами таких дисциплін, як «Аналітична геометрія», «Лінійна алгебра», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Диференціальна геометрія та топологія». У подальшому набуті знання використовуватимуться при вивченні поглиблених курсів з геометрії, топології та динамічних систем.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою відповідно до «Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка» від 1 жовтня 2010 року, рішення вченої ради механіко-математичного факультету від 14 лютого 2014 року. У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1, 2 та 3, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) входять теми 4 та 5. Обов'язковим для допуску до заліку є написання 1-ї та 2-ї модульних контрольних робіт.

Самостійна робота у період з 23.01 по 28.02. У зазначений період студент один раз на тиждень на електронну адресу викладача надсилає виконані ним завдання самостійної роботи, які передбачені в цій робочій програмі. Оцінка за кожне завдання становить від 0 до 5 балів. На основі цих оцінок виводиться сумарна середня оцінка. За результатами виконаних у цей період завдань студент має отримати сумарну середню оцінку не менше 3 балів.

Поточний контроль. Оцінюється активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи (опрацювання лекційного матеріалу, виконання домашніх завдань, відпрацювання пропущених лекцій з поважної причини).

Письмові модульні роботи. Аудиторна письмова робота полягає в самостійному виконанні студентом певної кількості завдань протягом обмеженого часу в присутності не менше ніж одного викладача. Тривалість аудиторної письмової роботи, кількість завдань, їх типи та кількість балів за кожне завдання оголошуються студентам заздалегідь.

Якщо завдання передбачає відтворення теоретичного матеріалу, то студенту в процесі виконання модульної роботи, забороняється використання будь-яких зовнішніх джерел інформації та засобів комунікації, передавання чи отримання будь-яких предметів та будь-яке спілкування з іншими особами за винятком викладача, який проводить аудиторну письмову роботу, виключно для уточнення формулювання завдань.

Якщо завдання не передбачає відтворення теоретичного матеріалу, то студенту дозволяється з дозволу викладача користуватися власним конспектом та забороняється використання будь-яких засобів комунікації й електронних пристроїв, передавання чи отримання будь-яких предметів та будь-яке спілкування з іншими особами за винятком викладача, який проводить аудиторну письмову роботу, виключно для уточнення формулювання завдань.

Перед отриманням білета з завданнями студент має заповнити бланк письмової роботи, вказавши своє прізвище, ім'я та академічну групу. Після отримання білета студент має негайно внести в бланк роботи номер білета. Після вичерпання відведеного на роботу часу студент зобов'язаний негайно припинити виконання письмової роботи та здати її викладачу, який проводить аудиторну письмову роботу.

Після завершення письмової роботи викладач перевіряє правильність виконання завдань і виставляє бали за кожне завдання у таблицю результатів. Викладач має право задати питання студенту щодо виконаних завдань. Студент має право перевірити обґрунтованість виставлених балів і задати питання по роботі викладачу. Після цього викладач виставляє остаточну оцінку за дану письмову роботу.

Оцінювання за формами контролю:

	ЗМ1		ЗМ2	
	Min-балів	Max-балів	Min-балів	Max-балів
Виконання студентом завдань для самостійної роботи у період з 23 січня по 28 лютого	3	5		
Активність на заняттях і виконання позааудиторної самостійної роботи	2	5	5	15
Модульна контрольна робота	12	20	13	15

Студенти, які в семестрі набрали сумарно меншу кількість балів ніж критично-розрахунковий мінімум 35 балів, допускаються до заліку за умови написання додаткової контрольної роботи за матеріалом усього курсу та доопрацювання завдань самостійної позааудиторної роботи на кількість балів, яка в сумі з набраними в семестрі складає не менше 35 . У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перескладання МКР здійснюються у відповідності до "Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу" від 1 жовтня 2010 року.

Форма заліку в 8 семестрі — письмово-усна. Студенту пропонується письмово виконати 4 завдання. Кожне завдання оцінюються від 0 до 8 балів. Додатково від 0 до 8 балів студент отримує за усне опитування. Всього за залік можна отримати від 0 до 40 балів.

