

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Механіко-математичний факультет

(назва факультету, інституту)

Кафедра геометрії, топології і динамічних систем

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора
з навчальної роботи

« _____ » _____ 2017 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ¹

**Аналітико-геометричні методи аналізу
нелінійних диференціальних рівнянь**

(повна назва навчальної дисципліни)

для студентів освітнього рівня «магістр»

галузь знань 11 математика та статистика

спеціальність 111 математика
(шифр і назва спеціальності)

освітня програма математика

КИЇВ – 2017

¹ Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролю.

Робоча програма навчальної дисципліни Аналітико-геометричні методи аналізу нелінійних диференціальних рівнянь.

Назва навчальної дисципліни

для студентів *галузі знань/ спеціальності/ освітньої програми* 11 математика та статистика/ 111 математика/ математика

« 24 » квітня 2017 року – 14 с.

Розробник: доктор фіз.-мат. наук, професор Парасюк

Робоча програма дисципліни Аналітико-геометричні методи аналізу нелінійних диференціальних рівнянь затверджена на засіданні кафедри геометрії, топології і динамічних систем

Протокол № 9 від « 12 » квітня 2017 року

Завідувач кафедри _____

_____ (підпис)

(Парасюк І.О.)

(прізвище та ініціали)

« 12 » квітня 2017 року

Схвалено науково - методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол № 9 від « 24 » квітня 2017 року

Голова науково-методичної комісії _____ (_____) (підпис) (прізвище та ініціали)

« 24 » квітня 2017 року

© І.О. Парасюк, 2017 рік

ВСТУП

Навчальна дисципліна Аналітико-геометричні методи аналізу
нелінійних диференціальних рівнянь

(назва дисципліни)

є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «магістр» галузі знань 11 математика та статистика зі спеціальності 111_математика освітньої програми «математика»

Дана дисципліна _____ є дисципліною вільного вибору студента _____

Викладається у **3** семестрі **2** курсу в **обсязі 90 год.:**

(зазначається загальний обсяг)

3 кредити ECTS², зокрема: *лекції – 28 год., самостійна робота – 60 год.*

У курсі передбачено **2** змістових модулів та **2** модульні контрольні роботи, а також **2 год. консультацій**. Формами підсумкового контролю є **іспит**.

Мета дисципліни – Ознайомлення з сучасним математичним апаратом теорії диференціальних рівнянь, оволодіння базовими теоретичними та практичними аналітико-геометричними методами локального та нелокального аналізу широких класів векторних полів та систем диференціальних рівнянь, характерними прикладами застосувань цих методів.

Завдання – сформулювати чітке уявлення про важливі задачі нелінійного аналізу диференціальних рівнянь, окремі ефективні підходи та методи їх дослідження, підготувати студентів до використання отриманих знань у подальшій професійній діяльності, сприяти розвитку логічного та аналітичного мислення студентів, підвищити їхню загальну математичну культуру.

Структура курсу: Проблеми локального аналізу в околі особливої точки. Теорема Гробмана – Гартмана. Метод номальних форм. Біфуркації граничних циклів. Проблеми локального аналізу в околі циклу. Гіперболічні цикли та гомоклінічна структура.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні поняття та об'єкти теорії нелінійних автономних систем, а саме: різні види еквівалентності потоків та векторних полів; терему Гробмана – Гартмана; поняття нормальної форми, гомологічного рівняння, резонансних та нерезонансних форм, степеневих перетворень; поняття біфуркації фазових портретів; умови, за яких спостерігається біфуркація Андронова – Гопфа; відображення Пуанкаре; зв'язок матриці лінеаризованого відображення Пуанкаре з матрицею монодромії відповідної лінеризованої системи; умови, за яких цикл є локальним атрактором; поняття гіперболічної структури в околі циклу; поняття гомоклінічної структури;

вміти: застосовувати отримані знання при аналізі нелінійних динамічних систем в околі положення рівноваги та циклу; будувати нормальну форму автономної системи в околі особливої точки; проводити класифікацію нормальних форм двовимірних систем; виконувати степеневі перетворення в нелінійній нормалізованій системі; застосовувати метод нормальних форм при дослідженні стійкості положень рівноваги в критичних випадках, в задачі розріз-

² кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

нення центра і фокуса, при вивченні явища біфуркації граничного циклу; визначати тип циклу за його мультиплікаторами.

