

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Кафедра геометрії, топології і динамічних систем

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора
з навчальної роботи

« ____ » _____ 2017 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ¹

ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ТОПОЛОГІЇ

для студентів

галузі знань 0402 фізико-математичні науки
напряму підготовки 6.040201 математика

Київ – 2017

¹Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу та містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного та підсумкового контролів.

Робоча програма навчальної дисципліни «Додаткові розділи топології»
для студентів *галузі знань/напрямку підготовки 0402 фізико-математичні*
науки/6.040201 математика

«24» квітня — 24 с.

Розробник:² Бабич В'ячеслав Михайлович, канд. фіз.-мат. наук, доцент.

Робоча програма навчальної дисципліни Додаткові розділи топології
затверджена на засіданні кафедри геометрії, топології і динамічних систем,
протокол № 9 від «12» квітня 2017 р.

Завідувач кафедри

_____ (І. О. Парасюк)

«12» квітня 2017 р.

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету,
протокол № 9 від « 24 » квітня 2017 р.

Голова науково-методичної комісії _____ (Курченко О. О.)

« 24 » квітня 2017 р.

© В. М. Бабич, 2017

²Розробляється лектором. Робоча програма навчальної дисципліни розглядається на засіданні кафедри, науково-методичної комісії факультету, підписується завідувачем кафедри, головою науково-методичної комісії факультету і затверджується заступником декана з навчальної роботи.

Вступ

Навчальна дисципліна Додаткові розділи топології є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «Бакалавр» галузі знань 0402 фізико-математичні науки напряму 6.040201 математика спеціалізації «Геометрія, топологія і динамічні системи».

Дана дисципліна за вибором викладається у 7 семестрі 4 курсу в обсязі **126 год., 3.5 кредитів ECTS³**, зокрема лекції — 56 год., самостійна робота — 70 год.

У курсі передбачено 2 змістові модулі та 2 модульні контрольні роботи. Формою підсумкового контролю у 7 семестрі є залік.

Мета дисципліни — ознайомлення студентів з додатковими поняттями топології, основними топологічними конструкціями та зв'язками між ними, топологічними властивостями.

Завдання — оволодіння теоретичними положеннями та основними застосуваннями топології в різних задачах математики, їх використання в подальших курсах з математики, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Структура курсу: топологічний простір, відображення топологічних просторів, підпростір, факторпростір, топологічні добуток і сума, топологічні властивості, гомотопія, гомотопічна група.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні та додаткові поняття топології, зокрема: топологічний простір, база, передбаза, внутрішність, замикання, неперервне, відкрите, замкнене відображення топологічних просторів, гомеоморфізм, ініціальна

³Один кредит складає 36 годин

та фінальна топології, підпростір, факторпростір, факторне відображення, факторизація, фактор-відображення, простори орбіт, проєктивні простори, топологічні добуток і сума, зв'язність, лінійна зв'язність, аксіоми зліченності, ліндельфовість, компактність, сепарабельність, аксіоми відокремлюваності, метризовність, збіжність, простір відображень, гомотопія, гомотопічний тип, стягуваний простір, ретракт, деформаційний ретракт, сильний деформаційний ретракт, гомотопічна група, гомоморфізм гомотопічних груп, індукований неперервним відображенням топологічних просторів, фундаментальна група, однозв'язний простір.

вміти: перевіряти виконання аксіом топології, знаходити базу топологічного простору та системи околів його точки найменшої потужності, знаходити топологію, породжену родиною підмножин, знаходити внутрішність, замикання, граничні та ізольовані точки множини, перевіряти відображення топологічних просторів на відкритість, замкненість та неперервність, знаходити множину всіх точок розриву відображення топологічних просторів, знаходити індуковану топологію та фактортопологію, визначати топологічні властивості топологічних просторів, перевіряти топологічні простори на метризовність, знаходити множину границь послідовності точок топологічного простору, будувати гомотопії неперервних відображень, перевіряти топологічний простір на стягуваність, працювати з ретрактами, обчислювати фундаментальні та гомотопічні групи топологічних просторів.

