Завдання для самостійної роботи з елементами дистанційного навчання з обов'язкової дисципліни «Динамічні системи» на період з 24 січня до 28 лютого 2018 р.

для студентів

1 курсу другого (магістерського) рівня
освітня програма «Математика»
викладач-лектор: д.ф.-м.н., проф. Парасюк Ігор Остапович (електронна пошта: pio@univ.kiev.ua)

Види та форми контрольних заходів з перевірки самостійної роботи студентів, критерії оцінювання

Контроль за виконанням самостійної роботи студентами здійснюється у двох формах: у січні-лютому за допомогою електронних засобів (електронною поштою), у березні – шляхом проведення аудиторної письмової роботи. Контроль у січні-лютому 2018 р. відбувається у такий спосіб. У відповідні терміни (перший стовпчик таблиці нижче) студенти мають опрацювати теоретичний матеріал за вказаною темою (третій стовпчик таблиці нижче). Для підтвердження виконання завдання студенти мають надіслати у вказані терміни (другий стовпчик таблиці нижче) відповіді на тестові запитання та задачі відповідного завдання (четвертий стовпчик таблиці нижче) лектору – І. О. Парасюку.

Завдання, оформлені рукописним способом, скануються (фотографуються) і надсилаються у форматах pdf, jpg, png, djvu. Завдання, оформлені за допомогою текстових та формульних редакторів, надсилаються у форматах pdf, doc, docx. Ім'я файла має включати прізвище та ініціали студента, номер завдання. Використовуйте латиницю. Оформлення одного завдання може включати кілька файлів, наприклад, petrenko-i-i-zavd-1.pdf, petrenko-i-i-zavd-2.pdf, ... В цьому випадку зазначені файли надсилаються одним архівом.

Період етапу	Період контрольних заходів еапу	Завдання для вивчення	Номер завдання для контрольного заходу; кому з викладачів надсилається
24.01 – 02.02.18 (1-е завдання)	02.02 – 03.02.18	Опрацювати теоретичний матеріал [1; Вступ], [2; п.п. 1.2, 1.4]	Завдання № 1 надсилається Парасюку І.О.
05.02 – 14.02.18 (2-е завдання)	15.02 – 16.02.18	Опрацювати теоретичний матеріал [2, п.п. 1.5] та [1; §1.1], [3; гл.2, I – III]	Завдання № 2 надсилається Парасюку І.О.
17.02 – 27.02 (3-є завдання)	27.02 – 28.02.18	Опрацювати теоретичний матеріал [2; п. 1.7], [3; п. 1.23 – 1.25]	Завдання № 3 надсилається Парасюку І.О.

Завдання № 1. Тема: Елементарна динаміка дифеоморфізмів. Дифеоморфізми та гомеоморфізми кола.

1. Наведіть означення дифеоморфізму.

2. Що таке нерухома точка, періодична точка. Як визначається період періодичної точки дифеоморфізму?

3. Яка нерухома точка називається стійкою, асимптотично стійкою?

4. Як визначається ліфт гомеоморфізму кола?

5. Як за допомогою ліфта визначити періодичну точку гомеоморфізму кола.

6. Наведіть означення інваріантної множини, мінімальної множини, множини неблукаючих точок, множини ω- та α-граничних точок дифеоморфізму.

7. Поясніть, чому множини граничних точок належать множині неблукаючих точок?

8. Покажіть, що множина точок $\{k\alpha|\bmod 1\}_{k\in\mathbb{Z}}$, де α — ірраціональне число, усюди щільна на інтервалі [0,1] (Повторіть матеріал минулого семестру, який стосувався траекторій на торі).

9. Визначимо коло, як фактор-многовид $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. За допомогою яких з наведених нижче відображень $g(\cdot) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ можна побудувати ліфт (підняття) $\hat{f}(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ гомеоморфізму кола $f(\cdot) : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$, який зберігає орієнтацію: а) $g(x) = x^2$; б) $g(x) = x^2 - 2x$; в) $g(x) = 2x^2 - x$. Опишіть ліфт в кожному з випадків.