Місце дисципліни (в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідного напрямку). Вибіркова навчальна дисципліна “Аналітико-геометричні методи аналізу нелінійних диференціальних рівнянь” є складовою освітнього циклу підготовки фахівців освітнього рівня «магістр».

Зв’язок з іншими дисциплінами. Викладанню дисципліни “Аналітико-геометричні методи аналізу нелінійних диференціальних рівнянь” передують вивчення таких математичних дисциплін, як “Аналітична геометрія”, “Математичний аналіз”, “Лінійна алгебра”, “Диференціальні рівняння”, “Диференціальна геометрія та топологія”, “Комплексний аналіз”. У подальшому матеріал курсу “Аналітико-геометричні методи аналізу нелінійних диференціальних рівнянь” використовується при викладанні інших дисциплін вільного вибору студента та аспіранта, а набуті студентами знання — при написанні кваліфікаційних робіт.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль здійснюється за *модульно-рейтинговою системою*. У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1 – 3, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) входять теми 4 – 6. Обов’язковим для допуску до іспиту є написання 1-ї та 2-ї модульних контрольних робіт.

Оцінювання за формами контролю³:

	ЗМ 1		ЗМ 2	
	Min- балів	Max- балів	Min- балів	Max- балів
Активність на заняттях і виконання позааудиторної самостійної роботи	6	10	7	10
Модульна контрольна робота	11	20	11	20

Студенти, які в семестрі набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум 35 балів*, допускаються до іспиту за умови написання додаткової контрольної роботи за матеріалом відповідного семестру та доопрацювання завдань самостійної позааудиторної роботи на кількість балів, яка в сумі з набраними в семестрі складає не менше **35**.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

Форма іспиту – письмово-усна. Екзаменаційний білет іспиту складається із 4 завдань, перші 2 з яких є теоретичними, а 2 останніх – задачі. Кожне завдання оцінюється від 0 до 8 балів. Додатково від 0 до 8 балів студент отримує за усне опитування. Всього за іспит можна отримати від 0 до 40 балів.

³ Див. Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу від 1 жовтня 2010 року, а також Розпорядження ректора «Про методику розрахунку підсумкової оцінки дисциплін, які читаються два і більше семестри» від 29 вересня 2010 року

При розрахунку отримаємо:

	<i>Змістовий модуль 1</i>	<i>Змістовий модуль 2</i>	<i>Іспит</i>	<i>Разом (підсумкова оцінка)</i>
Мінімальна оцінка в балах	17	18	25	60
Максимальна оцінка в балах	30	30	40	100

При цьому, кількість балів відповідає оцінці:

1-34 – «незадовільно» **з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;**

35-59 – «незадовільно» **з можливістю повторного складання;**

60-64 – «задовільно» («**достатньо**»);

65-74 – «задовільно»;

75 - 84 – «добре»;

85 - 89 – «добре» («**дуже добре**»);

90 - 100 – «відмінно».

Шкала відповідності

За 100-бальною шкалою	Оцінка іспиту за національною шкалою		Оцінка заліку за національною шкалою
90 – 100	5	Відмінно	
85 – 89	4	Добре	
75 – 84			
65 – 74	3	задовільно	
60 – 64			
35 – 59	2	незадовільно	
1 – 34			

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

I Семестр

Модуль 1

Локальний метод нелінійного аналізу автономних систем в околі особливої точки

Тема 1. Задачі класифікації та локального аналізу.....4 год.

Види відношень еквівалентності потоків та векторних полів. Проблеми локального аналізу. Теорема Гробмана – Гартмана. Поліномні відображення. Формула Тейлора. Базисні форми. Носії.