Зв'язок з іншими дисциплінами. Навчальна дисципліна «Додаткові розділи топології» передбачає володіння поняттями, фактами та методами таких дисциплін, як «Аналітична геометрія», «Математичний аналіз: функції однієї змінної», «Математичний аналіз: функції багатьох змінних», «Лінійна алгебра», «Дискретна математика», «Диференціальна геометрія та топологія» і використовується при вивченні нормативного курсу «Сучасна топологія», поглиблених курсів з геометрії та топології.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль та оцінювання знань здійснюється за модульно-рейтинговою системою відповідно до «Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка» від 1 жовтня 2010 року, рішення вченої ради механіко-математичного факультету від 14 лютого 2014 року. У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1, 2, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) входять теми 4 та 5. Обов'язковим для допуску до іспиту є написання 1-ї та 2-ї модульних контрольних робіт.

Поточний контроль. При поточному контролі оцінюється активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи (опрацювання лекційного матеріалу, виконання аудиторних і домашніх завдань).

Письмові модульні роботи. Аудиторна письмова робота полягає в самостійному виконанні студентом завдань отриманого білета протягом обмеженого часу в присутності не менше ніж одного викладача. Тривалість аудиторної письмової роботи, кількість завдань, їх типи та кількість балів за кожне завдання затверджуються на засіданні кафедри, вказуються в білеті та оголошуються студентам заздалегідь. Якщо хоча б одне завдання білета передбачає відтворення теоретичного матеріалу, то студенту під час аудиторної письмової роботи дозволяється користуватися винятково власними знаннями та забороняється використання будь-яких зовнішніх джерел інформації та засобів комунікації (конспектів, підручників, посібників, електронних пристроїв, зокрема мобільних телефонів, смартфонів і навушників, та ін.), передавання чи отримання будь-яких предметів та будь-яке спілкування з іншими особами за винятком викладача, який проводить аудиторну письмову роботу, виключно для уточнення формулювання завдань. Якщо завдання білета не передбачають відтворення теоретичного матеріалу, то студенту під час аудиторної письмової роботи дозволяється користуватися винятково власними знаннями та паперовими джерелами інформації (конспектами, підручниками, посібниками тощо) та забороняє-

ться використання будь-яких засобів комунікації й електронних пристроїв (зокрема мобільних телефонів, смартфонів і навушників), передавання чи отримання будь-яких предметів та будь-яке спілкування з іншими особами за винятком викладача, який проводить аудиторну письмову роботу, виключно для уточнення формулювання завдань. Після отримання білету студент має негайно заповнити його поля (група, прізвище та ім'я, дата проведення). В момент вичерпання відведеного на роботу часу викладач робить про це оголошення. Після нього студент зобов'язаний негайно припинити виконання письмової роботи та здати її викладачу, який проводить аудиторну письмову роботу. Також студент може здати свою письмову роботу в будь-який момент відведеного на неї часу. Студент, який порушив ці правила, зобов'язаний негайно здати свою письмову роботу із заповненими полями білету (група, прізвище та ім'я, дата проведення), на якій викладачем, який виявив порушення, робиться помітка про це порушення та ставиться 0 балів за дану письмову роботу, й одразу залишити аудиторію, в якій проводиться письмова робота. Після завершення письмової роботи викладач перевіряє правильність виконання завдань і виставляє бали за кожне завдання у таблицю результатів, наведену в білеті, та ознайомлює студента з отриманими балами й інформує про допущені помилки. Викладач має право задати питання студенту щодо виконаних завдань. Студент має право перевірити відповідність виставлених балів обсягу правильно виконаних завдань і задати питання по роботі викладачу. Після цього викладач виставляє остаточну оцінку за дану письмову роботу. Викладач створює рівні умови для всіх студентів, які виконують письмову роботу, згідно з цими правилами.

Додаткові бали. З метою мотивування до поглибленого оволодіння дисципліною студенту можуть присуджуватись додаткові бали за правильне розв'язання нестандартних задач у поточному та модульному контролях. При цьому додаткові бали за письмові роботи не можуть перевищувати 25% від максимальної кількості балів за дану роботу. Додаткові бали до-

даються до суми балів за змістові модулі, теми яких входять до поточного семестрового контролю. Якщо отримана сума перевищує максимально можливу кількість балів за ці змістові модулі, то різниця цієї суми та даної максимальної кількості додається до балів, отриманих за семестровий контроль.