10. Визначивши коло як $\mathbb{S}^1 := \left\{e^{2\pi i x} : x \in [0,1]\right\}$, розглянемо гомеоморфізм

$$f(\cdot) : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1 : e^{2\pi i x} \mapsto e^{-2\pi i x}.$$

Дослідіть його на предмет існування нерухомих точок, побудувавши ліфт $\hat{f}(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ за допомогою накриття $\pi(\cdot) : x \mapsto e^{2\pi i x}$ і подальшого визначення точок перетину графіка $\hat{f}(\cdot)$ з прямими $y = x + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Виконати те саме для $\hat{f}^{2\circ}(\cdot) := \hat{f} \circ \hat{f}(\cdot)$.

11. Знайти 2-періодичні точки дифеоморфізму кола з ліфтом $x \mapsto \hat{f}(x) := x + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sin 2\pi x$. Дослідіть характер стійкості 2-періодичних орбіт. Доведіть, що в даному випадку немає ані нерухомих точок, ані 3-періодичних орбіт.

12. Нехай гомеоморфізм $f(\cdot) : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$ інвертує орієнтацію (змінює на протилежну). Покажіть, що будь-який ліфт $\hat{f}(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ є строго спадним, задовольняє $\hat{f}(x+1) = \hat{f}(x) - 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, а сам гомеоморфізм обов'язково має дві нерухомі точки. Що можна сказати про збереження орієнтації гомеоморфізмом $f^{2\circ}(\cdot)$?

13. Опишіть мінімальну множину для відображення повороту $R(\cdot) : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1 : e^{2\pi i x} \mapsto e^{2\pi i (x+\alpha)}$ у випадку, коли: а) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; б) $\alpha \in \mathbb{Q}$.

14. Нехай M — многовид, $f(\cdot) : M \mapsto M$ — дифеоморфізм. Доведіть, що множина неблукаючих точок $\Omega(f)$ замкнена й інваріантна. Які з множин $\mathrm{Fix}(f)$, $\mathrm{Per}(f)$, $\alpha(x)$, $\omega(x)$ належать $\Omega(f)$?

15. Опишіть орбіти ДС, породженої дифеоморфізмом $f(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto ax$, для випадків: а) $a < -1$; б) $a = -1$; в) $a \in (-1, 0)$; г) $a \in (0, 1)$; д) $a = 1$ 4; е) $a > 1$. Опишіть граничні множини орбіт у кожному з цих випадків.

16. Намалюйте схематично фазові портрети ДС з неперервним часом (потоків) на площині, які мають граничні множини, що містять: а) одну; б) дві; в) три; г) чотири точки спокою.

Завдання № 2. Тема: Спряженість, еквівалентність потоків та дифеоморфізмів.

1. Які два дифеоморфізми називаються топологічно спряженими?

2. Покажіть, що: а) дифеоморфізми $x \mapsto f(x) := 2x$ та $x \mapsto g(x) := 8x$ гомеоморфні (тобто топологічно спряжені), але не дифеоморфні; б) $x \mapsto f(x) := 2x$ та $x \mapsto g(x) := -2x$ негомеоморфні, показавши, що топологічне спряження зберігає орієнтацію;
в) $x \mapsto f(x) := 2x$ та $x \mapsto g(x) := \frac{1}{2}x$ негомеоморфні.

3. Доведіть, що відображення $\varphi(\cdot) : x \to x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, визначає топологічне спряження для дифеоморфізмів $x \mapsto f(x) := 2x$ та $x \mapsto g(x) := 2^{2n+1}x$ на $\mathbb{R}$. Чому ці два дифеоморфізми не дифеоморфні.

4. Нехай $f(\cdot), g(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ — дифеоморфізми, спряжені за допомогою дифеоморфізму $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ класу C^k, де $k \geq 1$, причому $f(0) = 0$. Порівняйте власні числа похідних $f'(0)$ та $g'(h(0))$.

5. Визначте число 2-періодичних точок дифеоморфізмів кола $f(\cdot)$ і $g(\cdot)$, якщо відповідні ліфти визначаються так:

$$\hat{f}(x) = x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{10}, \quad \hat{f}(x) = x + \frac{3x}{10} + \frac{\sin 2\pi x}{10}.$$

Чи будуть ці дифеоморфізми топологічно спряженими?

6. Доведіть, що потоки лінійних систем $\dot{x} = Ax$, $\dot{x} = Bx$ в $\mathbb{R}^n$ лінійно спряжені $\Leftrightarrow$ матриці A і B — подібні.