Тема 2. Гомологічне рівняння та його розв'язування.....6 год.

Поняття про метод нормальних форм. Гомологічне рівняння. Лінійне гомологічне рівняння. Розв'язання гомологічного рівняння для діагоналізованої лінійної частини. Резонансні члени. Існування дійсного розв'язку. Розв'язання гомологічного рівняння в загальному випадку. Теорія Фредгольма для гомологічного рівняння. Гомологічне рівняння, що виникає при спряженні відображень та його розв'язання.

Тема 3. Перетворення та класифікація нормальних форм.....4 год.

Запис Брюно нормальної форми. Степеневі перетворення нормальної форми. Класифікація нормальних форм систем на площині.

Модуль 2.

Застосування методу нормальних форм

Тема 4. Застосування нормальної форми в проблемах стійкості та центра і фокуса..... 2 год.

Дослідження стійкості положення рівноваги в критичному випадку. Застосування методу нормальних форм до проблеми центра і фокуса. Ляпуновські величини.

Тема 9. Застосування нормальної форми в теорії біфуркацій.6 год.

Біфуркація Андронова-Гопфа. М'яке та жорстке народження автоколивань. Народження автоколивань у системах з позитивним зворотнім зв'язком. Модель генератора автоколивань. Моделі економічних процесів. Біфуркації у двопараметричній сім'ї автономних систем на площині. Про біфуркацію Андронова-Гопфа в \mathbf{R}^n . Поняття про центральний многовид. Застосування в теорії біфуркацій.

Тема 6. Локальний аналіз в околі циклу..... 6 год.

Проблеми локального аналізу систем в околі замкнених фазових кривих. Відображення Пуанкаре. Існування локального відображення Пуанкаре. Лінеаризація відображення Пуанкаре. Зв'язок з матрицею монодромії системи в варіаціях в околі циклу. Цикл як локальний аттрактор. Гіперболічний цикл. Поняття про гомоклінічну структуру.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
3 семестр

№ теми	Назва теми	Кількість годин			
		лекції	семінари/ лаборат., практичні	самоств. робота	Інші форми контр.
Змістовий модуль 1					
Локальний метод нелінійного аналізу автономних систем в околі особливої точки					
1	Задачі класифікації та локального аналізу	4		8	
2	Гомологічне рівняння та його розв'язування.	6		10	
3	Перетворення та класифікація нормальних форм	4		12	
Модульна контрольна робота					2
Змістовий модуль 2					
Застосування методу нормальних форм					
4	Застосування нормальної форми в проблемах стійкості та центра і фокуса	2		6	
5	Застосування нормальної форми в теорії біфуркацій.	6		10	
6	Локальний аналіз в околі циклу	6		14	
Модульна контрольна робота					2
ВСЬОГО		28		60	

Загальний обсяг **90** год., в тому числі:

Лекцій – **28** год.

Семінари/лабораторні, практичні – ____ год.

Самостійна робота – **60** год.

Консультації – **2** год

III Семестр
Змістовий модуль 1.
Локальний метод нелінійного аналізу автономних систем
в околі особливої точки

Тема 1. Задачі локального аналізу. Допоміжні відомості.

Лекція 1. Види відношень еквівалентності потоків та векторних полів. Проблеми локального аналізу. Теорема Гробмана – Гартмана.

Завдання для самостійної роботи 1 (4 год.) Опрацювати теоретичний матеріал [4] п.3.1, 3.2, 4.2; ознайомитися з [2] Вступ; [5], п.1.1.

Лекція 2. Поліномні відображення. Формула Тейлора. Базисні форми. Носій. Поняття про метод нормальних форм.

Завдання для самостійної роботи 2 (4 год.). Опрацювати теоретичний матеріал [5] п. 1.2.

Тема 2. Гомологічне рівняння та його розв'язування.

Лекція 3. Гомологічне рівняння. Лінійне гомологічне рівняння. Розв'язання гомологічного рівняння для діагоналізованої лінійної частини. Резонансні члени. Існування дійсного розв'язку.