Умови допуску до семестрового контролю. Якщо перед семестровим контролем за результатами поточного та модульного контролів студент отримав сумарну кількість балів, яка не перевищує 34, то студент не допускається до семестрового контролю й отримує право один раз перескласти всі види письмового модульного контролю. Бали, отримані раніше за певний вид модульного контролю, при його перескладанні анулюються. Для підвищення балів за самостійну роботу студент отримує право пред'явити викладачу виконані домашні завдання для їх оцінювання.

Оцінювання за формами контролю:

	ЗМ1		ЗМ2	
	Min-балів	Max-балів	Min-балів	Max-балів
Активність на заняттях і виконання позааудиторної самостійної роботи	6	10	6	10
Модульна контрольна робота	11	20	12	20

Семестровий контроль. Семестровий контроль — іспит — складається з письмової та усної частин. Письмова частина семестрового контролю проводиться згідно з правилами та умовами написання аудиторних письмових робіт. Усна частина семестрового контролю полягає в додатковому опитуванні, яке проводиться як по письмовій роботі, так і з інших питань програми курсу. За підсумками усної частини можна отримати до 20% від максимальної кількості балів за даний семестровий контроль, але сумарна кількість балів за семестровий контроль не може перевищувати максимальну — 40 балів.

	ЗМ1	ЗМ2	Іспит	Разом (підсумкова оцінка)
Мінімальна оцінка в балах	17	18	25	60
Максимальна оцінка в балах	30	30	40	100

При цьому, кількість балів:

- **1–34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35–59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- **60–64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
- **75–84** відповідає оцінці «добре»;
- **90–100** відповідає оцінці «відмінно».

Шкала відповідності (за умови іспиту)

За 100-бальною шкалою	За національною шкалою	
90 – 100	5	відмінно
85 – 89	4	добре
75 – 84		
65 – 74	3	задовільно
60 – 64		
35 – 59	2	незадовільно
1 – 34		

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

VII семестр

Змістовий модуль 1. Основні топологічні поняття та конструкції

Тема 1. Основні топологічні поняття 50 год.

Топологічний простір. Порівняння топологій. Відкриті та замкнені множини. База, покриття, передбаза топологічного простору. База та передбаза системи околів точки топологічного простору. Задання топології за допомогою системи околів простору. Внутрішність і замикання множини топологічного простору. Скрізь щільні та ніде не щільні множини. Внутрішні точки. Точки дотику, граничні й ізольовані точки. Локально скінченні родини множин. Відображення топологічних просторів. Неперервні відображення. Відкриті та замкнені відображення. Гооморфізм. Ініціальна та фінальна топології.

Тема 2. Основні топологічні конструкції 29 год.

Індукована топологія. Підпростір. Відкриті та замкнені в індукованій топології та в підпросторі множини. Бази та передбази. Універсальна властивість. Топологія, індукована композицією відображень. Звуження відображень. Фундаментальне покриття. Продовження відображень. Топологія насичених відкритих множин. Фактортопологія. Факторне відображення. Факторпростір. Відкрите та замкнене відношення еквівалентності. Підпростір відносно фактортопології. Звуження та продовження факторних відображень. Бази. Універсальна властивість. Факторизація. Факторпростір підпростору. Факторвідображення. Простір орбіт. Проективні простори. Топологічний добуток. Тихоновська топологія. Внутрішність і замикання множини в топологічному добутку. Діагональний добуток відображень. Асоціативність і комутативність топологічного добутку. Відображення з топологічного добутку. Прямий добуток відображень. Підпростір топологічного добутку. Факторпростір топологічного добутку. Сума топологій. Топологічна сума. Розклад топологічного простору в топологічну суму. Асоціативність

і комутативність топологічної суми. Внутрішність і замикання множини топологічної суми. Діагональна сума відображень. Пряма сума відображень. Відображення в топологічну суму. Дистрибутивність топологічних суми та добутку. Підпростір і факторпростір топологічної суми.

Змістовий модуль 2 Основні топологічні властивості. Гомотопії

Тема 3. Основні топологічні властивості 23 год.

Кардинальні інваріанти. Вага та щільність топологічного простору. Аксиоми зліченності. Ліндельфовість і компактність. Сепарабельність. Відокремлюваність. Перша аксіома відокремлюваності. Хаусдорфовість. Третя та четверта аксиоми відокремлюваності. Метризованість. Збіжність. Границя послідовності. Необхідні й достатні умови єдиності границі. Неперервність у термінах збіжності. Збіжність у конструкціях. Простори Фреше-Урисона. Секвенціальні простори. Зв'язність. Лінійна зв'язність.

