

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Механіко-математичний факультет

Кафедра геометрії, топології і динамічних систем

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора
з навчальної роботи

« ____ » _____ 20__ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ¹

Диференціальна геометрія та топологія

для студентів

галузь знань	11 математика та статистика
спеціальність	111 математика
освітня програма	математика

КИЇВ – 2017

¹ Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролю.

Робоча програма «**Диференціальна геометрія та топологія**»

для студентів *галузі знань/спеціальності/освітньої програми* 11 математика та статистика / 111 математика / математика

« 24 » квітня 2017 року - 27 с.

Розробники²: Пришляк Олександр Олегович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Робоча програма дисципліни «*Диференціальна геометрія та топологія*» затверджена на засіданні кафедри геометрії, топології і динамічних систем

Протокол № 9 від “ 12 ” квітня 2017 року

Завідувач кафедри _____ (Парасюк І.О.)
(підпис) (прізвище та ініціали)
“ 12 ” квітня 2017 року

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол № 9 від « 24 » квітня _____ 2017 року
Голова науково-методичної комісії _____ (Курченко О.О.)
(підпис) (прізвище та ініціали)
24 » квітня _____ 2017 року

© О.О. Пришляк, 2017 рік

² Розробляється лектором. Робоча програма навчальної дисципліни розглядається на засіданні кафедри (циклової комісії – для коледжів), науково-методичної комісії факультету/інституту (радї навчального закладу - коледжу), підписується завідувачем кафедри (головою циклової комісії), головою науково-методичної комісії факультету/інституту (головою ради) і затверджується заступником декана/директора інституту з навчальної роботи (заступником директора коледжу).

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Диференціальна геометрія та топологія» є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «бакалавр» галузі знань 11 математика та статистика зі спеціальності 111 математика освітньої програми «математика».

Дана дисципліна є обов'язковою.

Викладається у 1 та 2 семестрах 2 курсу в обсязі 248 год. (9 (5 в першому семестрі та 4 в другому семестрі) кредитів ECTS³) зокрема: лекції – всього 56 год. (28 год. у першому семестрі та 28 год. у другому семестрі), практичні 56 год. (28 год. у першому семестрі та 28 год. у другому семестрі), самостійна робота – 146 год. (86 год. у першому семестрі та 60 год. у другому семестрі). У курсі передбачено 4 змістових модулі та 4 модульні контрольні роботи. Завершується дисципліна іспитами в першому і другому семестрах.

Мета дисципліни – оволодіння сучасними методами, теоретичними положеннями та основними застосуваннями диференціальної геометрії та топології в різних задачах математики.

Завдання – підготувати студентів до використання диференціальної геометрії та топології в подальших навчальних курсах, сприяти розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Структура курсу: теорія кривих, елементи топології, теорія поверхонь, гладкі многовиди, тензори.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні поняття диференціальної геометрії, зокрема: крива, поверхня, топологічний простір, гомеоморфізм, тригранник Френе, кривина, скрут, перша і друга квадратичні форми поверхні, повна та середня кривини, геодезичні лінії, тензорне поле;

вміти: задавати криву та поверхню різними способами, застосовувати першу та другу квадратичні форми поверхні при розв'язуванні задач, обчислювати кривину, скрут кривої, повну та середню кривини поверхні, знаходити елементи тригранника Френе, використовувати топологічні поняття та методи, обчислювати коваріантну похідну.

Місце дисципліни (в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідної спеціальності). Обов'язкова навчальна дисципліна „Диференціальна геометрія та топологія” є складовою освітнього циклу підготовки фахівців освітнього рівня „бакалавр”.

Зв'язок з іншими дисциплінами. Диференціальна геометрія та топологія є базовою дисципліною для вивчення таких дисциплін як „Сучасна топологія”, „Динамічні системи”, „Теорія функцій комплексної змінної”, „Функціональний аналіз”.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти. Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою. У змістовий модуль 1 (ЗМ1)

³ кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

входить тема 1, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) входить тема 2, у змістовий модуль 3 (ЗМ3) входить тема 3, у змістовий модуль 4 (ЗМ4) входять теми 4-5. Обов'язковим для допуску до іспиту в першому семестрі є написання 1-ї та 2-ї модульних контрольних робіт з кількістю балів не менше 8 (1-ша) та 8 (2-га), для іспиту в другому семестрі є написання 3-ї та 4-ї модульних контрольних робіт з кількістю балів не менше 8 (3-тя) та 8 (4-та). У період з 23.01 по 28.02 студенти один раз на тиждень повинні на електронну адресу викладача надсилати виконані ними завдань самостійної роботи, які передбачені в цій робочій програмі. За результатами виконаних у цей період завдань студент повинен отримати не менше 5 балів.

Оцінювання за формами контролю:

1 семестр

	ЗМ1		ЗМ2	
	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>
Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи	5	10	5	10
Модульна контрольна робота 1	8	20		
Модульна контрольна робота 2			8	20

2 семестр

	ЗМ3		ЗМ4	
	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>
Виконання студентом завдань для самостійної роботи у період з 23 січня по 28 лютого	5	10		
Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи	2	5	5	10
Модульна контрольна робота 3	8	15		
Модульна контрольна робота 4			8	20

Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум 35 балів*, для одержання іспиту обов'язково повинні написати на потрібну кількість балів додаткову контрольну роботу за матеріалом відповідного семестру та доскладають домашні завдання для підвищення балів за виконання самостійної роботи.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

Форма іспиту в кожному семестрі – письмово-усна. Екзаменаційний білет іспиту і в першому, і в другому семестрі складається із 4 завдань, перші два з яких є теоретичними, два інших – задачі. Кожне завдання оцінюється від 0 до 8 балів. Додатково від 0 до 8 балів студент отримує за усне опитування. Всього за іспит можна отримати від 0 до 40 балів.

