

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Механіко-математичний факультет

(назва факультету, інституту)

Кафедра геометрії, топології і динамічних систем

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора
з навчальної роботи

«___» _____ 20__ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ¹

Динамічні системи

(повна назва навчальної дисципліни)

для студентів освітнього рівня «магістр»

галузь знань 11 математика та статистика

спеціальність 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітня програма математика

КИЇВ – 2017

¹ Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролів.

Робоча програма Динамічні системи
(назва дисципліни)

для студентів *галузі знань/спеціальності/освітньої програми* 11 математика та статистика/ 111 математика/ математика

« » _____ 2017 року – 12 с.

Розробник²: д.ф.-м.н., професор **Парасюк І.О.**

Робоча програма дисципліни Динамічні системи
затверджена на засіданні кафедри геометрії, топології і динамічних систем

Протокол № 9 від «12» квітня 2017 року

Завідувач кафедри _____

(підпис)

(Парасюк І.О.)
(прізвище та ініціали)

«12» квітня 2017 року

Схвалено науково - методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол № 9 від «24» квітня 2017 року

Голова науково-методичної комісії _____ (_____)
(підпис) (прізвище та ініціали)

« » _____ 20 року

© І.О. Парасюк, 2017 рік

² Розробляється лектором. Робоча програма навчальної дисципліни розглядається на засіданні кафедри (циклової комісії – для коледжів), науково-методичної комісії факультету/інституту (радї навчального закладу - коледжу), підписується завідувачем кафедри (головою циклової комісії), головою науково-методичної комісії факультету/інституту (головою ради) і затверджується заступником декана/директора інституту з навчальної роботи (заступником директора коледжу).

ВСТУП

Навчальна дисципліна _____ Динамічні системи _____
(назва дисципліни)

є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «магістр» галузі знань 11 математика та статистика зі спеціальності 111_математика освітньої програми «математика»

Дана дисципліна _____ є обов'язковою _____
(обов'язкова, за вибором)

Викладається у 1 та 2 семестрах 1 курсу в обсязі – 120 год.
(зазначається загальний обсяг)

4 (1 у першому семестрі та 3 – у другому) кредитів ECTS³), зокрема: лекції – всього 30 год. (14 год. у першому семестрі та 16 год. у другому семестрі), самостійна робота – 82 год. (12 у першому семестрі та 70 у четвертому семестрі) У курсі передбачено 3 змістових модулів та 3 модульні контрольні роботи, а також по 4 год. консультацій у кожному семестрі. Формами підсумкового контролю є **проміжний контроль** у 1-му семестрі та **іспит** у 2-му семестрі.

Мета дисципліни – ознайомлення з основними поняттями та положеннями теорії динамічних систем, сучасною проблематикою досліджень у цій галузі знань, оволодіння базовими теоретичними та практичними методами аналізу динамічних систем.

Завдання – сформулювати чітке уявлення про теорію динамічних систем як одну з найбільш перспективних галузей сучасної математики, підготувати студентів до використання отриманих знань у подальшій професійній діяльності, сприяти розвитку логічного та аналітичного мислення студентів, підвищити їхню загальну математичну культуру.

Структура курсу: Загальні властивості топологічних динамічних систем, граничні множини, блукаючі та неблукаючі множини, мінімальні множини, динаміка гомеоморфізмів та дифеоморфізмів, структурна стійкість і гіперболічність, основи символічної динаміки, динаміка одновимірних відображень, хаотичні відображення.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні поняття та об'єкти теорії динамічних систем, а саме: поняття неперервної та дискретної динамічних систем (потоків та каскаду); означення граничної множини, стійкості за Лагранжем та Пуассоном, властивості множини неблукаючих точок; поняття мінімальної множини і рекурентного руху; властивості дифеоморфізмів та гомеоморфізми кола; поняття спряженості, еквівалентності потоків та дифеоморфізмів, відображення Пуанкаре, надбудови (підвіски); поняття структурної стійкості, дифеоморфізму Аносова, підкови Смейла, гіперболічної структури; факти з динаміки одновимірних відображень; явище біфуркації подвоєння періоду; порядок Шарковського; поняття про хаотичні відображення, фрактали.

вміти: застосовувати отримані знання при аналізі поведінки окремих типів динамічних систем.

Місце дисципліни (в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідного напрямку). Обов'язкова навчальна дисципліна "Динамічні системи" є складовою освітнього циклу підготовки фахівців освітнього рівня «магістр».