Тема 4. Гомотопії 24 год.

Простір неперервних відображень. Гомотопія неперервних відображень. Гомотопічний тип. Стягуваний простір. Продовження відображень. Ретракт. Деформаційний ретракт. Сильний деформаційний ретракт. Циліндр відображення. Означення категорії. Приклади. Функтори. Природне перетворення функторів. Категорія функторів. Гомотопічна група простору. Гомоморфізм гомотопічних груп, індукований неперервним відображенням топологічних просторів. Фундаментальна група. Однозв'язні простори. Обчислення фундаментальних і гомотопічних груп деяких просторів. Лінійчаті шляхи на поверхні та їх комбінаторні гомотопії. Комбінаторні апроксимації шляхів і гомотопій. Фундаментальна група кола. Фундаментальна група поверхні. Топологічна інваріантність ойлерової характеристики поверхні. Деякі застосування. Степінь відображення. Гомотопічні групи конкретних просторів.

**СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		лекції	практичні заняття	самостворена робота	модульна контрольна
Змістовий модуль 1. Основні топологічні поняття та конструкції					
1	Основні топологічні поняття	22	0	28	
2	Основні топологічні конструкції	12	0	17	
	Модульна КР № 1				2
Змістовий модуль 2. Основні топологічні властивості. Гомотопії					
3	Основні топологічні властивості	10	0	13	
4	Гомотопії	12	0	12	
	Модульна КР № 2				2
УСЬОГО		56	0	70	

VII семестр

Змістовий модуль 1. Основні топологічні поняття та конструкції

Тема 1. Основні топологічні поняття

.....
Лекція 1 Топологічний простір. Відкриті та замкнені множини. — 2 год.

Означення топології та приклади топологічних просторів. Означення відкритої та замкненої множини, їх властивості. Околи. Приклади.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....

Лекція 2 Порівняння топологій. — 2 год.

Сильніша, слабша та непорівнянні топології. Перетин топологій. Топологія, породжена родиною множин. Супремум топологій. Приклади.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....

Лекція 3 База та покриття топологічного простору. — 2 год.

Означення та критерій бази. Приклади. Критерій базовості.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....

Лекція 4 Передбаза топологічного простору. — 2 год.

Означення. Теорема про передбазу. Приклади.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....

Лекція 5 База та передбаза системи околів точки топологічного простору. Задання топології за допомогою системи околів простору. — 2 год.

Означення. Лема про монотонно спадну базу системи околів. Зв'язок між базами та передбазами простору та систем околів його точок. Приклади.

Задання топології за допомогою системи околів простору. Приклади.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....

Лекція 6 Внутрішність і замикання множини топологічного простору. Скрізь щільні та ніде не щільні множини. — 2 год.

Означення. Елементарні властивості. Критерії відкритості та замкненості множини. Теоретико-множинні властивості. Критерії скрізь щільності та ніде не щільності. Приклади.

Самостійна	3 год.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....	
Лекція 7	Внутрішні точки. Точки дотику, граничні й ізольовані точки. Локально скінченні родини множин. — 2 год. Означення. Теореми про множини внутрішніх точок і точок дотику. Теорема про точки дотику, граничні та ізольовані точки. Критерії відкритості та замкненості. Приклади. Означення та властивості локально скінченних родини множин. Приклади.
Самостійна	3 ГОД.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....	
Лекція 8	Відображення топологічних просторів. Неперервні відображення. — 2 год. Означення. Неперервність в термінах бази й передбази систем околів точки та її образу відповідно. Твердження про множину точок розриву. Критерій неперервності. Композиція неперервних відображень.
Самостійна	3 ГОД.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....	
Лекція 9	Відкриті та замкнені відображення. Гомеоморфізм. — 2 год. Означення. Відкритість (замкненість) відображень композиції. Критерії відкритості та замкненості відображення. Приклади. Означення та критерій гомеоморфізму. Приклади.
Самостійна	3 ГОД.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....	
Лекція 10	Ініціальна топологія. — 2 год. Теорема про ініціальну топологію. База та передбаза ініціальної топології. База та передбаза системи околів точки в ініціальній топології. Універсальна властивість. Транзитивність. Приклади.
Самостійна	3 ГОД.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....	
Лекція 11	Фінальна топологія. — 2 год. Теорема про фінальну топологію. Відкриті та замкнені в фінальній топології множини. База та передбаза фінальної топології. Універсальна властивість. Транзитивність.
Самостійна	3 ГОД.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....	