Розрахунок балів, які студент отримує при успішній здачі іспиту:

1 семестр

	Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	іспит / залік	Підсумкова оцінка
<i>Мінімум</i>	24	11	25/___	60
Максимум	40	20	40/___	100

2 семестр

	Змістовий модуль 3	Змістовий модуль 4	іспит / залік	Підсумкова оцінка
<i>Мінімум</i>	24	11	25/___	60
Максимум	40	20	40/___	100

При цьому, кількість балів:

- **1-34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов’язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35-59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- **60-64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
- **65-74** відповідає оцінці «задовільно»;
- **75 - 84** відповідає оцінці «добре»;
- **85 - 89** відповідає оцінці «добре» («дуже добре»);
- **90 - 100** відповідає оцінці «відмінно».

Шкала відповідності (за умови іспиту)

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою	
90 – 100	5	відмінно
85 – 89	4	добре
75 – 84		
65 – 74	3	задовільно
60 – 64		
35 – 59	2	незадовільно
1 – 34		

Шкала відповідності (за умови заліку)

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	Зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ПЕРШИЙ СЕМЕСТР

Змістовий модуль 1. Теорія кривих

ТЕМА 1. Теорія кривих.....(14 год.)

Параметризація, довжина кривої. Дотична, головна нормаль та бінормаль просторової кривої. Базис Серє-Френе. Кривина і скрут, формули Френе. Дотикання кривих. Центр кривини.

Змістовий модуль 2. Елементи топології

ТЕМА 3. Елементи топології.....(14 год.)

Поняття топологічного простору та неперервного відображення. Способи завдання топологічної структури: база, замкнені множини, внутрішність та замикання, околи точки. Топологічні властивості: зв'язність, лінійна зв'язність, компактність, сепарабельність, аксіоми зліченості та відокремлення. Топологічні конструкції: сума, добуток, фактор простір, підпростір.

ДРУГИЙ СЕМЕСТР

Змістовий модуль 3. Теорія поверхонь

Самостійна робота з теми: Перша квадратична форма поверхні

(у період з 23 січня по 28 лютого) (15 год. самостійної роботи)

ТЕМА 4. Теорія поверхонь (14 год.)

Поняття параметричної поверхні, її дотична площина та нормаль. Перша та друга основні квадратичні форми поверхні. Гаусова та середня кривини. Дериваційні рівняння Вейнгартена. Формула Гауса. Класифікація точок та напрямків на поверхні. Геодезичні лінії.

Змістовий модуль 4. Тензори на многовидах

ТЕМА 5. Гладкі многовиди.....(6 год.)

Поняття топологічного многовида, гладкої структури та гладкого многовида. Гладкі відображення многовидів. Дотичний вектор та дотичний простір. Дотичне відображення (диференціал). Занурення та вкладення многовидів..

ТЕМА 6. Тензори (8 год.)

Означення та приклади тензорів над векторним простором. Тензорні поля на многовиді. Операції з тензорами. Коваріантна похідна та паралельний переніс. Тензори скруту та кривини.

**СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ, ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1-й семестр

теми	Назва теми I семестр	Кількість годин				
		Лекції	Практичні заняття	Самост. робота	Контр. модульна робота	Інші форми контролю
Змістовий модуль 1. Теорія кривих						
1	Теорія кривих	14	14	35	2	
Змістовий модуль 2. Елементи топології						
2	Елементи топології	14	14	51	2	
Всього годин за I семестр		28	28	86	4	

2-й семестр

теми	Назва теми II семестр	Кількість годин				
		лекції	практичні заняття	Самост. робота	Контр. модульна робота	Інші форми контролю
Змістовий модуль 3. Теорія поверхонь						
	Самостійна робота у період з 23 січня по 28 лютого: Перша квадратична форма поверхні			15		
4	Теорія поверхонь	14	14	14	2	
Змістовий модуль 4. Тензори на многовидах						
5	Гладкі многовиди	6	6	14		
6	Тензори	6	6	17	2	
Всього годин за II семестр		28	28	60		

I СЕМЕСТР

Змістовий модуль 1. Теорія кривих. Тема 1. Теорія кривих.

Лекція 1. Вступ до диференціальної геометрії. Крива. Дотична.

Предмет диференціальної геометрії та топології. Про розвиток геометрії та топології в Україні та світі.

Вектор-функція. Неперервна параметризована крива на площині та в просторі. Гладка крива. Проста та замкнена криві. Дотичний вектор. Регулярна точка. Регулярна крива. Гомеоморфізм. Еквівалентні параметризації. Дотична. Рівняння дотичної.

Практичне заняття 1. Крива. Дотична. – 2 год.

1. Операції з вектор-функціями.
2. Гладка крива.
3. Дотичний вектор.
4. Рівняння дотичної.

Завдання для самостійної роботи (7 год.)

1. Побудова кривої Пеана.
2. Складання параметричних рівнянь кривої.
3. Властивості операцій з вектор-функцією.
4. Визначення класу регулярності кривої.
5. Перевірка кривих на еквівалентність.
6. Складання рівняння дотичної.

Література [1, с.3-17; 3, с. 8; 5, с.5-8; 4, с.3-5]

Лекція 2. Довжина кривої, натуральна параметризація. Базис Френе. Кривина.

Довжина кривої. Рівність довжин у еквівалентних кривих. Натуральна параметризація, її властивості. Базис Френе кривої в \mathbb{R}^3 . Тригранник Серє-Френе. Кривина кривої.

Практичне заняття 2. – 2 год.

1. Знаходження довжин кривих.
2. Складання рівнянь ребер та граней тригранника Серє-Френе.
3. Знаходження натуральної параметризації
4. Знаходження базису Френе

Завдання для самостійної роботи (5 год.)

1. Знаходження довжин кривих.
2. Складання рівнянь ребер та граней тригранника Серє-Френе.

3. Знаходження натуральної параметризації
4. Знаходження базису Френе

Література.[1, с.21-30; 3, с.21-23, 156-164; 5, с.8-11, 24-26; 4, с.5, 7-9].

Лекція 3. Кривина і скрут кривої в тривимірному просторі. Формули Френе.

Формули Френе. Натуральне рівняння кривої (задання кривої кривиною та скрутом). Кривина і скрут. Формули для їх знаходження. Геометричний зміст кривини та скриту. Критерії того, що крива є прямою та плоскою кривою.

