

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Механіко-математичний факультет

Кафедра геометрії, топології і динамічних систем

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора
з навчальної роботи

« ____ » _____ 20__ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ¹

Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології

для студентів

галузь знань	11 математика та статистика
спеціальність	111 математика
освітня програма	математика

КИЇВ – 2017

¹ Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролю.

Робоча програма «Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології»

для студентів *галузі знань/спеціальності/освітньої програми* 11 математика та статистика / 111 математика / математика

« 24 » квітня 2017 року - 11 с.

Розробник²: Пришляк Олександр Олегович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Робоча програма дисципліни «Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології» затверджена на засіданні кафедри геометрії, топології і динамічних систем

Протокол № 9 від “ 12 ” квітня 2017 року

Завідувач кафедри _____ (Парасюк І.О.)
(підпис) (прізвище та ініціали)

« 9 » квітня 2017 року

Схвалено науково-методичною комісією механіко-математичного факультету

Протокол № 9 від «24» квітня 2017 року

Голова науково-методичної комісії _____ (Курченко О.О.)
(підпис) (прізвище та ініціали)

«24 » квітня 2017 року

© О.О. Пришляк, 2017 рік

² Розробляється лектором. Робоча програма навчальної дисципліни розглядається на засіданні кафедри (циклової комісії – для коледжів), науково-методичної комісії факультету/інституту (раді навчального закладу - коледжу), підписується завідувачем кафедри (головою циклової комісії), головою науково-методичної комісії факультету/інституту (головою ради) і затверджується заступником декана/директора інституту з навчальної роботи (заступником директора коледжу).

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології» є складовою освітньої програми підготовки фахівців за освітнім рівнем «бакалавр» галузі знань 11 математика та статистика зі спеціальності 04020101 математика освітньої програми «математика».

Дана дисципліна є дисципліною вільного вибору.

Викладається у 2 семестрі 3 курсу в обсязі 90 год. (3 кредитів ECTS³) зокрема: лекції – всього 38 год., консультації 2 год., самостійна робота – 50 год. У курсі передбачено 2 змістових модулі та 2 модульні контрольні роботи. Завершується дисципліна заліком

Мета дисципліни – оволодіння сучасними алгоритмічними та комп'ютерними методами, теоретичними положеннями та основними застосуваннями топології многовидів в різних задачах математики.

Завдання – підготувати студентів до використання топології многовидів в подальших навчальних курсах, сприяти розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Структура курсу: алгоритмічні методи в теорії поверхонь та мало вимірних многовидів, топологічні властивості функцій на поверхнях, топологія динамічних систем на поверхнях.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні поняття теорії многовидів та теорії Морса, зокрема розклади многовидів на ручки та операції з ними, топологічну еквівалентність функцій, графа Ріба, атоми та молекули (за Фоменком) гладких функцій, потоки Морса-Смейла, стійкі та не стійкі інваріантні многовиди нерухомої точки, структурну стійкість потоків, вкладення графів у поверхню;

вміти: застосовувати алгоритми перевірки коли симпліціальний комплекс задає многовид, алгоритм гомеоморфності двох поверхонь, знаходити ейлерову характеристику та інші топологічні інваріанти, перевіряти чи будуть дві функції на поверхнях топологічно еквівалентними, перевіряти структурно стійкі потоки на поверхнях на топологічну еквівалентність. Будувати їх повний топологічний інваріант.

Місце дисципліни (в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідної спеціальності). Дисципліна вільного вибору „Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології” є складовою освітнього циклу підготовки фахівців освітнього рівня „бакалавр”.

Зв'язок з іншими дисциплінами. «Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології» базується на знанні таких дисциплін: „Математичний аналіз”, „Диференціальні рівняння”, „Диференціальна геометрія та топологія».

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти. Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою. У змістовий модуль 1 (ЗМ1)

³ кредитів ECTS – кредит кратний 30 годинам.

входять теми 1,2, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) входять теми 3,4. Обов'язковим для допуску до заліку є написання 1-ї та 2-ї модульних контрольних робіт з кількістю балів не менше 8 (1-ша) та 8 (2-га). У період з 23.01 по 28.02 студенти один раз на тиждень повинні на електронну адресу викладача надсилати виконані ними завдань самостійної роботи, які передбачені в цій робочій програмі. За результатами виконаних у цей період завдань студент повинен отримати не менше 5 балів.