Завдання для самостійної роботи 3 (2 год.) Опрацювати теоретичний матеріал [1] § 22, п.А-Г, [4] гл.ІІІ, п.1.1.-1.3, [5] п. 1.4 – 1.5.

Лекція 4. Розв'язання гомологічного рівняння в загальному випадку. Теорія Фредгольма для гомологічного рівняння.

Завдання для самостійної роботи 4 (4 год.) Опрацювати теоретичний матеріал [5], п. 1.6

Лекція 5. Гомологічне рівняння, що виникає при спряженні відображень та його розв'язання.

Завдання для самостійної роботи 5 (4 год.) Опрацювати матеріал [1] § 25, п. А-Б., [5], п. 2.8.

Тема 3. Перетворення та класифікація нормальних форм.

Лекція 6. Запис Брюно нормальної форми. Степеневі перетворення нормальної форми.

Завдання для самостійної роботи 6 (6 год.) Опрацювати матеріал [2] гл. ІІІ § 2; [5], п. 1.10.

Лекція 7. Класифікація нормальних форм систем на площині.

Завдання для самостійної роботи 7 (6 год.) Опрацювати матеріал [2] гл. II, §1, п. 1.6.; [5], п. 1.11.

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке потік автономної системи?
2. Як перетворюються векторне поле і автономна система під дією дифеоморфізму?
3. Що таке носій ряду Тейлора правої частини автономної системи?
4. Вкажіть базис в просторі однорідних поліномних форм.
5. Запишіть вигляд лінійного гомологічного рівняння.
6. Як розв'язується лінійне гомологічне рівняння у випадку діагоналізованості матриці лінійної частини?
7. Що таке резонансні члени?
8. Якою є умова дійсності розв'язку гомологічного рівняння?
9. Як доводиться існування розв'язку гомологічного рівняння в загальному випадку?
10. Як задати скалярний добуток в просторі однорідних поліномних форм?
11. Як застосовується теорія Фредгольма при розв'язанні гомологічного рівняння?
12. Як виглядає гомологічне рівняння в задачі про спряження відображень в околі нерухомої точки?
13. Дайте означення пагона і струменя. Як операції виконуються над пагонами і струменями?
14. Чи всякий степеневий ряд є рядом Тейлора гладкого відображення?
15. Доведіть що нелінійне гомологічне рівняння зображається у вигляді рекурентної послідовності лінійних гомологічних рівнянь.
16. Наслідком яких попередніх тверджень є теорема про існування нормальної форми?
17. Чи вмієте ви подати нормальну форму у вигляді, запропонованому Брюно?
18. Чому показники оборотного степеневого перетворення утворюють унімодулярну матрицю?
19. До якого вигляду можна звести нормальну форму внаслідок степеневого перетворення? Чим визначається вимірність "відщепленої системи"?
20. Покажіть, що всі нормальні форми систем на площині інтегровні.

Зразок модульної контрольної роботи 1-го змістового модуля

1. Перетворення системи за допомогою дифеоморфізму. Показати, що лінійна система $\dot{x} = Ax$ інваріантна відносно дифеоморфізму $x \rightarrow e^B x$, якщо $AB = BA$.
2. Розв'язати гомологічне рівняння $L_A H_2 y^2 = P_2 y^2$,

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 y^2 = \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити скалярний добуток 2-форм $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(x_1 x_2 + x_2^2)$.
4. Довести лему Бореля.
5. Показати, що система $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_1^7 x_2^4, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_1^3 x_2^3 \end{cases}$ є нормальною формою і знайти степеневе перетворення, яке зводить її до інтегровного вигляду.

Змістовий модуль 2.

Застосування методу нормальних форм

Тема 4. Застосування нормальної форми в проблемах стійкості та центра і фокуса

Лекція 8. Дослідження стійкості положення рівноваги в критичному випадку. Застосування методу нормальних форм до проблеми центра і фокуса. Ляпуновські величини.