Зв'язок з іншими дисциплінами. Викладання дисципліни "Динамічні системи" передуює вивченню таких математичних дисциплін, як "Аналітична геометрія", "Математичний аналіз", "Лінійна алгебра", "Диференціальні рівняння", "Диференціальна геометрія та топологія", "Комплексний аналіз". У подальшому матеріал курсу "Динамічні системи" використовується при викладанні низки спеціальних курсів.

³ кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1, 2 та 3, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) входять теми 4 та 5. Обов'язковим для допуску до іспиту є написання 1-ї та 2-ї модульних контрольних робіт. У період з 23.01 по 28.02 студенти один раз на тиждень повинні на електронну адресу викладача надсилати виконані ними завдання самостійної роботи, які передбачені в цій робочій програмі. Оцінка за кожне завдання становить від 0 до 5 балів. На основі цих оцінок виводиться сумарна середня оцінка. За результатами виконаних у цей період завдань студент повинен отримати сумарну середню оцінку не менше 3 балів.

Оцінювання за формами контролю⁴:

	ЗМ 1		ЗМ 2		ЗМ 3	
	Min- балів	Max- балів	Min- балів	Max- балів	Min- балів	Max- балів
Виконання студентом завдань для самостійної роботи у період з 23 січня по 28 лютого			3	5		
Активність на заняттях і виконання позааудиторної самостійної роботи	3	5	3	3	3	5
Модульна контрольна робота	8	15	7	12	8	15

Студенти, які в семестрі набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум 35 балів*, допускаються до іспиту за умови написання додаткової контрольної роботи за матеріалом відповідного семестру та доопрацювання завдань самостійної позааудиторної роботи на кількість балів, яка в сумі з набраними в семестрі складає не менше 35.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

Форма іспиту в другому семестрі – письмово-усна. Екзаменаційний білет іспиту складається із 4 завдань, перші три з яких є теоретичними, а останній – задача. Кожне завдання оцінюється від 0 до 8 балів. Додатково від 0 до 8 балів студент отримує за усне опитування. Всього за іспит можна отримати від 0 до 40 балів.

При розрахунку отримаємо:

	Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	Змістовий модуль 3	Іспит	Разом (підсумкова оцінка)
Мінімальна оцінка в балах	11	13	11	25	60
Максимальна оцінка в балах	20	20	20	40	100

⁴ Див. Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу від 1 жовтня 2010 року, а також Розпорядження ректора «Про методику розрахунку підсумкової оцінки дисциплін, які читаються два і більше семестри» від 29 вересня 2010 року

При цьому, кількість балів:

- **1-34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35-59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- **60-64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
- **65-74** відповідає оцінці «задовільно»;
- **75 - 84** відповідає оцінці «добре»;
- **85 - 89** відповідає оцінці «добре» («дуже добре»);
- **90 - 100** відповідає оцінці «відмінно».

Шкала відповідності (за умови іспиту)

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою	
90 – 100	5	Відмінно
85 – 89	4	Добре
75 – 84		
65 – 74	3	Задовільно
60 – 64		
35 – 59	2	не задовільно
1 – 34		

Шкала відповідності (за умови заліку)

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	Зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

I Семестр

Модуль 1. Вступ до топологічної динаміки.

Тема 1. Означення та загальні властивості динамічних систем.....(4 год)
Передумови виникнення теорії динамічних систем. Динамічні системи, породжені однопараметричними групами перетворень. Базові властивості динамічних систем, породжених однопараметричними групами гомеоморфізмів. Класифікація рухів і траєкторій. Нерухомі точки, інваріантні множини.

Тема 2. Граничні властивості динамічних систем.....(6 год)
Граничні точки, граничні множини. Стійкість за Лагранжем. Стійкість за Пуассоном. Неблукуючі точки. Властивості множини неблукуючих точок.

Тема 3. Мінімальні множини і рекурентні рухи.....(4 год)
Мінімальні множини. Рекурентні рухи.

II Семестр

Модуль 2. Основи теорії гладких динамічних систем.

Самостійна робота в період з 23 січні по 28 лютого.

Тема 4. Дифеоморфізми і потоки (самостійна робота 10 год)
Елементарна динаміка дифеоморфізмів. Дифеоморфізми та гомеоморфізми кола. Спряженість, еквівалентність потоків та дифеоморфізмів. Відображення Пуанкаре. Конструкція надбудови (підвіски).

