

Завдання для самостійної роботи з елементами дистанційного навчання  
з обов'язкової дисципліни "Дискретна математика"  
на період з 24 січня до 28 лютого 2018 року  
для студентів 1 курсу бакалаврату механіко-математичного факультету,  
що навчаються за освітніми програмами

«Комп'ютерна математика», «Математика», «Математика (середня освіта)»,  
викладач-лектор: д.ф.-м.н., доц. Олійник Андрій Степанович (електронна пошта:  
aolijnyk@gmail.com) викладачі, що проводимуть практичні заняття: д.ф.-м.н., доц.  
Олійник Андрій Степанович (електронна пошта: aolijnyk@gmail.com), д.ф.-м.н., доц.  
Лавренюк Ярослав Васильович (електронна пошта: ylavrenyuk@gmail.com) к.ф.-м.н.,  
доц. Ямненко Ростислав Євгенійович (електронна пошта: yamnenko@univ.kiev.ua)

Розв'яжіть подані нижче задачі. Розв'язки надсилайте на кожну з вказаних вище електронних адрес за таким графіком: задачі 1-19 до 31 січня, задачі 20-38 до 7 лютого, задачі 39-57 до 14 лютого, задачі 58-76 до 21 лютого, задачі 77-95 до 28 лютого. Щотижня кожен студент отримує оцінку «зараховано» або «не зараховано» за результатами перевірки надісланих розв'язків. Щоб отримати оцінку «зараховано» кожного тижня потрібно розв'язати не менше 10 задач. Якщо студент отримує оцінку «не зараховано», у нього є два дні після отримання результату оцінювання на те, щоб надіслати виправлені розв'язки. У випадку, коли за результатами роботи у січню-лютому студент отримує «зараховано» за всі 5 тижнів, він отримує можливість написати контрольну роботу, яка проводиться в першій половині березня і оцінюється максимум в 10 балів.

1. Серед двох спортивних товариств, в кожному з яких 100 фехтувальників, необхідно виділити по одному фехтувальнику для участі у змаганнях. Скількома способами можна зробити цей вибір?
2. З міста А в місто В є 5 шляхів, а з міста В в місто С – три. Скільки шляхів, що проходять через В, ведуть з А в С?
3. Є 5 видів конвертів без марок і 4 вида марок. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою для надсилання листа?
4. В групі з 16 дітей 7 народилися у Варшаві, 4 – в Берліні, 3 – в Києві і 2 – в Мінську. Скількома способами можна вибрати з них 4 дітей так, щоб в групі були діти з усіх 4 міст?
5. Скільки слів, що містять п'ять літер кожне, можна скласти з 33 літер, якщо допускаються повтори, але жодні дві сусідні літери не повинні співпадати, тобто такі слова, як "багаття" або "стаття" не допускаються?
6. Скількома способами можна вибрати голосну і приголосну у слові "будівля"? А у слові "гіпербола"?
7. Кидають гральний кубик з 6 гранями і запускають дзиґу, що має 8 граней. Скількома різними способами вони можуть впасти?
8. На вершину гори ведуть п'ять шляхів. Скількома способами турист може піднятися на гору і потім спуститися з неї? Розв'яжіть цю задачу за додаткової умови, що підйом і спуск відбувається різними шляхами.