Завдання для самостійної роботи 8 (6 год.) Опрацювати матеріал [1] гл. II, §4; [5], п. 1.12. Оволодіти технікою відшукування ляпуновських величин [10]. Виконати вправу [7] с.3.6.(3).

Тема 9. Застосування нормальної форми в теорії біфуркацій

Лекція 9. Біфуркація Андронова-Гопфа. М'яке та жорстке народження автоколивань.

Завдання для самостійної роботи 9 (3 год.) Опрацювати матеріал [1] § 33 А-Б; [5], п. 1.13. Ознайомитися з [2] § 29, [3] гл.3, [7] ch. 3, s.3.1, s. 3.4., 3.5.

Лекція 10. Народження автоколивань у системах з позитивним зворотнім зв'язком. Модель генератора автоколивань. Моделі економічних процесів.

Завдання для самостійної роботи 10 (3 год.) Опрацювати матеріал [5], п. 1.14, 1.15; [7] ch. 3, s. 3.5. Виконати вправи [7] ch. 3, s. 3.5. (5).

Лекція 11. Біфуркації у двопараметричній сім'ї автономних систем на площині. Про біфуркацію Андронова-Гопфа в \mathbf{R}^n . Поняття про центральний многовид. Застосування в теорії біфуркацій.

Завдання для самостійної роботи 11 (4 год.) Опрацювати матеріал [1] §33; [5], п. 1.17 – 1.19. Ознайомитись з [7] ch.5, s.5.1-5.3, ch.8 s.8.3.

Тема 6. Локальний аналіз в околі циклу

Лекція 12. Проблеми локального аналізу систем в околі замкнених фазових кривих. Відображення Пуанкаре. Існування локального відображення Пуанкаре. Лінеаризація відображення Пуанкаре. Зв'язок з матрицею монодромії системи в варіаціях в околі циклу.

Завдання для самостійної роботи 12 (4 год.) Опрацювати матеріал [5] п. 2.1, 2.2; [6] гл. IX §10, [7] ch.1, s.1.5.

Лекція 13. Цикл як локальний атрактор.

Завдання для самостійної роботи 13 (4 год.) Опрацювати матеріал [5] п.2.3; [6] гл. IX § 11. [7] ch.1, s.1.5.

Лекція 14. Гіперболічний цикл. Поняття про гомоклінічну структуру.

Завдання для самостійної роботи 14 (6 год.) Опрацювати матеріал [5] п.2.6, 2.7; [8] ch.2. s.2.2.

Контрольні запитання та завдання

1. Чим характеризується критичний випадок в теорії стійкості?
2. Що таке ляпуновська величина?
3. Як в термінах ляпуновських величин визначається стійкість положення рівноваги в критичному випадку.
4. Сформулювати достатні умови існування стійкого фокуса в системі, для якої фазовим портретом відповідної лінеаризованої системи є центр.
5. Сформулюйте умови, за яких спостерігається біфуркація Андронова-Гопфа.
6. В чому полягає явище біфуркації граничного циклу?
7. Чим відрізняється м'яке народження автоколивань від жорсткого?
8. За рахунок чого в моделі генератора автоколивань відбувається втрата стійкості положення рівноваги?
9. Які нові біфуркаційні ефекти виникають в системі, залежній від двох параметрів?
10. Як використовується теорема про центральний многовид при дослідженні біфуркацій циклу в \mathbb{R}^n ?
11. Як будується відображення Пуанкаре в околі циклу?
12. Як пов'язані між собою власні числа матриці лінеаризації відображення Пуанкаре та мультиплікатори відповідної ЛОС з періодичними коефіцієнтами?
13. За яких умов цикл буде локальним атрактором?

14. Що таке асимптотична фаза?
15. Що означає гіперболічність циклу? Що таке стійкий і нестійкий інтегральні многовиди?
16. Намалуйте схему гомоклінічної структури.