Контрольні запитання та завдання до теми 1

1. Топологічний простір. Порівняння топологій. Відкриті та замкнені множини.

2. База, покриття, передбаза топологічного простору. База та передбаза системи околів точки топологічного простору. Задання топології за допомогою системи околів простору.

3. Внутрішність і замикання множини топологічного простору. Скрізь щільні та ніде не щільні множини. Внутрішні точки. Точки дотику, граничні й ізольовані точки. Локально скінченні родини множин.

4. Відображення топологічних просторів. Неперервні відображення. Відкриті та замкнені відображення. Гомеоморфізм. Ініціальна та фінальна топології.

Тема 2. Основні топологічні конструкції

.....
Лекція 12 Індукована топологія. Підпростір. — 2 год.

Індукована топологія. Підпростір. Відкриті та замкнені в індукованій топології та в підпросторі множини. Бази та передбази. Універсальна властивість. Топологія, індукована композицією відображень. Звуження відображень. Фундаментальне покриття. Продовження відображень.

Самостійна

2 ГОД.

робота

Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....

Лекція 13 Фактортопологія. — 2 год.

Топологія насичених відкритих множин. Фактортопологія. Факторне відображення. Факторпростір. Відкрите та замкнене відношення еквівалентності. Підпростір відносно фактортопології. Звуження та продовження факторних відображень.

Самостійна

3 ГОД.

робота

Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,6,7].
.....

Лекція 14 Факторпростір. — 2 год.

Бази. Універсальна властивість. Факторизація. Факторпростір підпростору. Факторвідображення. Простір орбіт. Проективні простори.

Самостійна

ГОД.

робота

Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,6,7].

.....
Лекція 15 Топологічний добуток. — 2 год.

Тихоновська топологія. Внутрішність і замикання. Діагональний добуток від-ображень. Асоціативність і комутативність.

Самостійна 3 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....

Лекція 16 Відображення топологічних добутоків. — 2 год.

Відображення з топологічного добутку. Прямий добуток відображень. Підпростір топологічного добутку. Факторпростір топологічного добутку.

Самостійна 3 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3,7].
.....

Лекція 17 Топологічна сума. Відображення топологічних сум — 2 год.

Сума топологій. Розклад топологічного простору в топологічну суму. Асоціативність і комутативність. Внутрішність і замикання. Діагональна сума відображень. Пряма сума відображень. Відображення в топологічну суму. Дистрибутивність. Підпростір і факторпростір топологічної суми.

Самостійна 3 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3, 7].
.....

Контрольні запитання та завдання до теми 2

1. Індукована топологія. Підпростір. Відкриті та замкнені в індукованій топології та в підпросторі множини. Бази та передбази. Універсальна властивість. Топологія, індукована композицією відображень. Звуження відображень. Фундаментальне покриття. Продовження відображень.

2. Топологія насичених відкритих множин. Фактортопологія. Факторне відображення. Факторпростір. Відкрите та замкнене відношення еквівалентності. Підпростір відносно фактортопології. Звуження та продовження факторних відображень. Бази. Універсальна властивість. Факторизація. Факторпростір підпростору. Факторвідображення. Простір орбіт. Проективні простори.

3. Топологічний добуток. Тихоновська топологія. Внутрішність і замикання множини в топологічному добутку. Діагональний добуток відображень.

Асоціативність і комутативність топологічного добутку. Відображення з топологічного добутку. Прямий добуток відображень. Підпростір топологічного добутку. Факторпростір топологічного добутку.

4. Сума топологій. Топологічна сума. Розклад топологічного простору в топологічну суму. Асоціативність і комутативність топологічної суми. Внутрішність і замикання множини топологічної суми. Діагональна сума відображень. Пряма сума відображень. Відображення в топологічну суму. Дистрибутивність топологічних суми та добутку. Підпростір і факторпростір топологічної суми.