Оцінювання за формами контролю:

	<i>ЗМ1</i>		<i>ЗМ2</i>	
	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>	<i>Min. – балів</i>	<i>Max. – балів</i>
Активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи	5	20	5	20
Модульна контрольна робота 1	3	10		
Модульна контрольна робота 2			3	10

Студенти, які протягом семестру набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум 35 балів*, для одержання заліку обов'язково повинні написати на потрібну кількість балів додаткову контрольну роботу за матеріалом відповідного семестру та доскладають домашні завдання для підвищення балів за виконання самостійної роботи.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року. Форма заліку письмово-усна.

Розрахунок балів, які студент отримує при успішній здачі заліку:

	Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	залік / іспит	Підсумкова оцінка
<i>Мінімум</i>	24	11	25/ ___	60
Максимум	40	20	40/ ___	100

При цьому, кількість балів:

- **1-59** відповідає оцінці «не зараховано» з можливістю повторного складання;
- **60- 100** відповідає оцінці «зараховано».

Шкала відповідності

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	Зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«АЛГОРИТМІЧНІ ТА КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ В ТОПОЛОГІЇ»

Змістовий модуль 1. Алгоритмічні методи в маловимірній топології.

ТЕМА 1. Алгоритмічні методи в теорії поверхонь (34 год.)

Склеювання сторін многокутників. Техніка розрізання-склеювання. Класифікація поверхонь. Орієнтованість та рід. Алгоритми розпізнавання поверхні, зв'язності та орієнтованості поверхні. Ейлерова характеристика. Група гомеотопій поверхні. Скручування Дена. Група кіс. Вкладення графів в поверхню. Двоїстий граф.

ТЕМА 2. Теорія Морса та тривимірні многовиди (24 год.)

Підмноговиди та їх ізотопії. Трансверсальний перетин та зведення до загального положення. Функції Морса та їх властивості. Розклад многовида на ручки. Операції з ручками.

Склеювання сторін многогранників. Алгоритм розпізнавання тривимірного многовида. Розбиття та діаграми Хегора. Перерахування тривимірних многовидів. Діаграми Кірбі.

Змістовий модуль 2. Топологія функцій та векторних полів на поверхнях

ТЕМА 3. Топологічні властивості функцій на поверхнях (24 год.)

Топологічна еквівалентність функцій. Граф Ріба. Атоми та молекули функцій Морса на поверхнях. Алгоритм розпізнавання еквівалентних функцій Морса. Функції з ізольованими критичними точками. M-функції.

ТЕМА 4. Топологічні властивості векторних полів на поверхнях (26 год.)

Векторні поля та потоки на замкнених поверхнях. Топологічна (траєкторна) еквівалентність векторних полів. Структурна стійкість полів. Гіперболічні особливі точки. Інваріантні многовиди. Поля Морса-Смейла. Їх повний топологічний інваріант. Перерахування полів з заданим набором особливостей.

**СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ, ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

теми	Назва теми II семестр	Кількість годин				
		лекції	практичні заняття	Самост. робота	Контр. модульна робота	Інші форми контролю
Змістовий модуль 1 Алгоритмічні методи в маловимірній топології.						
	Самостійна робота у період з 23 січня по 28 лютого: Топологічна класифікація поверхонь.			10		
1	Алгоритмічні методи в теорії поверхонь	10		10		
2	Теорія Морса та тривимірні многовиди	10		10	2	
Змістовий модуль 2 Топологія функцій та векторних полів на поверхнях						
3	Топологічні властивості функцій на поверхнях.	10		10		
4	Топологічні властивості векторних полів на поверхнях	8		10	2	
Всього годин за II семестр		38		50		

Змістовий модуль 1. Алгоритмічні методи в маловимірній топології.

Самостійна робота у період з 23 січня по 28 лютого. Топологічна класифікація поверхонь. (10 год. самостійної роботи)

Самостійне завдання 1. Опрацювати с.63-65 [2]. Розв'язати задачі 9.1, 9.2 [3].

Самостійне завдання 2. Опрацювати с.65-67 [2]. Розв'язати задачі 9.3, 9.4 [3].

Самостійне завдання 3. Опрацювати с.257-261 [4]. Розв'язати задачі 9.5, 9.6 [3].

Самостійне завдання 4. Опрацювати с.36-38 [1]. Розв'язати задачі 9.7, 9.8 [3].