Практичне заняття 3. Кривина і скрут кривої в тривимірному просторі. Формули Френе.– 2 год.

1. Знаходження кривини, скрута та натурального рівняння кривої
2. Застосування формул Френе.
3. Критерії того, що крива є прямою.
4. Критерії того, що крива є плоскою кривою.

Завдання для самостійної роботи (3 год.)

1. Знаходження кривини, скрута та натурального рівняння кривої
2. Застосування формул Френе.

Література [1, с.27-45; 3, с.156-164; 5, с.11, 26-29; 4, с.9,10].

Лекція 4. Кривина плоскої кривої. Особливі точки.

Рівняння дотичної та нормалі кривої на площині. Орієнтована кривина. Формула для знаходження орієнтованої кривини кривої на площині. Лінії, що задані загальними рівняннями. Регулярні криві. Особливі точки.

Практичне заняття 4. Кривина плоскої кривої. Особливі точки. – 2 год.

1. Складання рівняння дотичної та нормалі кривої на площині.
2. Знаходження орієнтованої кривини кривої на площині.
3. Знаходження особливих точок плоских кривих.

Завдання для самостійної роботи (4 год.)

1. Складання рівняння дотичної та нормалі кривої на площині.
2. Знаходження орієнтованої кривини кривої на площині.
3. Знаходження особливих точок плоских кривих та визначення їх типу.

Література [1, с.17-20, 57-69; 3, с. 149-156; 5, с.7,8,11; 4, с.10,11].

Лекція 5. Дотикання кривих. Обвідна. Еволюта. Криві в \mathbf{R}^n .

Дотикання кривих. Дотикаюче коло. Центр кривини. Обвідна. Еволюта та евольвента. Їх рівняння. Базис Френе кривої в \mathbf{R}^n Формули Френе.

Практичне заняття 5. Дотикання кривих. Обвідна. Еволюта. Криві в \mathbf{R}^n .– 2 год.

1. Визначення порядку дотику кривих.

2. Знаходження центру кривини.
3. Знаходження обвідної.
4. Рівняння еволюти та евольвенти.

Завдання для самостійної роботи (6 год.)

1. Визначення порядку дотику кривих.
2. Знаходження центру кривини.
3. Знаходження обвідної.
4. Рівняння еволюти та евольвенти.
5. Базис Френе кривої в \mathbf{R}^n Формули Френе.

Література [1, с.57-64.].

Лекція 6. Евклідова метрика в криволінійних системах координат. Ріманова та псевдоріманова метрики.

Неперервна система координат в області в \mathbf{R}^n . Криволінійні координати точки. Гладкі системи координат. Матриця Якобі. Регулярна СК. Координатні лінії. k -вимірні координатні поверхні. Функції заміни координат. Приклади СК: евклідові, лінійні, полярні, циліндричні, сферичні. Закон перетворення координат дотичного вектора при заміні криволінійної системи координат. Евклідова метрика в криволінійній СК. Стереографічні координати на сфері. Ріманова метрика і скалярний добуток. Псевдоріманова метрика. Псевдоевклідов простір, псевдосфера. Простір Мінковського.

Практичне заняття 6. Ріманова та псевдоріманова метрики. – 2 год.

1. Властивості стереографічної проєкції.
2. Знаходження евклідової метрики в криволінійних системах координат.
3. Властивості сферичних трикутників.
4. Група перетворень площини Мінковського.

Завдання для самостійної роботи (5 год.)

1. Властивості стереографічної проєкції.
2. Знаходження евклідової метрики в криволінійних системах координат.
3. Властивості сферичних трикутників.
4. Знаходження ріманової метрики на крузі Пуанкаре, що індукована стереографічною проєкцією псевдосфери уявного радіуса

Література [1, с.46-56; 3, с. 24-35; 5, с.94-125; 4, с.6].

Лекція 7. Еліптична та гіперболічна геометрії. Контрольна робота.

Еліптична (проєктивна) геометрія. Група ізометрій проєктивної площини. Гіперболічна геометрії (геометрія Лобачевського), отримана з псевдосфери. Модель Пуанкаре та модель верхньої півплощини геометрії Лобачевського. Дробово-лінійні перетворення та ізометрії площини Лобачевського.

Практичне заняття 7. Еліптична та гіперболічна геометрії. – 2 год.

1. Знаходження відстані між точками в різних моделях геометрії Лобачевського.
2. Властивості трикутників в геометрії Лобачевського.
3. Властивості дробово-лінійних перетворень.

4. Група рухів площини Лобачевського.

Завдання для самостійної роботи (5 год.)

1. Знаходження відстані між точками в різних моделях геометрії Лобачевського.
2. Властивості трикутників в геометрії Лобачевського.
3. Властивості дробово-лінійних перетворень. Група рухів площини Лобачевського.

Література [1, с.181-189; 3, с.35-63; 5, с.126-145; 4, с.6]

Контрольні запитання до змістового модуля I

1. Як визначаються регулярні криві для різних типів їх задання (параметричного, загального, як графік функції)?
2. Написати рівняння ребер та граней ригранник Серре-Френе для кривої $r(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$.
3. Які властивості має природна (натуральна) параметризація?
4. Чому дорівнюють кривина та скрут кривої $r(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$?
5. Як знайти орієнтовану кривину кривої $r(t)=\{x(t),y(t)\}$?
6. Яким буде параметричне рівняння плоскої кривої, заданої натуральним рівнянням $k=k(s)$?
7. Як знайти особливі точки кривої $F(x,y)=0$?
8. Що є обвідною сім'ї нормалей даної кривої?
9. Як за допомогою кривини та скругу визначити чи є крива прямою, чи є вона плоскою?
10. Як перетворюються координати дотичного вектора при заміні криволінійної системи координат?
11. Як знаходиться довжина дуги в евклідовій, полярній, сферичній та циліндричній системах координат?
12. Чому дорівнює сума кутів трикутника в проективній геометрії та геометрії Лобачевського?
13. Описати групи ізометрій проективної площини та площини Лобачевського.
14. Як ріманова метрика переноситься гладким відображенням?