7. Наведіть означення числа обертання для гомеоморфізму кола.

8. Яким, раціональним чи ірраціональним є число обертання дифеоморфізму кола, що має періодичні точки?

9. Дослідивши періодичні точки, обчислити числа обертання гомеоморфізму кола, якщо ліфт $\hat{f}(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ визначається у такий спосіб: а) $\hat{f}(x) = x + \frac{2}{3}$; б) $\hat{f}(x) = x^3 + \frac{3}{4}$, $x \in [0, 1)$, $\hat{f}(x+1) = \hat{f}(x) + 1$; в) $\hat{f}(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x$.

Завдання № 3. Тема: Відображення Пуанкаре. Конструкція надбудови (підвіски).

1. В чому полягає відмінність топологічної спряженості і орбітальної топологічної еквівалентності двох потоків.[1]

2. Показати, що потоки лінійної системи вигляду $\dot{x} = J(a)x$, $J(\mathrm{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, де $a > 0$, і будь якої системи в $\mathbb{R}^2$ $\dot{x} = Bx$, де матриця B має пару суто уявних власних чисел $\pm ib$, орбітально топологічно еквівалентні. Чи будуть ці потоки топологічно спряженими?

3. Чому топологічні типи фазових портретів лінійних систем типу «сідло» і «вузол» різні?

4. Нехай (x, y) — координати в $\mathbb{R}^2$, і $\pi(\cdot) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ накриття тора:
$\pi(x, y) = (x| \bmod 1, y| \bmod 1)$. Розглянемо на торі систему, індуковану за допомогою $\pi(\cdot)$ з системи $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = \alpha$. Покажіть що фазові портрети систем з α ірраціональним і α раціональним не є орбітально топологічно еквівалентними.

5. Нехай $\{f_i^t(\cdot) : M \mapsto M\}$, $i \in \{1, 2\}$ — топологічно спряжені потоки на многовиді M, а Нехай $\{g_i^t(\cdot) : N \mapsto N\}$, $i \in \{1, 2\}$ — топологічно спряжені потоки на многовиді N. Доведіть, що добуток-потоки $\{f_i^t \times g_i^t(\cdot, \cdot) : M \times N \mapsto M \times N\}$, $i \in \{1, 2\}$ теж топологічно спряжені. Наведіть приклад для випадку $M = N = \mathbb{S}^1$, коли зазначений висновок не можна розповсюдити на ситуацію з орбітально топологічними потоками.

6. Наведіть означення глобального перерізу для потоку. Поясніть конструкцію відображення Пуанкаре.

[1] В [3] орбітальна топологічна еквівалентніть потоків називається топологічною еквівалентністю. Ряд авторів під топологічною еквівалентністю потоків розуміють їх топологічну спряженість.

7. Покажіть, що на циліндрі $[0,1]\times\mathbb{S}^1$ з координатами $(r,\theta|\bmod 1)$ система $\dot r = r - r^3$, $\dot\theta = 1$ визначає потік, який, в свою чергу, генерує відображення Пуанкаре. Побудуйте це відображення.

8. Поясніть конструкцію підвіски (надбудови) для дифеоморфізму.

9. Побудуйте підвіску (надбудову) для дифеоморфізму $f(\cdot):[0,1]\mapsto[0,1]$:
$x\mapsto f(x) := \frac{1}{2}(x+x^2)$. Опишіть поверхню, на якій при цьому виникає відповідний потік і сам потік.

10. Накресліть діаграми, що ілюструють підвішений потік для дифеоморфізмів:
а) [-1,1]$\ni x\mapsto -\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^3$; б) $\mathbb{S}^1\ni \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x}\mapsto \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x}$.

11. Покажіть, що потік $(x|\bmod 1, y)\mapsto((x+t)|\bmod 1, y+at)$ на циліндрі $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times\mathbb{R}$ є підвіскою для дифеоморфізму $\mathbb{R}\ni y\mapsto y+\alpha$.

Список основної рекомендованої літератури
для виконання самостійної роботи:

[1] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975.

[2] Arrowsmith D.K, Place C.M. An Introduction to Dynamical Systems. – Gambridge University Press. – 2001.

[3] Irwin M.C. Smooth dynamical systems. — Singapore – New Jersey – London – Hong Kong: World Scientific, 2001.