	ЗМ1	ЗМ2	Залік	Разом (підсумкова оцінка)
Мінімальна оцінка в балах	17	18	25	60
Максимальна оцінка в балах	30	30	40	100

При цьому, сумарна кількість балів відповідає оцінці:

0–34 – «незараховано» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;

35–59 – «незараховано» з можливістю повторного складання;

60–100 – «зараховано»

Шкала відповідності (за умови заліку)

За 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою
60 – 100	Зараховано
0 – 59	Незараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

VIII Семестр

Модуль I. Вступ до теорії гладких динамічних систем

Тема 1. Основні поняття. Лінійні динамічні системи ....(6 год)
Гладкі динамічні системи в $\mathbb{R}^n$*: векторне поле, автономна система диференціальних рівнянь, потік, фазова крива.Лінійні та афінні динамічні системи: структура потоку, інваріантні підпростори. Класифікація фазових портретів лінійних динамічних систем в* $\mathbb{R}^2$ *та* $\mathbb{R}^3$*. Біфуркації фазових портретів у двовимірному випадку.*

Тема 2. Спряження векторних полів і потоків...............................(6 год)
Спряження векторних полів та потоків. Топологічно та гладко еквівалентні системи. Орбітально еквівалентні системи. Теорема про випрямлення векторного поля в околі неособливої точки. Топологічна спряженість потоків систем зі спільною особливою точкою і спільною функцією Ляпунова. Умови топологічної спряженості потоків лінійних систем. Лінеаризація систем в околі гіперболічного положення рівноваги. Теорема Гробмана – Гартмана.

Тема 3. Динамічні системи на площині...(9 год)
Граничні множини траєкторій та їхні властивості. Структура граничних множин динамічних систем на площині (Теорія Пуанкаре – Бендіксона). Граничні цикли. Відображення Пуанкаре в околі ізольованого циклу. Діаграма Кьонігса – Ламері. Обертання векторного поля на жордановій кривій. Індекс Кронекера-Пуанкаре особливих точок векторних полів на площині.

Модуль II. Топологія векторних полів на поверхнях

Тема 4. Векторні поля Морса-Смейла..(14 год)
Елерова характеристика поверхні. Теорема Пуанкаре-Хопфа. Приклади потоків з однією нерухомою точкою на замкненій поверхні. Ріманова метрика поверхні. Градієнтні потоки. Структурна стійкість потоків. т $\alpha-$ *та* $\omega-$ *граничні множини. Гіперболічні нерухомі точки. Їх стійки та нестікі многовиди, локальна структурна стійкість. Означення та приклади потоків Морса–Смейла на поверхнях. Властивості потоків Морса–Смейла. Топологічна класифікація потоків Морса–Смейла на поверхнях. Потоки Морса–Смейла на поверхнях з межею.*

Тема 5. Поля косого градієнта на поверхнях.................................(7 год)
Орієнтовна форма площи та симплектична структура на поверхні. Означення та приклади поля косого градієнта. Поле косого градієнта простої функції Морса. Граф Кронрода–Ріба. Атоми та молекули полів косого градієнта та полів Морса-Смейла.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ КОНСУЛЬТАЦІЙ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Самостійна робота	Консультації
Змістовий модуль I				
Вступ до теорії гладких динамічних систем				
1	Основні поняття. Лінійні динамічні системи	6	6	1
2	Спряження векторних полів і потоків	6	6	1
3	Динамічні системи на площині	9	9	1
Модульна контрольна робота 1				
Змістовий модуль II				
Топологія векторних полів на поверхнях				
4	Векторні поля Морса-Смейла	14	14	2
5	Поля косого градієнта на поверхнях	7	7	1
Модульна контрольна робота 2				
ВСЬОГО		42	42	6

Загальний обсяг 90 год., у тому числі:

Лекції — 42 год.

Самостійна робота — 42 год.

Консультації — 6 год.

VIII семестр

Змістовий модуль I
Вступ до теорії гладких динамічних систем

Самостійна робота в період з 23 січня по 28 лютого

Тема 1. Основні поняття. Лінійні динамічні системи

Гладкі динамічні системи в $\mathbb{R}^n$: векторне поле, автономна система диференціальних рівнянь, потік, фазова крива. Лінійні та афінні динамічні системи: структура потоку, інваріантні підпростори.Класифікація фазових портретів лінійних динамічних систем в $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{R}^3$. Біфуркації фазових портретів у двовимірному випадку.

Тема 2. Спряження векторних полів і потоків

Спряження векторних полів та потоків. Топологічно та гладко еквівалентні системи. Орбітально еквівалентні системи. Теорема про випрямлення векторного поля в околі неособливої точки. Топологічна спряженість потоків систем зі спільною особливою точкою і спільною функцією Ляпунова. Умови топологічної спряженості потоків лінійних систем.

Завдання для самостійної роботи в період з 23 січна по 28 лютого

1. Опрацювати теоретичний матеріал [2, п. 3.1], [4, 1.2 - 1.5], [5, Chapter 1].

2. Побудувати потік, породжений векторним полем $v(x) = x \cdot (n - x)$ на відрізку $[0, n]$, де n — номер студента в групі. Безпосередньо за явним виглядом побудованого потоку переконатися у наявності групової властивості.

3. Виконати вправи 1.15, 1.16 [4, с. 30]

4. Опрацювати теоретичний матеріал [3, п. 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4.], [4, п. 2.5, 2.6.], [5, Chapter 4]

5. Виконати вправи 2.22 — 2.24 та 2.28 [4, с. 67-69].