Зразок модульної контрольної роботи 2-го змістового модуля

1. Встановити умови стійкості та нестійкості тривіального положення рівноваги системи $\dot{x} = Ax + F_3 x^3$ де $x \in \mathbb{R}^2$, а власні числа матриці A суто уявні.
2. Пояснити ідею розв'язання проблеми центра і фокуса. Проілюструвати її на прикладі системи $\dot{x} = -y + x^4$, $\dot{y} = x - y^3 + x^2 y^2$.
3. Чи відбувається біфуркація Андронова-Гопфа в системі

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - (x_1^3 + x_1 x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 - (x_1^2 x_2 + x_2^3) \end{cases}$$
 , коли параметр μ проходить точку нуль зліва направо.
4. Пояснити сутність явища гістерезису автоколивань в двопараметричній системі.
5. З'ясувати характер стійкості циклу 3-вимірної системи, якщо матриця монодромії відповідної лінеаризованої системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 2/3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перелік питань на іспит

Векторне поле, автономна система, фазовий простір, потік, траєкторія, положення рівноваги. Типи відношень еквівалентності між потоками і векторними полями. Проблема локального аналізу автономної системи в околі особливої точки. Лінеаризація. Теорема Гробмана-Хартмана. Перетворення системи за допомогою дифеоморфізмів.

Поліномні відображення. Формула Тейлора. Базисні форми. Носій.

Поняття про метод нормальних форм. Гомологічне рівняння. Лінійне гомологічне рівняння. Розв'язування гомологічного рівняння для діагоналізованої лінійної частини. Резонансні члени. Існування дійсного розв'язку.

Побудова нормальної форми в загальному випадку. Теорія Фредгольма для гомологічного рівняння.

Термінологія та об'єкти локального аналізу. Пагони, струмені. Лема Бореля. Операції з пагонами і струменями, перетворення за допомогою дифеоморфізмів. Існування нормальної форми певного порядку. Формальна нормальна форма.

Запис Брюно. Степеневі перетворення нормальної форми. Класифікація нормальних форм систем на площині.

Застосування до дослідження стійкості положення рівноваги системи на площині з кубічною нелінійністю в критичному випадку. Застосування методу нормальних форм до проблеми центра і фокуса. Ляпуновські величини.

Біфуркація Гопфа. М'яке та жорстке народження автоколивань. Народження автоколивань у ламповому генераторі. Біфуркація в моделі хижак-жертва. Біфуркації у двопараметричній сім'ї автономних систем на площині.

Біфуркацію Андронова-Гопфа в R^n . Поняття про центральний многовид. Біфуркація циклу в системі нелінійних параболічних рівнянь типу "реакція-дифузія".

Відображення Пуанкаре. Існування локального відображення Пуанкаре. Лінеаризація відображення Пуанкаре. Зв'язок з матрицею монодромії системи в варіаціях в околі циклу. Цикл як локальний атрактор. Гіперболічний цикл. Поняття про гомоклінічну структуру.

Зразок екзаменаційного білета

1. Теорія Фредгольма для гомологічного рівняння.

2. Існування локального відображення Пуанкаре.

3. Показати, що система
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_1^7 x_2^4, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_1^3 x_2^3 \end{cases}$$
 є нормальною формою і знайти

ступеневе перетворення, яке зводить її до інтегровного вигляду.

4. Чи відбувається біфуркація Андронова-Гопфа в системі

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - (x_1^3 + x_1 x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 - (x_1^2 x_2 + x_2^3) \end{cases}$$
, коли параметр μ проходить точку нуля зліва направо.

Рекомендована література

Основна

1. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Ижевск: РХД, 1999.
2. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. – М: Наука, 1979.
3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980.
4. Парасюк І.О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь. – К.: ВПЦ Київ. ун-т, 2005.
5. Парасюк І.О., Перестюк М.О. Локальний аналіз нелінійних диференціальних рівнянь. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2013.
6. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970.
7. Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory. – Springer, 1998

Додаткова

8. В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.1 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). — М., 1985. — С. 7-149.
9. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998.
10. Gasull A., Prohens R. Effective computation of the first Lyapunov quantities for a planar differential equation// Applicationes mathematicae 24,3 (1997), pp. 243–250.