Самостійне завдання 5. Опрацювати с.38-43 [1]. Розв'язати задачі 9.9 - 9.11 [3].

Тема 1. Алгоритмічні методи в теорії поверхонь (10 год. лекцій)

Лекція 1 Симплиціальні комплекси. Алгоритм розпізнавання поверхні – 2 год.

Лекція 2. Топологічні властивості поверхні. Алгоритми розпізнавання зв'язності та орієнтованості поверхні. – 2 год.

Лекція 3. Фундаментальна група поверхні. Групи гомологій та ейлерова характеристика поверхні. – 2 год.

Лекція 4. Група гомеотопій поверхні. Скручування Дена. Група кіс. – 2 год.

Лекція 5. Вкладення графів в поверхню. Двоїстий граф. – 2 год.

Самостійна робота 10 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань)

Контрольні питання і завдання:

1. Наведіть приклади симплеційних комплексів, відповідні поліедри яких є поверхнями, а також ті, для яких поліедри не поверхні.
2. Алгоритми розпізнавання зв'язності та орієнтованості поверхні.
3. Фундаментальна група поверхні.
4. Групи гомологій поверхні.
5. Чому дорівнює ейлерова характеристика орієнтованої (неорієнтованої) поверхні роду g ?
6. Описати процес скручування Дена.
7. Які твірні та співвідношення у групі кіс?
8. Як знаходити групу гомеотопій поверхні?
9. Які графи можна вкласти у двовимірну сферу?
10. Як будується двоїстий граф?

11. Навести приклад графа, для якого існують не ізоморфні вкладення у сферу.

Тема 2. Теорія Морса та тривимірні многовиди (10 год. лекцій)

Лекція 6. Підмноговиди та їх ізотопії. Трансверсальність – 2 год.

Лекція 7. Функції Морса. – 2 год.

Лекція 8. Розклад многовида на ручки. – 2 год.

Лекція 9. Розбиття та діаграми Хегора. – 2 год.

Лекція 10. Діаграми Кірбі. – 2 год.

Самостійна робота 10 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань)

Контрольні питання і завдання:

1. Запишіть умови трансверсальності одновимірних многовидів на поверхні.
2. Наведіть приклади трансверсальних та нетрансверсальних перетинів 1-та 2-підмноговидів у тривимірному просторі.
3. Як відбувається процес зведення до загального положення?
4. Наведіть приклади відображень з вироджених та не виродженими критичними точками.
5. Лема Морса.
6. Навести розклади на ручки замкнених двовимірних многовидів.
7. Довести існування розбиття Хегора.
8. Які перетворення з діаграмами Хегора не змінюють многовида?
9. Які типи можуть мати діаграми Хегора роду 2?
10. Як побудувати діаграму Кірбі тривимірного многовида?

Типове завдання модульної контрольної роботи № 1.

1. Представити орієнтовану поверхню роду 3 F_3 вигляді 12-кутника зі склеєними сторонами.
2. Побудувати розклад на ручки F_3 .
3. Знайти фундаментальну групу та групи гомологій F_3 .
4. Знайти всі графи Ріба простих функцій Морса з 6 критичними точками на F_2 .
5. Навести приклад діаграми Хегора роду 3 тривимірної сфери.

Змістовий модуль 2. Топологія функцій та векторних полів на поверхнях

Тема 3. Топологічні властивості функцій на поверхнях. (10 год. лекцій)

Лекція 11. Топологічна еквівалентність функцій. Граф Ріба. – 2 год.

Лекція 12. Атоми та молекули функцій Морса на поверхнях. – 2 год.

Лекція 13. Алгоритм розпізнавання еквівалентних функцій Морса. – 2 год.

Лекція 14. Функції з ізольованими критичними точками. – 2 год.

Лекція 15. М-функції. – 2 год.

Самостійна робота 10 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань)

Контрольні питання і завдання:

1. На яких замкнених поверхнях існують функції з двома критичними точками?
2. Чи може граф Ріба функції Морса на торі мати три вершини?
3. Які властивості має граф Ріба простої функції Морса на замкненій поверхні?
4. Описати алгоритм розпізнавання еквівалентних функцій Морса на замкненій поверхні.
5. Яке мінімальне число критичних точок функції на замкненій поверхні роду g ?
6. Описати алгоритм перебору топологічних типів функцій з трьома критичними точками на орієнтованій поверхні роду g .
7. Властивості графа Ріба m -функції.