Типова контрольна робота:

1. Визначити кривину та скрут лінії $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = e^t$.
2. Написати рівняння нормалі до кривої $x^2 - x + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в точці $(0, 0, 1)$.
3. Довести, що кривина кривої дорівнює кривині її проєкції на стичну площину.
4. Довести, що бірегулярна крива буде плоскою тоді та тільки тоді, коли її скрут дорівнює 0.

Змістовий модуль 2. Елементи топології.

Тема 2. Елементи топології.

Лекція 8. Топологічний простір. База. Підпростір.

Топологічний простір. Відкриті множини. Топологічна структура метричного простора. Приклади: тривіальна, дискретна, коскінчена топологія. Окіл. Критерій відкритості множини. База та передбаза. Критерії бази. Сильніша та слабкіша топології. Індукована топологія та підпростір.

Практичне заняття 8. Топологічний простір. База. Підпростір.– 2 год.

1. Приклади топологічних структур.
2. Приклади баз.
3. Порівняння топологій.

Завдання для самостійної роботи (5 год.)

1. Перевірка аксіом топології.
2. Використання бази топології.

Література [1, с.214-227; 3, с.64-69; 5, с.146-151; 4, с.23-26].

Лекція 9. Неперервне відображення. Зв'язність.

Замкнені множини. Замикання та внутрішність. Скрізь щільні множини. Межа множини. Неперервне відображення. Критерії неперервності. Збіжність у топологічних просторах. Гомеоморфізм. Розбиття простору. Зв'язність. Критерій зв'язності. Компоненти зв'язності. Неперервний образ зв'язного простору. Шлях, лінійна зв'язність. Зв'язність лінійно зв'язного простору. Приклад зв'язного, але лінійно незв'язного простору.

Практичне заняття 9. Неперервне відображення. Зв'язність. – 2 год.

1. Властивості операції замикання та внутрішності.
2. Побудова гомеоморфізмів.
3. Властивості компонент зв'язності.

Завдання для самостійної роботи (15 год.)

1. Критерії неперервності.
2. Доведення негомеоморфності просторів.
3. Перевірка букв алфавіту на гомеоморфність.

Література [1, с.231-235, 240-249; 3, с.69-78; 5, с.152-161; 4, с.27-29, 32-34].

Лекція 10. Тихонів добуток, факторпростір. Аксіоми відокремлюваності.

Тихонів добуток, факторпростір. Аксіоми відокремлюваності. Критерій T_1 -простору. Хаусдорфовий та нормальний простори. Нормальність метричного простору.

Практичне заняття 10. Тихонів добуток, факторпростір. Аксіоми відокремлюваності. – 2 год.

1. Використання факторпросторів. Приклеювання топологічних просторів.
2. Приклад нехаусдорфового T_1 -простору.
3. Властивості T_1 - та T_2 -просторів.

Завдання для самостійної роботи (5 год.)

1. Приклади факторпросторів.
2. Збереження аксіом відокремлення при операціях з топологічними просторами.

Література [1, с.228-231; 3, с.78-80; 5, с.162-163; 4, с.30,31].

Лекція 11. Лема Урісона.

Лема Урісона. Теорема Тітце-Урісона про існування неперервного продовження.

Практичне заняття 11. Регулярні та нормальні простори – 2 год.

1. Властивості нормальних просторів.
2. Регулярні простори.

Завдання для самостійної роботи (5 год.)

1. Критерій нормальності топологічного простору.
2. Властивості регулярних просторів.

Література [4, с.31-32; 3, с.86-89].

Лекція 12. Компактні простори.

Покриття та підпокриття. Компактні простори. Властивості. Теорема про неперервний образ компактного простору. Теорема Тихонова про топологічний добуток компактних просторів.

Практичне заняття 12. Компактні простори. – 2 год.

1. Приклади компактних просторів.
2. Неперервний образ компактних просторів.

Завдання для самостійної роботи (5 год.)

1. Канторова множина і нескінченний добуток двоточкової множини.
2. Дослідження властивостей компактних просторів.

Література [1, с.236-239; 3, с.80-84; 5, с.163-171; 4, с.34, 35].

Лекція 13. Компактифікація. Контрольна робота.

Компактифікація. Локально-компактний простір. Теорема про існування односточної компактифікації. Гомотопія як відношення еквівалентності. Гомотопічний тип. Стяжні простори. Ретракти.

Практичне заняття 13. Компактифікація. Гомотопні відображення. –2 год.

1. Властивості локально-кокомпактних просторів.
2. Приклади компактифікацій.
3. Гомотопні відображення.

Завдання для самостійної роботи (15 год.)

1. Дослідження властивостей локально-компактних просторів.

2. Побудова компактифікацій.
3. Знаходження гомотопії між відображеннями.
4. Перевірка просторів на гомотопічну еквівалентність.
5. Стяжні простори.

Література [1, с.236-239, с. 262-265; 3, с.84-86; 5, с.163-171; 4, с.34, 35, 6. с.79-81].

Лекція 14. Поверхні в \mathbb{R}^3 . Дотична площина, нормаль.

Неперервна параметрична поверхня в тривимірному просторі. Гладкі поверхні. Поверхні-графіки та неявні поверхні. Криві на поверхнях, координатні лінії. Дотичний вектор. Особливі (сингулярні) та регулярні точки. Регулярні поверхні. Дотичний простір. Орієнтовані поверхні. Перша квадратична форма.

Практичне заняття 14. Поверхні в \mathbb{R}^3 . Модульна контрольна робота.– 2 год.

1. Складання параметричних рівнянь поверхонь.
2. Модульна контрольна робота

Завдання для самостійної роботи (1 год.)

1. Параметричні рівняння поверхонь.

Література [1, с.70-87, 5, с.31-37; 4, с.12, 13].