Тема 5. Структурна стійкість і гіперболічність.....(8 год)
Локальна структурна стійкість. Огляд: Потоки на двовимірних многовидах. Дифеоморфізми Аносова. Підкова Смейла. Основи символічної динаміки. Гіперболічна структура та базисні множини.

Модуль 3. Вступ до хаотичної динаміки

Тема 6. Динаміка одновимірних відображень.....(4 год)
Ітеровані відображення. Біфуркація подвоєння періоду. Періодичні точки. Порядок Шарковського.

Тема 7. Хаос.....(4 год)
Поняття про хаотичні відображення. Транзитивність. Чутливість. Приклади хаотичних відображень. Атрактор Лоренца. Хаос і фрактали.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
I семестр

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		Лекції	практичні	самост. робота	Модуль-ні КР
Змістовий модуль 1					
Вступ до топологічної динаміки					
1	Означення та загальні властивості топологічних динамічних систем.	4	–	2	
2	Граничні властивості динамічних систем.	6	–	6	
3	Мінімальні множини і рекурентні рухи.	4	–	4	
Модульна контрольна робота 1					2
ВСЬОГО		14	–	12	

Загальний обсяг 30 год., в тому числі:

Лекції – 14 год.

Самостійна робота - 12 год.

Консультації – 4 год.

II семестр

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		лекції	, практичні	самост. робота	Модуль-ні КР
Змістовий модуль 2					
Основи теорії гладких динамічних систем					
4	Самостійна робота у період з 23 січня по 28 лютого: Дифеоморфізми і потоки. Елементарна динаміка дифеоморфізмів. Дифеоморфізми та гомеоморфізми кола. Спряженість, еквівалентність потоків та дифеоморфізмів. Відображення Пуанкаре. Надбудова (підвіска)			10	
5	Структурна стійкість і гіперболічність.	8	–	20	
Модульна контрольна робота 2					2
Змістовий модуль 3					
Вступ до хаотичної динаміки					
6	Динаміка одновимірних відображень.	4	–	20	
7	Хаос	4	–	20	
Модульна контрольна робота 3					2
ВСЬОГО		16	–	70	

Загальний обсяг 90 год., в тому числі:

Лекцій – 16 год.

Самостійна робота - 70 год.

Консультації – 4 год.

I Семестр

Змістовий модуль 1. Вступ до топологічної динаміки.

Тема 1. Означення та загальні властивості динамічних систем.

Лекція 1. Передумови виникнення теорії динамічних систем. Динамічні системи, породжені однопараметричними групами перетворень. – 2 год.

Лекція 2. Базові властивості динамічних систем, породжених однопараметричними групами гомеоморфізмів. Класифікація рухів і траєкторій. Нерухомі точки, інваріантні множини. – 2 год.

Самостійна робота. Опрацювання лекційного матеріалу і виконання завдань позааудиторної роботи. – 2 год.

Тема 2. Граничні властивості динамічних систем.

Лекція 3. Граничні точки, граничні множини. Стійкість за Лагранжем. – 2 год.

Лекція 4. Стійкість за Пуассоном. – 2 год.

Лекція 5. Неблукаючі точки. Властивості множини неблукаючих точок. – 2 год.

Самостійна робота. Опрацювання лекційного матеріалу і виконання завдань позааудиторної роботи. – 6 год.

Тема 3. Мінімальні множини і рекурентні рухи.

Лекція 6. Мінімальні множини. – 2 год.

Лекція 7. Рекурентні рухи. – 2 год.

Самостійна робота. Опрацювання лекційного матеріалу і виконання завдань позааудиторної роботи. – 4 год.

Контрольні запитання.

1. Наведіть означення динамічної системи у метричному просторі, її траєкторії та півтраєкторії.
2. Що таке групова властивість динамічної системи?
3. Сформулюйте теорему про властивість інтегральної неперервності.
4. Назвіть три основні типи рухів.
5. Наведіть означення інваріантної множини. Назвіть основні властивості інваріантних множин.
6. Сформулюйте теорему про існування точки рівноваги в кулі.
7. Які динамічні системи називаються гомеоморфними?
8. Наведіть означення ω -граничної множини.
9. Назвіть основні властивості граничної множини.
10. Який рух називають стійким за Лагранжем? Сформулюйте критерій стійкості за Лагранжем.
11. У якому вирадку можна гарантувати зв'язність ω -граничної множини?
12. Що означає стійкість руху за Пуассоном? Сформулюйте відповідний критерій.
13. Наведіть означення неблукаючої точки.
14. Назвіть основні властивості множини неблукаючих точок.