Повний список рекомендованої літератури можна знайти у робочій програмі з курсу «Динамічні системи», яка розміщена на сайті механіко-математичного факультету.

Викладачі оцінюють виконані завдання в категоріях «зараховано» або «не зараховано». Щоб отримати оцінку «зараховано» потрібно правильно відповісти на половину і більше тестових питань та задач кожного із 3-х завдань. Якщо студент отримає оцінку «не зараховано», у нього є три дні після отримання результату оцінювання від викладача на те, що переробити завдання та надіслати їх викладачу повторно. Студент, який за результатом роботи у січні-лютому отримує «зараховано» за теоретичну та практичну складову, допускається до написання аудиторної письмової роботи (АПР) у першій половині березня 2018 р. У випадку, коли за результатом роботи у січні-лютому він отримує «незараховано» або завдання здані невчасно без поважних причин, студент втрачає можливість написання АПР та отримання відповідних балів. На АПР за підсумками самостійної роботи виносяться окремі задачі завдань з усіх зазначених вище тем. Робота оцінюється максимум у 5 балів. Контрольна робота проводиться в першій половині березня.

Додаток 1.

Перше завдання самостійної роботи студента освітньої програми «Математика» 1 курсу, другого (магістерського) рівня групи № ____, Прізвище, ім'я. з обов'язкової дисципліни «Динамічні системи»

Дате письмові відповіді:

1. Наведіть означення дифеоморфізму.

2. Що таке нерухома точка, періодична точка. Як визначається період періодичної точки дифеоморфізму?

3. Яка нерухома точка називається стійкою, асимптотично стійкою?

4. Як визначається ліфт гомеоморфізму кола?

5. Як за допомогою ліфта визначити періодичну точку гомеоморфізму кола.

6. Наведіть означення інваріантної множини, мінімальної множини, множини неблукаючих точок, множини ω- та α-граничних точок дифеоморфізму.

7. Поясніть, чому множини граничних точок належать множині неблукаючих точок?

8. Покажіть, що множина точок $\{k\alpha|\bmod 1\}_{k\in\mathbb{Z}}$, де α — ірраціональне число, усюди щільна на інтервалі [0,1] (Повторіть матеріал минулого семестру, який стосувався траєкторій на торі).

9. Визначимо коло, як фактор-многовид $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. За допомогою яких з наведених нижче відображень $g(\cdot) : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ можна побудувати ліфт (підняття) $\hat{f}(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ гомеоморфізму кола $f(\cdot) : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$, який зберігає орієнтацію: а) $g(x) = x^2$; б) $g(x) = x^2 - 2x$; в) $g(x) = 2x^2 - x$. Опишіть ліфт в кожному з випадків.

10. Визначивши коло як $\mathbb{S}^1 := \left\{e^{2\pi i x} : x \in [0,1]\right\}$, розглянемо гомеоморфізм

$$f(\cdot) : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1 : e^{2\pi i x} \mapsto e^{-2\pi i x}.$$

Дослідіть його на предмет існування нерухомих точок, побудувавши ліфт $\hat{f}(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ за допомогою накриття $\pi(\cdot) : x \mapsto e^{2\pi i x}$ і подальшого визначення точок перетину графіка $\hat{f}(\cdot)$ з прямими $y = x + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Виконати те саме для $\hat{f}^{2\circ}(\cdot) := \hat{f} \circ \hat{f}(\cdot)$.

11. Знайти 2-періодичні точки дифеоморфізму кола з ліфтом $x \mapsto \hat{f}(x) := x + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sin 2\pi x$. Дослідіть характер стійкості 2-періодичних орбіт. Доведіть, що в даному випадку немає ані нерухомих точок, ані 3-періодичних орбіт.

12. Нехай гомеоморфізм $f(\cdot) : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$ інвертує орієнтацію (змінює на протилежну). Покажіть, що будь-який ліфт $\hat{f}(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ є строго спадним, задовольняє $\hat{f}(x+1) = \hat{f}(x) - 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, а сам гомеоморфізм обов'язково має дві нерухомі точки. Що можна сказати про збереження орієнтації гомеоморфізмом $f^{2\circ}(\cdot)$?