6. Для систем з вправи 2.23 описати всі інваріантні лінійні підпростори.

7. Опрацювати теоретичний матеріал [3, п. 1.9.2, п.2.3.3], [4, п. 2.3, п. 2.4, п.2.7].

8. Виконати вправи 2.13, 2.35, 2.36 [4, с.66-67. с.70].

9. Знайти потік $\{g^t : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2\}$ двовимірної системи

$$\dot{x} = -x + 3y, \quad \dot{y} = x + y.$$

   Побудувати фігури $g^1(\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\})$, $g^1(\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\})$.

10. На площині з координатами (a, b) побудувати біфуркаційну діаграму фазових портретів сім'ї систем

$$\dot{x} = ax + y, \quad \dot{y} = x + by.$$

11. Опрацювати теоретичний матеріал [2, пп.3.2, 3.3], [5, Chapter 2, I, III, IV]

12. Знайдіть область, яка містить початок координат і звуження на яку відображення

$$(x, y) \mapsto (x + xy, y - xy)$$

є дифеоморфізмом. Обчисліть результат дії цього дифеомофізму на векторне поле $(x + y, x - y)$.

13. Побудуйте максимальну область, на якій допускає випрямлення векторне поле: а) $(x, 2y)$; б) $(x, -2y)$.

14. Опрацювати теоретичний матеріал [2, пп.3.2, 3.3]

15. Знайти потоки систем наведених нижче. Вказати пари топологічно спряжених систем. Для кожної з систем виписати топологічно спряжену систему, що має діагональну матрицю, елементи головної діагоналі якої належать множині $\{+1, -1\}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 8y - x, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

Тема 2. Спряження векторних полів і потоків (продовження)

Лекція 1 Лінеаризація систем в околі гіперболічного положення рівноваги. Теорема Гробмана – Гартмана. — 3 год.

Самостійна робота.

До лекції 1: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [5, Chapter 5, I-III].

Тема 3. Динамічні системи на площині

Лекція 2 Граничні множини траєкторій та їхні властивості. — 2 год.

Лекція 3 Структура граничних множин динамічних систем на площині (Теорія Пуанкаре – Бендіксона) — 2 год.

Лекція 4 Граничні цикли. Відображення Пуанкаре в околі ізольованого циклу. Діаграма Кьонігса – Ламері — 2 год.

Лекція 5 Обертання векторного поля на жордановій кривій. Індекс Кронекера-Пуанкаре особливих точок векторних полів на площині — 3 год.

Самостійна робота.

До лекції 2: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [2, с. 50-52], [5, Chapter 2, V].
До лекції 3: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [2, п. 7.2], [1, гл. 3, пар. 34, п.5], [4, 3.9].
До лекції 4: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [2, п. 7.3], [4, 3.8].
До лекції 5: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [2, п. 6.2], [1, гл.3, пар. 34, п. 4.].

Типове завдання модульної контрольної роботи 1

1. Побудувати фазовий портрет конкретної лінійної системи — 5 балів
2. Визначити дифеоморфізм, який випрямляє конкретне векторне поле на площині.
3. Властивості ω-граничної множини.
4. Індекс Кронекера – Пуанкаре невироджених особливих точок векторних полів на площині.

Контрольні запитання та завдання до змістового модуля I

1. Означення та властивості потоку, породженого векторним полем.
2. Охарактеризуйте потік породжений лінійним векторним полем.
3. Опишіть типи фазових портретів лінійних систем на площині та в тривимірному просторі.
4. Які потоки називаються топологічно спряженими.
5. Як діє дифеоморфізм на векторне поле.

6. Які динамічні системи називаються орбутальнотопологічно еквівалентними. В чому відмінність від топологічно спряжених систем.

7. Назвіть необхідні і достатні умови топологічної спряженості лінійних систем.

8. Сформулюйте теорему Гробмана – Гартмана.

9. Означення граничної множини траєкторії. Перелічіть основні властивості граничних множин.

10. Опишіть структуру граничних множин систем на площині відповідно до теорії Пуанкаре – Бендіксона.

11. Поясніть, чому ізольований цикл системи на площині є граничною множиною хоча б однієї траєкторії, відмінної від нього.

12. Що таке обертання векторного поля. Випишіть інтегральну формулу обертання.

13. Наведіть класифікацію індексів Кронекера – Пуанкаре невироджених особливих точок векторних полів на площині.

Змістовий модуль II
Топологія векторних полів на поверхнях

Тема 4. Векторні поля Морса-Смейла

Лекція 1 Елерова характеристика поверхні. Теорема Пуанкаре-Хопфа. Приклади потоків з однією нерухомою точкою на замкненій поверхні. — 2 год.