15. Яку множину називають центром динамічної системи.
16. Сформулюйте теорему про щільність у центрі точок, стійких за Пуассоном.
17. Яку множину називають мінімальною?
18. Наведіть означення майже рекурентного та рекурентного руху.
19. Сформулюйте теорему про замикання траєкторії майже рекурентного руху.

Зразок типового завдання модульної контрольної роботи №1

1. Основні властивості інваріантних множин. (5 балів)
2. Теорема про зв'язність ω -граничної множини руху, стійкого за Лагранжем. (5 балів)
3. Основні властивості множини неблукаючих точок. (5 балів).

II Семестр

Змістовий модуль 2. Основи теорії гладких динамічних систем.

Самостійна робота в період з 23 січня по 28 лютого.

Тема 4. Дифеоморфізми і потоки.

Елементарна динаміка дифеоморфізмів. Дифеоморфізми та гомеоморфізми кола. Спряженість, еквівалентність потоків та дифеоморфізмів. Відображення Пуанкаре. Конструкція надбудови (підвіски).

Самостійна робота.

Опрацювання теоретичного матеріалу [2, Sec. 1]: 1.2, 1.4 – 1.7, 1.9.

Виконання вправ. [2, Sec. 1]: 1.2.1 – 1.2.5; 1.4.1 – 1.4.5; 1.5.1 – 1.5.4; 1.6.1 – 1.6.6; 1.7.1 – 1.7.6.

Тема 5. Структурна стійкість і гіперболічність.

Лекція 1. Локальна структурна стійкість. – 2 год.

Лекція 2. Огляд: Потоки на двовимірних многовидах. Дифеоморфізми Аносова. – 2 год.

Лекція 3. Підкова Смейла. Основи символічної динаміки. – 2 год.

Лекція 4. Гіперболічна структура та базисні множини. – 2 год.

Самостійна робота. Опрацювання лекційного матеріалу і виконання завдань позааудиторної роботи. – 20 год.

Контрольні запитання та завдання.

1. Наведіть означення дифеоморфізму на многовиді.
2. Що називають числом обертання гомеоморфізму кола.
3. Які потоки називаються топологічно спряженими? Орбітально топологічно еквівалентними.
4. Опишіть конструкцію відображення Пуанкаре
5. Що означає структурна стійкість динамічної системи?
6. Сформулюйте критерій структурної стійкості лінійної динамічної системи.
7. За яких умов нелінійна динамічна система має властивість локальної структурної стійкості в околі точки рівноваги.
8. Сформулюйте теорему про грубість векторного поля в диску та на компактному орієнтованому двовимірному многовиді без межі.
9. Дайте означення системи Морса – Смейла.

10. За яких умов дифеоморфізм кола, який зберігає орієнтацію, є структурно стійким?
11. Охарактеризуйте дифеоморфізм Аносова.
12. Опишіть автоморфізм тора та його ліфт.
13. Чи є аносівський дифеоморфізм тора структурно стійким?
14. Сформулюйте теорему про топологічну спряженість дифеоморфізму з автоморфізмом тора.
15. Опишіть конструкцію підкови Смейла.
16. Поясніть, яким чином підкова Смейла генерує символічну динаміку.
17. Охарактеризуйте динамічну систему, що задовольняє аксіому А.
18. Сформулюйте теорему про спектральну декомпозицію.

Зразок типового завдання модульної контрольної роботи № 2

1. Дослідити потоки $x \rightarrow \exp(At)x$ та $x \rightarrow \exp(Bt)x$, де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq b,$$

на предмет топологічної спряженості та орбітальної топологічної еквівалентності. (10 балів)

2. Описати структурно стійкі дифеоморфізми кола. (10 балів)
3. Конструкція підкови Смейла. (10 балів)

Оцінка за контрольну = 0.4 × (сума набраних балів).

Змістовий модуль 3. Вступ до хаотичної динаміки

Тема 6. Динаміка одновимірних відображень.

Лекція 5. Ітеровані відображення. Біфуркація подвоєння періоду. – 2 год.

Лекція 6. Періодичні точки. Порядок Шарковського. – 2 год.

Самостійна робота. Опрацювання лекційного матеріалу і виконання завдань позааудиторної роботи. – 20 год.

Тема 7. Хаос.

Лекція 7. Поняття про хаотичні відображення. Транзитивність. Чутливість. Приклади хаотичних відображень. Атрактор Лоренца. – 2 год.

Лекція 8. Хаос і фрактали. Ітерована система функцій та атрактор Хатчінсона. – 2 год.