13. Опишіть мінімальну множину для відображення повороту $R(\cdot) : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1 : e^{2\pi i x} \mapsto e^{2\pi i(x+\alpha)}$ у випадку, коли: а) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; б) $\alpha \in \mathbb{Q}$.

14. Нехай M — многовид, $f(\cdot) : M \mapsto M$ — дифеоморфізм. Доведіть, що множина неблукаючих точок $\Omega(f)$ замкнена й інваріантна. Які з множин $\mathrm{Fix}(f)$, $\mathrm{Per}(f)$, $\alpha(x)$, $\omega(x)$ належать $\Omega(f)$?

15. Опишіть орбіти ДС, породженої дифеоморфізмом $f(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto ax$, для випадків: а) $a < -1$; б) $a = -1$; в) $a \in (-1,0)$; г) $a \in (0,1)$; д) $a = 1$ 4; е) $a > 1$. Опишіть граничні множини орбіт у кожному з цих випадків.

16. Намалюйте схематично фазові портрети ДС з неперервним часом (потоків) на площині, які мають граничні множини, що містять: а) одну; б) дві; в) три; г) чотири точки спокою.

Виконане завдання необхідно надіслати на електронну пошту: pio@univ.kiev.ua не пізніше 03.02.2017

Список основної рекомендованої літератури для виконання самостійної роботи:

[1] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975.

[2] Arrowsmith D.K, Place C.M. An Introduction to Dynamical Systems. – Gambridge University Press. – 2001.

[3] Irwin M.C. Smooth dynamical systems. — Singapore – New Jersey – London – Hong Kong: World Scientific, 2001.

Друге завдання самостійної роботи студента освітньої програми «Математика» 1 курсу, другого (магістерського) рівня групи № ____, Прізвище, ім'я. з обов'язкової дисципліни «Динамічні системи»

Дате письмові відповіді:

1. Які два дифеоморфізми називаються топологічно спряженими?

2. Покажіть, що: а) дифеоморфізми $x \mapsto f(x) := 2x$ та $x \mapsto g(x) := 8x$ гомеоморфні (тобто топологічно спряжені), але не дифеоморфні; б) $x \mapsto f(x) := 2x$ та $x \mapsto g(x) := -2x$ негомеоморфні, показавши, що топологічне спряження зберігає орієнтацію;
в) $x \mapsto f(x) := 2x$ та $x \mapsto g(x) := \frac{1}{2}x$ негомеоморфні.

3. Доведіть, що відображення $\varphi(\cdot) : x \to x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, визначає топологічне спряження для дифеоморфізмів $x \mapsto f(x) := 2x$ та $x \mapsto g(x) := 2^{2n+1}x$ на $\mathbb{R}$. Чому ці два дифеоморфізми не дифеоморфні.

4. Нехай $f(\cdot), g(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ — дифеоморфізми, спряжені за допомогою дифеоморфізму $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ класу C^k, де $k \geq 1$, причому $f(0) = 0$. Порівняйте власні числа похідних $f'(0)$ та $g'(h(0))$.

5. Визначте число 2-періодичних точок дифеоморфізмів кола $f(\cdot)$ і $g(\cdot)$, якщо відповідні ліфти визначаються так:

$$\hat{f}(x) = x + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{10}, \quad \hat{f}(x) = x + \frac{3x}{10} + \frac{\sin 2\pi x}{10}.$$

Чи будуть ці дифеоморфізми топологічно спряженими?

6. Доведіть, що потоки лінійних систем $\dot{x} = Ax$, $\dot{x} = Bx$ в $\mathbb{R}^n$ лінійно спряжені $\Leftrightarrow$ матриці A і B — подібні.

7. Наведіть означення числа обертання для гомеоморфізму кола.

8. Яким, раціональним чи ірраціональним є число обертання дифеоморфізму кола, що має періодичні точки?

9. Дослідивши періодичні точки, обчислити числа обертання гомеоморфізму кола, якщо ліфт $\hat{f}(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ визначається у такий спосіб: а) $\hat{f}(x) = x + \frac{2}{3}$; б) $\hat{f}(x) = x^3 + \frac{3}{4}$, $x \in [0, 1)$, $\hat{f}(x+1) = \hat{f}(x) + 1$; в) $\hat{f}(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x$.