Лекція 2 Ріманова метрика поверхні. Градієнтні потоки. Структурна стійкість потоків. — 2 год.

Лекція 3 $\alpha-$ та $\omega-$ граничні множини. Гіперболічні нерухомі точки. Їх стійки та нестікі многовиди, локальна структурна стійкість. — 2 год.

Лекція 4 Означення та приклади потоків Морса–Смейла на поверхнях. - 2 год.

Лекція 5 Властивості потоків Морса–Смейла - 2 год.

Лекція 6 Топологічна класифікація потоків Морса–Смейла на поверхнях - 2 год.

Лекція 7 Потоки Морса–Смейла на поверхнях з межею - 2 год.

Самостійна робота.

До лекції 1: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [6, с. 223].

До лекції 2: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [7, п. 1.4].

До лекції 3: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [7, п. 4.1].

До лекції 4: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [7, п. 4.2].

До лекції 5: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [7, п. 4.3].

До лекції 6: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [9, Приложение 1].

До лекції 7: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції.

Тема 5. Поля косого градієнта на поверхнях.

Лекція 8 Орієнтовна форма площи та симплектична структура на поверхні. Означення та приклади поля косого градієнта — 2 год.

Лекція 9 Поле косого градієнта простої функції Морса. Граф Кронрода–Ріба — 2 год.

Лекція 10 Атоми та молекули полів косого градієнта та полів Морса-Смейла. — 3 год.

Самостійна робота.

До лекції 8: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [8, п. 1.5].

До лекції 9: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [8, п. 2.1, 2.2].

До лекції 10: Опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекції. Опрацювати матеріал [8, п. 2.3, 2.12].

Типове завдання модульної контрольної роботи 2

1. Визначити мінімальне число особливих точок векторного поля Морса-Смейла на пляшці Клейна.

2. Описати структуру всіх полярних потоків Морса-Смейла на торі.

3. Побудувати граф Кронрода-Ріба функції висоти на торі.

4. Описати молекули всіх потоків Морса-Смейла на сфері з 6 нерухомими точками

Питання, що виносяться на залік

1. Потік, породжений векторним полем.
2. Властивості потоків, породжених лінійними векторними полями.
3. Типи фазових портретів лінійних систем на площині та в тривимірному просторі.
4. Траєкторна еквівалентність та топологічна спряженість потоків.
5. Необхідні і достатні умови топологічної спряженості лінійних систем.
6. Теорема Гробмана – Гартмана.
7. Гранична множина траєкторії.
8. Граничні множини систем на площині відповідно до теорії Пуанкаре – Бендіксона.
9. Обертання векторного поля.
10. Класифікацію індексів Кронекера – Пуанкаре невироджених особливих точок векторних полів на площині.
11. Елерова характеристика поверхні. Теорема Пуанкаре-Хопфа. Приклади потоків з однією нерухомою точкою на замкненій поверхні.
12. Ріманова метрика поверхні. Градієнтні потоки. Структурна стійкість потоків.
13. Гіперболічні нерухомі точки. Їх стійки та нестікі многовиди, локальна структурна стійкість.
14. Означення та приклади потоків Морса–Смейла на поверхнях.
15. Властивості потоків Морса–Смейла.
16. Топологічна класифікація потоків Морса–Смейла на поверхнях.
17. Потоки Морса–Смейла на поверхнях з межею.
18. Орієнтовна форма площи та симплектична структура на поверхні. Означення та приклади поля косого градієнта.
19. Поле косого градієнта простої функції морса. Граф Кронрода–Ріба.
20. Атоми та молекули полів косого градієнта та полів Морса-Смейла.

Типове завдання семестрового контролю

1. Знайти індекси обертання гіперболічних особливих точок на площині.
2. Описати структуру всіх полярних потоків Морса-Смейла на пляшці Клейна.
3. Побудувати граф Кронрода-Ріба заданого поля косого градієнта на сфері.
4. Описати молекули всіх потоків Морса-Смейла на торі з 4 нерухомими точками

Література

[1] Дубровин В.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.

[2] Парасюк І.О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь. — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2005. [http://www.diffeq.univ.kiev.ua/download/QTDR.pdf]

[3] Самойленко А.М., Перестюк І.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. — К: ВПЦ “Київський університет”, 2010.

[4] Arrowsmith D.K, Place C.M. Dynamical Systems. — London: Chapman & Hall, 1992.

[5] Irwin M.C. Smooth dynamical systems. — Singapore – New Jersey – London – Hong Kong: World Scientific, 2001.

[6] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс. М: Мир, 1972.

[7] Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. - М.: Мир, 1986.

[8] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1.- Ижевск.: Издательский дом "Удмуртский университет 1999.

[9] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 2.- Ижевск.: Издательский дом "Удмуртский университет 1999.