Контрольні запитання до змістового модуля 3

1. Яка топологія є найсильнішою (найслабкішою)?
2. В кожному з 20 варіантів визначити чи має простір X ту саму властивість, що і простір Y , якщо простір $Y \in$ а) компактним, б) зв'язним, в) зі зліченою базою, г) замкненою підмножиною в Z , а простір $X \in$ 1) факторпростором простору Y , 2) підпростором в Y , 3) замкненою множиною в Y , 4) топологічним добутком $Y \times Y$, 5) неперервним образом простору Y ?
3. Як пов'язані між собою операції замикання, внутрішності, взяття межі та доповнення?
4. Чи кожна відкрита (замкнена) в індукованій топології множина є відкритою (замкненою) в просторі?
5. Як пов'язані між собою поняття зв'язності та лінійної зв'язності?
6. Як пов'язані між собою різні аксіоми відокремлення?
7. Що може бути компактифікацією прямої, площини?

Типова контрольна робота

1. Довести, що неперервний образ компактного простору компактний.
2. Приклад нехаусдорфового T_1 -простору (з доведенням).
3. Довести, що замикання зв'язної множини зв'язна.
4. Приклад зв'язного і лінійно незв'язного простору (з доведенням).
5. Довести, що всі неперервні відображення прямої гомотопні між собою.

Перелік запитань на іспит

1. Вектор-функція. Неперервна крива. Гладка крива. Проста та замкнена криві.
2. Дотичний вектор. Регулярна точка. Еквівалентні параметризації.
3. Дотична. Рівняння дотичної.
4. Довжина кривої. Рівність довжин у еквівалентних кривих. Натуральна параметризація, її властивості.
5. Базис Френе кривої в \mathbb{R}^3 . Тригранник Серре-Френе.
6. Кривина та скрут кривої.
7. Рівняння дотичної та нормалі кривої на площині.
8. Орієнтована кривина. Формула для знаходження орієнтованої кривини кривої на площині.
9. Особливі точки лінії, що задані загальними рівняннями.
10. Дотикання кривих. Дотикаюче коло. Центр кривини. Обвідна. Евольвента та евольвента. Їх рівняння.
11. Базис Френе кривої в \mathbb{R}^n Формули Френе.
12. Неперервна та гладка системи координат в області в \mathbb{R}^n . Матриця Якобі. Регулярна СК. Функції заміни координат.
13. Закон перетворення координат дотичного вектора при заміні криволінійної системи координат. Евклідова метрика в криволінійній СК.
14. Ріманова метрика і скалярний добуток. Псевдоріманова метрика. Псевдоевклідов простір, псевдосфера. Простір Мінковського.
15. Еліптична (проективна) геометрія. Група ізометрій проективної площини.
16. Гіперболічна геометрії (геометрія Лобачевського), отримана з псевдосфери. Модель Пуанкаре та модель верхньої півплощини геометрії Лобачевського.
17. Топологічний простір. Відкриті множини. Топологічна структура метричного простора. Приклади: тривіальна, дискретна, коскінчена топологія.
18. Окіл. Критерій відкритості множини. База та передбаза. Критерії бази. Сильніша та слабкіша топології.
19. Індукована топологія та підпростір.
20. Замкнені множини. Замикання та внутрішність. Скрізь щільні множини. Межа множини.
21. Неперервне відображення. Критерії неперервності. Збіжність у топологічних просторах. Гомеоморфізм.
22. Розбиття простору. Зв'язність. Критерій зв'язності. Компоненти зв'язності. Неперервний образ зв'язного простору.
23. Шлях, лінійна зв'язність. Зв'язність лінійно зв'язного простору. Приклад зв'язного, але лінійно незв'язного простору.
24. Тихонів добуток, факторпростір.
25. Аксиоми відокремлюваності. Критерій T_1 -простору. Хаусдорфовий та нормальний простори. Нормальність метричного простору.
26. Лема Урісона.

27. Теорема Тітце-Урісона про існування неперервного продовження.
28. Покриття та підпокриття. Компактні простори. Властивості. Теорема про неперервний образ компактного простору.
29. Теорема Тихонова про топологічний добуток компактних просторів.
30. Компактифікація. Локально-компактний простір. Теорема про існування одноточкової компактифікації.
31. Гомотопія як відношення еквівалентності. Гомотопічний тип. Стяжні простори. Ретракти.
32. Фундаментальна група. Залежність від точки. Гомоморфізм фундаментальних груп, що породжений неперервним відображенням. Фундаментальна група гомотопічно еквівалентних просторів.
33. Неперервна параметрична поверхня в тривимірному просторі. Гладкі поверхні. Поверхні-графіки та неявні поверхні. Криві на поверхнях, координатні лінії. Дотичний вектор. Особливі (сингулярні) та регулярні точки. Регулярні поверхні. Дотичний простір. Орієнтовані поверхні.

Типовий білет для іспиту в першому семестрі.

1. Означення тихонівського добутку. Теорема Тихонова. Приклади.
2. Вивести формулу для кривини кривої на площині.
3. Довести, що відкрита підмножина многовида є многовидом.
4. Знайти скрут кривої $xu=z^2$, $x+y=z+1$ в точці $(1,1,1)$.

II СЕМЕСТР

Змістовий модуль 3. Теорія поверхонь.

Тема 3. Теорія поверхонь.

Самостійна робота у період з 23 січня по 28 лютого. Перша квадратична форма поверхоні (15 год. самостійної роботи)

Самостійне завдання 1. Опрацювати: параметричні рівняння поверхні. Знаходження параметричних рівнянь поверхонь обертання. Знаходження параметричних рівнянь поверхонь обертання. Знаходження параметричних рівнянь лінійчатих поверхонь. Знаходження параметричних рівнянь поверхонь, заданих загальним рівнянням. [1, с.73-76; 4, с.14].

Розв'язати задачі 3.1.1-3.1.9,27 [2].

Самостійне завдання 2. Опрацювати: Рівняння дотичної площини Рівняння нормалі. Одиничний вектор нормалі. [1, с.77-80; 4, с.15].

Розв'язати задачі 3.1.10-3.1.23 [2].

Самостійне завдання 3. Опрацювати: Знаходження першої квадратичної форми. Перша квадратична форма лінійчастих поверхонь. Перша квадратична форма поверхонь обертання. [1, с.88-91; 4, с.16].

Розв'язати задачі 3.1.46,47,49,62-65 [2].