Типове завдання модульної контрольної роботи № 1

1. Нехай $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$:

- а) довести, що пара (X, τ) є топологічним простором;
- б) виписати всі відкриті та замкнені X множини;
- в) знайти базу топологічного простору (X, τ) найменшої потужності;
- г) з'ясувати, чи є родина $\beta = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$ підмножин множини X базою деякої топології на X ;
- д) знайти топологію на X , передбазою якої є родина $\mu = \{\{a\}, \{a, b\}\}$;
- е) знайти базу системи околів точки $x = a$ топологічного простору (X, τ) найменшої потужності;
- є) знайти внутрішність, замикання, множини граничних та ізольованих точок множини $A = \{b, c\}$ та з'ясувати, чи є множина A відкритою, замкненою, скрізь щільною або ніде не щільною в X ;
- ж) з'ясувати, чи є відображення $f : a \mapsto b, b \mapsto c, c \mapsto a$ топологічного простору (X, τ) у себе відкритим, замкненим, неперервним, і знайти множину всіх точок розриву відображення f ;

- з) знайти топологію τ_i на множині $S = \{a, b, c, d\}$, індуковану топологією τ на X та відображенням $i : S \rightarrow X, i : a \mapsto b, b \mapsto b, c \mapsto a, d \mapsto a$;
- и) знайти фактортопологію τ^p на множині $Q = \{a, b, c, d\}$ відносно топології τ на X та відображення $p : X \rightarrow Q, p : a \mapsto b, b \mapsto b, c \mapsto a$.
2. Довести, що топологічний простір дискретний тоді й лише тоді, коли жодна множина цього простору не має граничних точок.
3. Нехай $f : X \rightarrow Y$ і $g : Y \rightarrow Z$ — відображення топологічних просторів, f сюр'єктивне і неперервне, а композиція fg відкрита (замкнена). Довести, що відображення g відкрите (замкнене).

Змістовий модуль 2. Основні топологічні властивості. Гомотопії

Тема 3. Основні топологічні властивості.

.....
 Лекція 18 Класи топологічних властивостей і зв'язок між ними. — 2 год.

Самостійна Класи топологічних властивостей і зв'язок між ними. 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3, 7].

Лекція 19 Кардинальні інваріанти. — 2 год.

Вага та щільність топологічного простору. Аксиоми зліченності. Ліндельфовість і компактність. Сепарабельність.

Самостійна 3 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3, 7].

Лекція 20 Відокремлюваність. — 2 год.

Означення та приклади. Перша аксіома відокремлюваності. Хаусдорфовість. Третя та четверта аксіоми відокремлюваності. Характеристики аксіом відокремлюваності.

Самостійна 3 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3, 7].

Лекція 21 Метризовність. Збіжність. Простори Фреше-Урисона та секвенціальні простори. — 2 год.

Необхідні умови метризовності. Достатня умова метризовності. Характеристики метризовності. Границя послідовності. Необхідні й достатні умови єдиності границі. Неперервність у термінах збіжності. Збіжність у конструкціях. Простори Фреше-Урисона. Секвенціальні простори.

Самостійна 3 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3, 7].

Лекція 22 Зв'язність і лінійна зв'язність. — 2 год.

Зв'язний топологічний простір. Критерій незв'язності. Зв'язна множина топологічного простору. Достатні умови зв'язності. Компоненти зв'язності. Образ зв'язного простору при неперервному відображенні. Зв'язність топологічного добутку. Шлях. Лінійно зв'язні простори та множини.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [1–3, 7].

Контрольні запитання та завдання до теми 3

1. Кардинальні інваріанти. Вага та щільність топологічного простору. Аксиоми зліченності. Ліндельфовість і компактність. Сепарабельність.

2. Відокремлюваність. Перша аксіома відокремлюваності. Хаусдорфовість. Третя та четверта аксиоми відокремлюваності.

3. Метризовність.

4. Збіжність. Границя послідовності. Необхідні й достатні умови єдиності границі. Неперервність у термінах збіжності. Збіжність у конструкціях. Простори Фреше-Урисона. Секвенціальні простори.

5. Зв'язність. Лінійна зв'язність.

Тема 4. Гомотопії

Лекція 23 Простір відображень. Гомотопія. Ретракт. — 2 год.