Тема 4. Топологічні властивості векторних полів на поверхнях (8 год. лекцій)

Лекція 16. Векторні поля та потоки на замкнених поверхнях. Топологічна (траєкторна) еквівалентність векторних полів – 2 год.

Лекція 17. Структурна стійкість полів. – 2 год.

Лекція 18. Гіперболічні особливі точки. Інваріантні многовиди. Поля Морса-Смейла. – 2 год.

Лекція 19. Повний топологічний інваріант поля Морса-Смейла. – 2 год.

Консультація. Векторні поля на поверхні з межею. – 2 год.

Самостійна робота 10 год. (опрацювання лекційного матеріалу і виконання домашніх завдань)

Контрольні питання і завдання:

1. Означенні динамічної системи.
2. Як векторне поле задає потік на замкненій поверхні?
3. Які властивості векторних полів зберігаються при топологічній еквівалентності.
4. Наведіть приклади структурно стійких та структурно нестійких потоків.
5. Означення та приклади гіперболічних особливих точок.
6. Які стійкі та нестійкі многовиди у гіперболічних точок?
7. Чи задає ірраціональна обмотка тора потік Морса-Смейла?
8. Які властивості мають поля Морса-Смейла?
9. Алгоритм перевірки топологічної еквівалентності полів Морса-Смейла на сфері.
10. Описати клас структурно стійких потоків на поверхні з межею.

Типове завдання модульної контрольної роботи № 2.

1. Побудувати граф Ріба функції h_x проєкції на вісь абсцис стандартно вкладеного в тривимірний простір тору.
2. Для функції з h_x побудувати градієнтноподібне векторне поле Морса-Смейла та знайти його повний топологічний інваріант.
3. Описати всі атоми функцій Морса з 2 критичними точками.
4. Скільки топологічно нееквівалентних полярних полів Морса-Смейла існує на пляшці Клейна?

Перелік питань до заліку

1. Склеювання сторін многокутників. Техніка розрізання-склеювання.
2. Класифікація поверхонь. Орієнтованість та рід.
3. Алгоритми розпізнавання поверхні, зв'язності та орієнтованості поверхні.
4. Ейлерова характеристика.
5. Група гомеотопій поверхні.
6. Скручування Дена.
7. Група кіс.
8. Вкладення графів в поверхню. Двоїстий граф.
9. Підмноговиди та їх ізотопії.
10. Трансверсальний перетин та зведення до загального положення.
11. Функції Морса та їх властивості.
12. Розклад многовида на ручки. Операції з ручками.
13. Склеювання сторін многогранників. Алгоритм розпізнавання тривимірного многовида.
14. Розбиття та діаграми Хегора. Перерахування тривимірних многовидів.
15. Діаграми Кірбі.

16. Топологічна еквівалентність функцій.
17. Граф Ріба.
18. Атоми та молекули функцій Морса на поверхнях.
19. Алгоритм розпізнавання еквівалентних функцій Морса.
20. Функції з ізольованими критичними точками.
21. М-функції.
22. Векторні поля та потоки на замкнених поверхнях.
23. Топологічна (траєкторна) еквівалентність векторних полів.
24. Структурна стійкість полів.
25. Гіперболічні особливі точки. Інваріантні многовиди.
26. Поля Морса-Смейла. Їх повний топологічний інваріант.
27. Перерахування полів з заданим набором особливостей.

Типове завдання для заліку

1. Довести, що функція $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ є функцією Морса на одиничній сфері $x^2+y^2+z^2=1$.
2. Знайти її критичні точки та їх індекси.
3. Побудувати за нею поле градієнта в стандартній метриці.
4. Знайти відповідний розклад на ручки.
5. Який буде граф Ріба цієї функції та які у неї атоми?
6. Знайти повний топологічний інваріант побудованого поля градієнта.

Рекомендована література

Базова

1. С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. Наука. 1998.
2. О.О. Пришляк. Топологія многовидів. К. 2013.
http://mechmat.univ.kiev.ua/dload/pos/topolog_pryshljak.pdf
3. В.В. Прасолов. Наглядная топология. МЦНМО, 1995.

Додаткова

4. О.А. Борисенко. Дифференціальна геометрія та топологія. Основа, 1995.
5. А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Интегрируемые гамильтоновы системы. Том 1. 1999.
6. В. В. Прасолов. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. МЦНМО, 2004.