Самостійне завдання 4. Опрацювати: Довжина дуги кривої на поверхні. Кут між кривими на поверхні. [1, с.91-92; 4, с.17].

Розв'язати задачі 3.3.1-3.3.3 [2].

Самостійне завдання 5. Опрацювати: Побудова ізометричних відображень. Властивості ізометричних відображень. [1, с.98-102; 4, с.18].

Розв'язати задачі 3.3.4-22 [2].

Лекція 15. Перша квадратична форма. Ізометричні поверхні. Друга квадратична форма.

Заміна компонент першої квадратичної форми при заміні параметризації. Теорема про рівність перших квадратичних форм ізометричних поверхонь. Група ізометрій. Площа поверхні. Повні поверхні. Друга квадратична форма.

Практичне заняття 15. Перша та друга квадратичні форми.– 2 год.

1. Знаходження першої та другої квадратичних форм.
2. Одиничний вектор нормалі. Орієнтація.

Література [1, с.108-114; 4, с.14-15].

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Перша квадратична форма лінійчастих поверхонь та поверхонь обертання
2. Довжина дуги та кут між кривими на поверхні.

Література [1, с.88-102; 3, с.164-167; 5, с.38-48; 4, с.14].

Лекція 16. Друга квадратична форма.

Друга квадратична форма, нормальна кривина. Головні кривини. Індикатриса Дюпена. Гаусова та середня кривини. Класифікація точок на поверхні. Теорема Мен'є.

Практичне заняття 16. Друга квадратична форма.– 2 год.

1. Друга квадратична форма, нормальна кривина.
2. Гаусова та середня кривини.
3. Головні кривини.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Нормальна кривина.
2. Гаусова та середня кривини.
3. Теорема Менґе.

Література [1, с.108-127; 3, с.167-203; 5, с.49-70; 4, с.15-17].

Лекція 17. Дериваційні рівняння.

Дериваційні рівняння Вейнгартена-Гаусса. Символи Кристофеля. Теорема Родріґа.

Сферичне зображення поверхні.

Практичне заняття 17. Дериваційні рівняння. – 2 год.

1. Класифікація точок на поверхні.
2. Знаходження ізометричних перетворень.
3. Застосування теореми Родріґа.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Класифікація точок на поверхні.
2. Застосування теореми Родріґа.
3. Сферичне зображення поверхні.

Література [1, с.128-133; 3, с.167-203; 5, с.71-76, 24-26; 4, с.17-20].

Лекція 18. Теорема Гауса.

Формули Гауса та Петерсона-Кодацці. Теорема Гауса. Теорема Боне.

Практичне заняття 18. Теорема Гауса. – 2 год.

1. Формули для символів Кристофеля.
2. Формула Гауса.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Знаходження символів Кристофеля.
2. Знаходження гаусової кривини за першою квадратичною формою.

Література [1, с.133-139; 3, с.167-203; 5, с.71-76, 24-26; 4, с.17-20].

Лекція 19. Класифікація напрямків у точці. Геодезичні лінії.

Класифікація напрямків у точці. Лінії кривини та асимптотичні лінії. Геодезична кривина. Геодезичні лінії. Їх рівняння. Геодезичні лінії на площині Лобачевського.

Практичне заняття 19. Лінії кривини та асимптотичні лінії – 2 год.

1. Лінії кривини.
2. Асимптотичні лінії.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Знаходження ліній кривини.
2. Знаходження асимптотичних ліній.

Література [1, с.140-148; 3, с.331-350; 5, с.82-93; 4, с.21-22].

Лекція 20. Властивості геодезичних ліній.

Властивості геодезичних ліній. Коваріанта похідна дотичного векторного поля. „Паралельний” перенос дотичного вектора вздовж кривої на поверхні.

Практичне заняття 20. Геодезичні лінії.– 2 год.

1. Рівняння геодезичних ліній. Властивості геодезичних.
2. Формула для геодезичної кривини.
3. Паралельне перенесення вектора вздовж кривої на поверхні.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Знаходження геодезичних ліній.
2. Знаходження геодезичної кривини.

Література [1, с.149-159; 3, с.331-350; 5, с.77-81; 4, с.22,53].

Лекція 21. Теорема Гауса-Боне. Поверхні сталої кривини.

Теорема Гауса-Боне. Поверхні сталої кривини. Приклади та властивості. Сума кутів геодезичного трикутника. Мінімальні поверхні.

Практичне заняття 21. Поверхні сталої кривини. Контрольна робота – 2 год.

1. Поверхні сталої кривини.
2. Сума кутів геодезичного трикутника.
3. Властивості мінімальних поверхонь.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Дослідження властивостей поверхонь сталої кривини.
2. Знаходження суми кутів геодезичного трикутника.

Література [1, с.160-175,].

Контрольні запитання до змістового модуля 2

- 1 Як пов'язані поняття регулярності для поверхонь заданих різними способами?
- 2 Скільки орієнтацій існує на поверхні?
- 3 Як пов'язані перші квадратичні форми ізометричних полверхонь?
- 4 Як знайти головні кривини поверхні?
- 5 Як індикатриса Дюпена та повна кривина пов'язані з типом точок поверхні?

- 6 Як знайти головні напрямки поверхні? Які їх властивості?
- 7 Як знайти коефіцієнти зв'язності (символи Кристоффеля) поверхні?
- 8 Яким умовам повині задовольняти 6 функцій, щоб існувала поверхня, для якої вони є коефіцієнтами першої та другої квадратичних форм?
- 9 Чи на всіх поверхнях існують
 - а) асимптотичні лінії,
 - б) лінії кривини
 - в) геодезичні лінії?
- 10 Як між собою пов'язані кривина, нормальна кривина та геодезична кривина кривої на поверхні?
- 11 Як знайти на поверхні криву між двома точками з найменшою довжиною?
- 12 Якою є перша квадратична форма поверхонь сталої кривини у напівгеодезичній системі координат?