Простір неперервних відображень. Гомотопія неперервних відображень. Гомотопічний тип. Стягуваний простір. Продовження відображень. Ретракт. Деформаційний ретракт. Сильний деформаційний ретракт. Циліндр відображення.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу. Література [4, 5, 8].

.....	
Лекція 24	Категорії та функтори. — 2 год. Означення категорії. Приклади. Функтори. Природне перетворення функторів. Категорія функторів.
Самостійна	2 год.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [4, 5, 8].
.....	
Лекція 25	Функтори гомотопічних груп. — 2 год. Гомотопічна група простору. Гомоморфізм гомотопічних груп, індукований неперервним відображенням топологічних просторів. Фундаментальна група. Однозв'язні простори.
Самостійна	2 год.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [4, 5, 8].
.....	
Лекція 26	Обчислення фундаментальних і гомотопічних груп деяких просторів. — 2 год. Лінійчаті шляхи на поверхні та їх комбінаторні гомотопії. Комбінаторні апроксимації шляхів і гомотопій.
Самостійна	2 год.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [4, 5, 8].
.....	
Лекція 27	Фундаментальна група кола. Фундаментальна група поверхні. — 2 год. Фундаментальна група кола. Фундаментальна група поверхні.
Самостійна	2 год.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [4, 5, 8].
.....	
Лекція 28	Топологічна інваріантність ойлерової характеристики поверхні. — 2 год. Деякі застосування. Степінь відображення. Гомотопічні групи конкретних просторів. Самостійна робота 2 год. Опрацювання лекційного матеріалу
Самостійна	2 год.
робота	Опрацювання лекційного матеріалу. Література [4, 5, 8].

Контрольні запитання та завдання до теми 4

1. Простір неперервних відображень. Гомотопія неперервних відображень. Гомотопічний тип. Стягуваний простір. Продовження відображень. Ретракт. Деформаційний ретракт. Сильний деформаційний ретракт. Циліндр відображення.
2. Означення категорії. Приклади. Функтори. Природне перетворення

функторів. Категорія функторів.

3. Гомотопічна група простору. Гомоморфізм гомотопічних груп, індукований неперервним відображенням топологічних просторів. Фундаментальна група. Однозв'язні простори.

4. Обчислення фундаментальних і гомотопічних груп деяких просторів. Лінійчаті шляхи на поверхні та їх комбінаторні гомотопії. Комбінаторні апроксимації шляхів і гомотопій. Фундаментальна група кола. Фундаментальна група поверхні. Топологічна інваріантність ойлерової характеристики поверхні. Деякі застосування. Степінь відображення. Гомотопічні групи конкретних просторів.

Типове завдання модульної контрольної роботи № 2

1. Нехай $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$:

а) з'ясувати, які аксіоми зліченності задовольняє топологічний простір (X, τ) , чи є він ліндельфовим, компактним, сепарабельним, та в разі сепарабельності вписати не більш ніж зліченну скрізь щільну в ньому множину найменшої потужності;

б) з'ясувати, які аксіоми відокремлюваності задовольняє топологічний простір (X, τ) та чи є він регулярним або нормальним;

в) знайти множину границь послідовності $\{x_{2n-1} = b, x_{2n} = a\}_{n \in \mathbb{N}}$;

г) з'ясувати, чи є топологічний простір (X, τ) зв'язним та лінійно зв'язним.

2. Довести, що топологічний простір X стягуваний в тому й лише в тому разі, коли його тотожне відображення гомотопне сталому відображенню.

3. Довести, що коли топологічний простір X зв'язний і має той самий гомотопічний тип, що й топологічний простір Y , то Y також стягуваний.

4. Нехай X та Y — топологічні простори й A — підпростір простору X . Довести, що $A \times Y$ є ретрактом простору $X \times Y$ тому й лише в тому разі, коли A — ретракт X .
5. Нехай — топологічні простори й — підпростір простору Довести, що є ретрактом простору тому й лише в тому разі, коли — ретракт
6. Довести, що ретракт хаусдорфового простору замкнений.

Типові завдання екзаменаційного білету

1. 25% Теоретичне питання.
2. 25% Теоретичне питання.
3. 25% Одне з типових завдань модульної контрольної роботи чи аналогічне за складністю.
4. 25% Одне з типових завдань модульної контрольної роботи чи аналогічне за складністю.