Самостійна робота. Опрацювання лекційного матеріалу і виконання завдань позааудиторної роботи. – 20 год.

Контрольні запитання та завдання.

1. Опишіть явище біфуркації подвоєння періоду.
2. Поясніть, як будується павутинна діаграма для одновимірного відображення.
3. Що можна сказати про періодичні точки відображення, що має точку періоду 3?
4. Сформулюйте теорему Шарковського.
5. Охарактеризуйте хаотичне відображення.
6. Властивості тентоподібного відображення.
7. Сформулюйте теорему про достатні умови чутливості відображення.
8. Що таке фрактал? Що таке атрактор Хатчінсона?

Зразок типового завдання модульної контрольної роботи №1

1. Описати явище біфуркації подвоєння періоду для відображення $x \rightarrow x^2 + c$ при зміні параметра c . (5 балів)
2. Довести що відображення $[-2, 2] \ni x \rightarrow x^2 - 2$ хаотичне. (5 балів)
3. Атрактор Хатчінсона. (5 балів)

Перелік питань на іспит

Динамічні системи, породжені однопараметричними групами перетворень. Базові властивості динамічних систем, породжених однопараметричними групами гомеоморфізмів. Теорема про властивість інтегральної неперервності. Класифікація рухів і траєкторій. Три основних типи рухів. Інваріантні множини та їх властивості. Теорема про існування точки рівноваги в кулі.

Граничні точки, граничні множини. Основні властивості граничної множини. Стійкість за Лагранжем. Критерій стійкості за Лагранжем. Стійкість за Пуассоном. Критерій стійкості за Пуассоном.

Неблукаючі точки. Властивості множини неблукаючих точок. Центр динамічної системи. Теорема про щільність у центрі точок, стійких за Пуассоном. Майже рекурентні та рекурентні рухи. Теорема про замикання траєкторії майже рекурентного руху.

Елементарна динаміка дифеоморфізмів. Дифеоморфізми та гомеоморфізми кола. Спряженість, еквівалентність потоків та дифеоморфізмів. Відображення Пуанкаре. Конструкція надбудови (підвіски).

Означення структурної стійкості (грубості) динамічної системи. Критерій структурної стійкості лінійної динамічної системи. Умови локальної структурної стійкості нелінійної динамічної системи в околі точки рівноваги. Теорема про грубість векторного поля в диску та на компактному орієнтованому двовимірному многовиді без межі. Системи Морса – Смейла. Умови структурної стійкості дифеоморфізма кола. Дифеоморфізм Аносова. Автоморфізм тора та його ліфт. Структурна стійкість аносівського дифеоморфізму тора. Теорема про топологічну спряженість дифеоморфізму з автоморфізмом тора. Підкова Смейла. Символьна динаміка. Динамічна система, що задовольняє аксіому А. Теорема про спектральну декомпозицію.

Одновимірні ітеровані відображення. Біфуркація подвоєння періоду. Періодичні точки. Наслідки існування точки періоду 3. Порядок Шарковського. Хаотичне відображення. Хаотичність тентоподібного відображення. Теорема про достатні умови чутливості відображення. Поняття фрактала. Атрактор Хатчінсона та пов'язана з ним хаотична динаміка.

Приклад екзаменаційного білета

1. Критерій стійкості за Пуассоном
2. Критерій структурної стійкості лінійної динамічної системи.
3. Поняття фрактала.
4. Довести, що коли відображення відрізка в себе має орбіту періоду 2^n , то воно має орбіту періоду 2^k , де $1 \leq k < n$.

Рекомендована література

Базова

1. Сибирский К.С., Введение в топологическую динамику. – Кишинёв: АН МССР, 1970.
2. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975.
3. Arrowsmith D.K., Place С.М. An Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press. – 2001.
4. Irwin M.C. Smooth dynamical systems. — Singapore – New Jersey – London – Hong Kong: World Scientific, 2001.
5. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах.
6. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В., Динамика одномерных отображений. – К.: Наукова думка, 1989.

Додаткова

1. Динамические системы I-V. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР)». Москва, 1985-1986.
2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М. – Л.: Гостехиздат, 1949.
3. Devaney R.L. An introduction to Chaotic Dynamical Systems. – Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
4. Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем – М.: Мир, 1986.
5. Каток А Б, Хассельблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений – М.: МЦНМО, 2005
6. Парасюк І.О., Перестюк М.О. Локальний аналіз нелінійних диференціальних рівнянь. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013.