Типова контрольна робота:

В точці $(0, 0)$ на поверхні $r = \{ \cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \}$

- 1) Знайти середню та гаусову кривини
- 2) Визначити тип точок поверхні
- 3) Знайти головні кривини
- 4) Знайти асимптотичні лінії
- 5) Обчислити символи Кристоффеля другого роду (коефіцієнти зв'язності)
- 6) Знайти геодезичні лінії (диф.рівняння)

Змістовий модуль 4. Тензори на многовидах.

Тема 4. Гладкі многовиди.

Лекція 22. Многовиди. Приклади. Гладкі відображення многовидів

Топологічний многовид, карта, атлас. Приклади: R^n , S^n , графіки. Функції та відображення многовидів в локальних координатах. Гладкі многовиди. Гладка структура на многовиді. Гладкі функції та відображення гладких многовидів. Дифеоморфізм. Матриця Якобі відображення. Рівність розмірностей дифеоморфних многовидів. Перенесення гладкої структури гомеоморфізмом. Теорема про неявну функцію для многовидів. Підмноговиди.

Практичне заняття 22. Многовиди. – 2 год.

1. Приклади многовидів.
2. Гладкі атласи карт.
3. Операції з многовидами.

Завдання для самостійної роботи (4 год.)

1. Приклади многовидів.
2. Перевірка атласу на гладкість.
 3. Добуток многовидів, відкриті підмноговиди.
4. Теорема про неявну функцію для многовидів.

Література [1, с.253-256; 3, с.91-113; 5, с.172-186; 4, с.39-44].

Лекція 23. Дотичний вектор до многовида. Дотичний простір. Занурення та вкладення многовидів. Орієнтація – 2 год.

З означення дотичного вектора: 1) алгебраїчне (координатне), 2) клас еквівалентних кривих, 3) диференціювання в точці. Їх еквівалентність. Дотичний простір. Дотичне розшарування до многовида. Диференціал відображення (відображення захоплення). Регулярні та критичні точки. Регулярні та критичні значення. Субмерсія. Теорема про прообраз регулярного значення. Занурення (імерсія). Вкладення. Приклади. Існування вкладення замкненого многовида в евклідов простір. Орієнтований многовид. Орієнтація. Задання орієнтації картою. Перенесення орієнтації дотичного простору вздовж кривої. Приклади орієнтованих та неорієнтованих многовидів.

Практичне заняття 23. Гладкі відображення многовидів– 2 год.

1. Гладкі відображення многовидів.
2. Диференціал відображення.
3. Прообраз регулярного значення.
4. Занурення двовимірних многовидів в тривимірний простір. Вкладення многовидів.
5. Орієнтовані многовиди.

Завдання для самостійної роботи (2 год.)

1. Знаходження диференціалу відображення многовидів.
2. Знаходження прообразу регулярного значення.
3. Побудова занурень 2-многовидів в \mathbf{R}^3 та вкладень в \mathbf{R}^4 .
4. Побудова вкладень добутку сфер та проєктивних просторів.

Література [1, с.250-253; 3, с.143-149; 5, с.202-211].

Лекція 24. Топологічна класифікація 2-вимірних многовидів.

Склеювання многокутників. Приклеювання ручок та листів Мьобіуса. Теорема класифікації. Триангуляція 2-вимірних многовидів. Канонічні склейки многокутників. Ейлерова характеристика та рід 2-вимірних многовидів. Зв'язна сума.

Практичне заняття 24. Топологічна класифікація 2- многовидів. – 2 год.

1. Зв'язна сума двовимірних многовидів.

2. Склеювання многокутників.
3. Доведення негомеоморфності многовидів різного роду.

Завдання для самостійної роботи (3 год.)

1. Властивості операції зв'язної суми многовидів.
2. Обчислення ейлорової характеристики.

Література [1, с.257-261; 3, с.247-269; 5, с.225-233].

Тема 5. Тензори

Лекція 25. Тензори. Означення та приклади.

Координатне, інваріантне та лінійне означення тензорів. Вектор, диференціал, білінійна форма.

Практичне заняття 25. Тензори. Алгебраїчні операції над тензорами.– 2 год.

1. Приклади тензорів.
2. Тензорний закон перетворення компонент тензора.

Завдання для самостійної роботи (3 год.)

1. Знаходження компонент тензора при заміні системи координат.
2. Визначення валентності та типу тензорів.

Література [1, с.190-202; 3, с.292-307; 6, с.4-31; 4, с.48-52].

Лекція 26. Алгебраїчні операції над тензорами.

Лінійні комбінації, перестановка індексів, згортка, тензорний добуток, опускання та підняття індексів, симетрування та альтернація.

Практичне заняття 26. Алгебраїчні операції над тензорами.– 2 год.

1. Додавання тензорів. Перестановка індексів.
2. Тензорний добуток. Опускання та підняття індексів.
3. Згортка. Симетрування та альтернація.

Завдання для самостійної роботи (3 год.)

1. Знаходження лінійних комбінацій тензорів.
2. Опускання та підняття індексів.
3. Знаходження тензорного добутку та згортки.

Література [1, с.190-202; 3, с.292-307; 6, с.4-31; 4, с.48-52].

Лекція 27. Коваріантне диференціювання. Паралельний перенос. Тензор кривини

Евклідова та афінна зв'язності, коваріантна похідна за напрямком. Алгебраїчні властивості коваріантного диференціювання. Ріманова зв'язність (зв'язність Леві-Чевіта). Паралельний перенос.

Практичне заняття 26. Коваріантне диференціювання. Тензор кривини – 2 год.

1. Коваріантна похідна. Властивості.
2. Паралельний перенос.

Завдання для самостійної роботи (4 год.)

1. Знаходження коваріантної похідної.
2. Знаходження паралельного переносу тензора.

Література [1, с.203-211; 3, с.319-355; 6, с.88-121, 130-147, 4, с.53-55].

Лекція 27. Тензори скруту та кривини. Алгебра зовнішніх диференціальних форм.

Тензор скруту. Тензор кривини (координатне означення). Комутатор (дужка Лі) векторних полів. Інваріантне означення тензора кривини. Симетрії тензора кривини. Тензор кривини поверхні. Зовнішній добуток та диференціал диференціальних форм.