Виконане завдання необхідно надіслати на електронну пошту: pio@univ.kiev.ua не пізніше 16.02.2017

Список основної рекомендованої літератури для виконання самостійної роботи:

[1] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975.

[2] Arrowsmith D.K, Place C.M. An Introduction to Dynamical Systems. – Gambridge University Press. – 2001.

[3] Irwin M.C. Smooth dynamical systems. — Singapore – New Jersey – London – Hong Kong: World Scientific, 2001.

Третє завдання самостійної роботи студента освітньої програми «Математика» 1 курсу, другого (магістерського) рівня групи № _____, Прізвище, ім'я. з обов'язкової дисципліни «Динамічні системи»

Дате письмові відповіді:

1. В чому полягає відмінність топологічної спряженості і орбітальної топологічної еквівалентності двох потоків.[2]

2. Показати, що потоки лінійної системи вигляду $\dot{x} = J(a)x$, $J(\mathrm{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, де $a > 0$, і будь якої системи в $\mathbb{R}^2$ $\dot{x} = Bx$, де матриця B має пару суто уявних власних чисел $\pm ib$, орбітально топологічно еквівалентні. Чи будуть ці потоки топологічно спряженими?

3. Чому топологічні типи фазових портретів лінійних систем типу «сідло» і «вузол» різні?

4. Нехай (x, y) — координати в $\mathbb{R}^2$, і $\pi(\cdot) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ накриття тора:
$\pi(x, y) = (x| \bmod 1, y| \bmod 1)$. Розглянемо на торі систему, індуковану за допомогою $\pi(\cdot)$ з системи $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = \alpha$. Покажіть що фазові портрети систем з α ірраціональним і α раціональним не є орбітально топологічно еквівалентними.

5. Нехай $\{f_i^t(\cdot) : M \mapsto M\}$, $i \in \{1, 2\}$ — топологічно спряжені потоки на многовиді M, а Нехай $\{g_i^t(\cdot) : N \mapsto N\}$, $i \in \{1, 2\}$ — топологічно спряжені потоки на многовиді N. Доведіть, що добуток-потоки $\{f_i^t \times g_i^t(\cdot, \cdot) : M \times N \mapsto M \times N\}$, $i \in \{1, 2\}$ теж топологічно спряжені. Наведіть приклад для випадку $M = N = \mathbb{S}^1$, коли зазначений висновок не можна розповсюдити на ситуацію з орбітально топологічними потоками.

6. Наведіть означення глобального перерізу для потоку. Поясніть конструкцію відображення Пуанкаре.

7. Покажіть, що на циліндрі $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$ з координатами $(r, \theta| \bmod 1)$ система $\dot{r} = r - r^3$, $\dot{\theta} = 1$ визначає потік, який, в свою чергу, генерує відображення Пуанкаре. Побудуйте це відображення.

8. Поясніть конструкцію підвіски (надбудови) для дифеоморфізму.

9. Побудуйте підвіску (надбудову) для дифеоморфізму $f(\cdot) : [0, 1] \mapsto [0, 1]$:
$x \mapsto f(x) := \frac{1}{2}(x + x^2)$. Опишіть поверхню, на якій при цьому виникає відповідний потік і сам потік.

10. Накресліть діаграми, що ілюструють підвішений потік для дифеоморфізмів:
а) [-1,1]$\ni x \mapsto -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^3$; б) $\mathbb{S}^1 \ni \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x} \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}x}$.

11. Покажіть, що потік $(x| \bmod 1, y) \mapsto ((x + t)| \bmod 1, y + at)$ на циліндрі $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ є підвіскою для дифеоморфізму $\mathbb{R} \ni y \mapsto y + \alpha$.

Виконане завдання необхідно надіслати на електронну пошту: pio@univ.kiev.ua не пізніше 28.02.2017

Список основної рекомендованої літератури для виконання самостійної роботи:

[1] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. – М.: Мир, 1975.

[2] В [3] орбітальна топологічна еквівалентніть потоків називається топологічною еквівалентністю. Ряд авторів під топологічною еквівалентністю потоків розуміють їх топологічну спряженість.

[2] Arrowsmith D.K, Place C.M. An Introduction to Dynamical Systems. – Gambridge University Press. – 2001.

[3] Irwin M.C. Smooth dynamical systems. — Singapore – New Jersey – London – Hong Kong: World Scientific, 2001.