Перелік питань, які виносяться на іспит

1. Топологічний простір. Порівняння топологій. Відкриті та замкнені множини.
2. База, покриття, передбаза топологічного простору. База та передбаза системи околів точки топологічного простору. Задання топології за допомогою системи околів простору.
3. Внутрішність і замикання множини топологічного простору. Щільні та ніде не щільні множини. Внутрішні точки. Точки дотику, граничні й ізольовані точки. Локально скінченні родини множин.
4. Відображення топологічних просторів. Неперервні відображення. Відкриті та замкнені відображення. Гомеоморфізм. Ініціальна та фінальна топології.
5. Індукована топологія. Підпростір. Відкриті та замкнені в індукованій топології та в підпросторі множини. Бази та передбази. Універсальна властивість. Топологія, індукована композицією відображень. Звуження відображень. Фундаментальне покриття. Продовження відображень.

6. Топологія насичених відкритих множин. Фактортопологія. Факторне відображення. Факторпростір. Відкрите та замкнене відношення еквівалентності. Підпростір відносно фактортопології. Звуження та продовження факторних відображень. Бази. Універсальна властивість. Факторизація. Факторпростір підпростору. Факторвідображення. Простір орбіт. Проективні простори.

7. Топологічний добуток. Тихоновська топологія. Внутрішність і замикання множини в топологічному добутку. Діагональний добуток відображень. Асоціативність і комутативність топологічного добутку. Відображення з топологічного добутку. Прямий добуток відображень. Підпростір топологічного добутку. Факторпростір топологічного добутку.

8. Сума топологій. Топологічна сума. Розклад топологічного простору в топологічну суму. Асоціативність і комутативність топологічної суми. Внутрішність і замикання множини топологічної суми. Діагональна сума відображень. Пряма сума відображень. Відображення в топологічну суму. Дистрибутивність топологічних суми та добутку. Підпростір і факторпростір топологічної суми.

9. Кардинальні інваріанти. Вага та щільність топологічного простору. Аксиоми зліченності. Ліндельофовість і компактність. Сепарабельність.

10. Відокремлюваність. Перша аксіома відокремлюваності. Хаусдорфовість. Третя та четверта аксіоми відокремлюваності.

11. Метризованість.

12. Збіжність. Границя послідовності. Необхідні й достатні умови єдності границі. Неперервність у термінах збіжності. Збіжність у конструкціях. Простори Фреше-Урсона. Секвенціальні простори.

13. Зв'язність. Лінійна зв'язність.

14. Простір неперервних відображень. Гомотопія неперервних відображень. Гомотопічний тип. Стягуваний простір. Продовження відображень. Ретракт. Деформаційний ретракт. Сильний деформаційний ретракт. Циліндр відображення.

15. Означення категорії. Приклади. Функтори. Природне перетворення функторів. Категорія функторів.

16. Гомотопічна група простору. Гомоморфізм гомотопічних груп, індукований неперервним відображенням топологічних просторів. Фундаментальна група. Однозв'язні простори.

17. Обчислення фундаментальних і гомотопічних груп деяких просторів. Лінійчаті шляхи на поверхні та їх комбінаторні гомотопії. Комбінаторні апроксимації шляхів і гомотопій. Фундаментальна група кола. Фундаментальна група поверхні. Топологічна інваріантність ойлерової характеристики поверхні. Деякі застосування. Степінь відображення. Гомотопічні групи конкретних просторів.

Рекомендована література

а) основна:

1. В. М. Бабич, В. О. Пехтерев. Загальна топологія в задачах і прикладах. — Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2015. — 208 с.
2. M. G. Murdeshwar. General Topology. — New Age International Pvt Ltd Publishers, 2008. — 386 p.
3. Р. Энгелькинг. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.
4. Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. — М.: Мир, 1983. — 304 с.
5. Р. М. Свитцер. Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985. — 608 с.

б) додаткова:

1. Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян. Общая топология: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979. — 336 с.
2. L. A. Steen, J. A. Seebach, Jr. Counterexamples in topology. — New York: Dover Publications, Inc., 1995. — 244 p.

3. Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко.
Введение в топологию: Учеб. пособие. — 2-е изд., доп. — М.: Наука,
1995. — 416 с.