Практичне заняття 26. Тензор кривини. Диференціальні форми.

– 2 год.

1. Тензор скруту
2. Тензор кривини.
3. Дія форми на векторах.

Завдання для самостійної роботи (4 год.)

1. Знаходження тензора скруту.
2. Знаходження тензора кривини.
3. Знаходження дії форми на векторах, зовнішнього добутку та диференціала форм.

Література [1, с.203-211; 3, с.365-379; 6, с.32-46, 74-87, 4, с.53-55].

Контрольні запитання до змістового модуля 4

1. Які з наступних просторів є многовидами: а) сфера, б) пряма з двома нулями, в) пряма з дискретною топологією, г) проєктивний простір, д) об'єднання двох прямих, що перетинаються?
2. Чи буде об'єднання (добуток, неперервний образ) многовидів многовидом?
3. Коли множина, що задана системою рівнянь в евклідовому просторі є многовидом?
4. Як пов'язані поняття підмноговида і вкладеного многовида?
5. Чи кожне занурення многовида (компактного многовида) без точок самоперетину є вкладенням?
6. Як перевірити чи є многовид орієнтованим?

7. Чим відрізняються коваріантні тензори від контрваріантних?
8. Як змінюється валентність тензорів при алгебраїчних операціях з ними?
9. Як задається зв'язність Леві-Чевіта?
10. Які компоненти має тензор кривини двовимірної поверхні в тривимірному просторі?
11. Як зовнішня форма (групи когомологій) переносяться гладким відображенням?

Типова контрольна робота

1. Довести, що проєктивний простір є гладким многовидом. Чи є він замкненим, орієнтованим?
2. Довести, що тензорний добуток тензорів є тензором.
3. Перенести на торі дотичний вектор до меридіана паралельно вздовж паралелі.
4. Знайти коваріантну похідну векторного поля $\{0,1\}$ за полем $\{1,1\}$ в моделі верхньої півплощини геометрії Лобачевського в точці $(0,1)$.

Перелік запитань на іспит

1. Поверхні. Перша квадратична форма, її компоненти. Довжина дуги та кут між кривими на поверхні.
2. Ізометрія. Теорема про рівність перших квадратичних форм ізометричних поверхонь. Група ізометрій.
3. Друга квадратична форма, нормальна кривина. Головні кривини. Індикатриса Дюпена.
4. Гаусова та середня кривини. Класифікація точок на поверхні. Теорема Меньє.
5. Дериваційні рівняння Вейнгартена-Гаусса. Символи Кристофеля. Теорема Родріга.
6. Формули Гауса та Петерсона-Кодацці. Теорема Гауса. Теорема Боне.
7. Класифікація напрямків у точці. Лінії кривини та асимптотична лінії.
8. Геодезична кривина. Геодезичні лінії. Їх рівняння.
9. Властивості геодезичних ліній. Коваріантна похідна дотичного векторного поля. „Паралельний” перенос дотичного вектора вздовж кривої на поверхні.
10. Теорема Гауса-Боне. Поверхні сталої кривини. Приклади та властивості. Сума кутів геодезичного трикутника.
11. Неперервна та гладка параметричні поверхні розмірності k . Регулярні поверхні. Заміна параметризації. Дотичний вектор. Дотичний простір.
12. Заміна координат вектора при заміні параметризації. Гіперповерхні. Поверхні-графіки та неявні поверхні. Регулярні відображення поверхонь. Еквівалентність поняття регулярності для різних способів задання поверхні. Орієнтовані поверхні.
13. Гладкі многовиди. Добуток гладких многовидів. Гладкі функції та відображення гладких многовидів. Дифеоморфізм. Матриця Якобі

відображення. Рівність розмірностей дифеоморфних многовидів. Перенесення гладкої структури гомеоморфізмом. Теорема про неявну функцію для многовидів. Підмноговиди.

- 14.3 означення дотичного вектора. Дотичний простір.
15. Диференціал відображення (відображення захоплення). Регулярні та критичні точки. Регулярні та критичні значення. Субмерсія. Теорема про прообраз регулярного значення.
16. Занурення (імерсія). Вкладення. Існування вкладення замкненого многовида в евклідов простір.
17. Орієнтований многовид. Теорема класифікації триангульованих 2-вимірних многовидів.
18. Координатне, інваріантне та лінійне означення тензорів.
19. Лінійні комбінації, перестановка індексів, згортка, тензорний добуток, опускання та підняття індексів, симетрування та альтернація.
20. Евклідова та афінна зв'язності, коваріантна похідна за напрямком. Алгебраїчні властивості коваріантного диференціювання. Ріманова зв'язність (зв'язність Леві-Чевіта). Паралельний перенос. Тензор кривини (координатне означення).
21. Зовнішні диференціальні форми як кососиметричні коваріантні тензори. Зовнішній добуток. Диференціал. Когомології де Рама. Їх гомотопічні властивості.

Типовий білет для іспиту у другому семестрі.

1. Означення дотичного простору та дотичного вектора до многовида.
2. Знайти асимптотичні лінії поверхні $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
3. Довести, що диференціал функції на многовиді є тензором.
4. Визначити тип точок прямого гелікоїда.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

а) основна:

1. О.А.Борисенко. Диференціальна геометрія та топологія. Х. 1995.
2. Н. И. Кованцов, Г. М. Зражевская, В. Г. Кочаровский, В. И. Михайловский, Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сб. задач, К., 1989.
3. А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, Курс дифференциальной геометрии и топологии, М, 1980.
4. О.О.Пришляк. Диференціальна геометрія. К. 2004.

б) додаткова:

5. А.О.Иванов, А.А.Тужилин. Лекции по классической дифференциальной

геометрии. <http://dfgm.math.msu.su/files/IvaTuzTerm1.zip>

6. А.О.Иванов, А.А.Тужилин. Тензорный анализ на многообразиях. <http://dfgm.math.msu.su/files/ivtz2-05.rar>
7. Н. И. Кованцов. Дифференциальная геометрия. К. 1973.
8. Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин, Дифференциальная геометрия. Первое знакомство, М, 1990.
9. П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, М, 1956.