9. На фермі є 20 овець і 24 свині (всі по-різному вгодовані). Скількома способами можна вибрати одну вівцю і одну свиню? Якщо такий вибір вже зроблений, то скількома способами можна зробити його ще раз?
10. На шахову дошку необхідно поставити короля і ферзя. Скількома способами можна це зробити, якщо короля потрібно поставити на біле поле, а ферзя – на чорне? А якщо на колір поля немає обмежень? А якщо обидві фігури треба поставити на білі поля?
11. Скількома способами можна вибрати на шаховій дошці біле і чорне поле, які не лежатимуть на одній вертикальній чи горизонтальній лінії?
12. З 12 слів чоловічого роду, 9 жіночого і 10 середнього необхідно вибрати по одному слову кожного роду. Скількома способами можна це зробити?
13. З 3 типів ручок, 7 типів олівців і 7 типів гумок необхідно вибрати ручку, олівець і гумку. Скількома способами це можна зробити?
14. В букіністичному магазині лежать 6 різних видавництв роману П.О. Куліша "Чорна рада" 3 видавництва повісті М.В. Гоголя "Ніч перед Різдвом" і 4 видавництва поеми І.П. Котляревського "Енеїда". Крім цього, є 5 різних збірників, в кожному з яких є "Чорна рада" і "Ніч перед Різдвом" і 7 збірників, в яких є "Ніч перед Різдвом" і "Енеїда". Скількома способами можна здійснити покупку, яка містила б по одному екземпляру кожного з цих творів?  
А якщо в магазині ще є 3 збірника, які містять твори "Чорна рада" і "Енеїда" і 5 збірників з усіма трьома творами?
15. В кошику знаходяться 12 яблук і 10 апельсинів. Іван бере з кошика яблуко або апельсин після чого Надія бере і яблуко, і апельсин. В якому випадку Надія матиме більшу свободу вибору: якщо Іван взяв яблуко чи якщо він взяв апельсин?
16. Є три дзиґи з 6, 8 і 10 гранями відповідно. Їх одночасно запустили. Скількома різними способами вони можуть впасти? Скільки серед них способів, за яких принаймні дві дзиґи впали на сторону, відмічену цифрою 1?
17. У англійців прийнято давати дитині декілька імен. Скількома способами в Англії можна назвати дитину, якщо загальна кількість імен дорівнює 300, а їй дають не більше трьох імен? Чи вистачить цих наборів для всіх англійців (57 млн. осіб), чи неодмінно знайдуться англійці з однаковими іменами?
18. Скільки є чисел від 0 до 999999, в яких поряд немає двох однакових цифр?
19. Яку найбільшу кількість різних куль можна побудувати в просторі так, щоб вони не дотикалися трьох даних площин і даної кулі?
20. Чи можна виписати дев'ять чисел  $1, 2, \dots, 9$  по колу так, щоб жодна сума сусідніх двох не ділилася ні на 3, ні на 5, ні на 7?
21. У змаганнях з хокею беруть участь п'ять команд: А, В, С, D, Е. В конкурсі знавців один учасник припустив, що вони займуть місця у порядку А, В, С, D, Е, а інший

передбачив порядок D, A, E, C, B. Після закінчення змагань виявилося, що перший не вгадав не тільки місце хоча б однієї з команд, але і будь-яку пару команд, що стоять одна за одною у порядку. Другий же вгадав місця двох команд і дві пари команд, що стоять одна за одною у порядку. В якому порядку розташувалися команди?

22. Квадрат розділений на 16 рівних квадратів. Скількома способами можна розфарбувати їх в білий, чорний, червоний і синій кольори так, щоб в кожному горизонтальному і вертикальному ряді були усі 4 кольори?
23. Скількома способами можна розкласти в дві кишені дев'ять монет різних номіналів?
24. Необхідно терміново доставити 6 пакетів різним адресатам. Скількома способами це можна зробити, якщо для передачі листів можна послати трьох кур'єрів, і кожен лист можна дати будь-якому кур'єру? (Кур'єр сам вирішує в якому порядку доставляти дані йому листи.)
25. Четверо студентів складають екзамен. Скількома способами їм можуть бути виставлені оцінки, якщо відомо, що всі студенти екзамен склали (отримавши оцінку 3, 4 або 5)?
26. З Лондона в Брайтон ведуть 2 шосе, що з'єднані 10 ґрунтовими дорогами (Рис. 1(а)). Скількома способами можна доїхати з Лондона в Брайтон так, щоб дорога не перетинала себе?

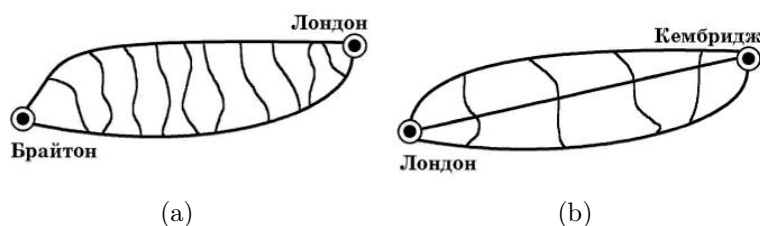


Рис. 1:

27. Нехай за тих самих умов два мандрівника виїжджають з Лондона різними шосе. Скількома способами може відбутися мандрівка так, щоб жодну ділянку шосе вони не їхали в одному і тому ж напрямку?
28. З Лондона в Кембридж ведуть 3 шосе, що перетинаються 4 ґрунтовими дорогами (Рис. 1(б)). Скількома способами можна здійснити мандрівку, якщо на жодній ділянці не їхати в напрямку Лондона і на жодній ділянці не їхати двічі?
29. Колись автомобільні номери склалися з однієї, двох або трьох літер і чотирьох цифр після них. Знайдіть число таких номерів, якщо використовувалися 32 літери.
30. В деякій державі не було двох жителів з однаковим набором зубів. Якою може бути найбільша чисельність населення цієї держави (в людини може бути не більше 32 зубів)?
31. Скільки чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр:

а) 8 і 9;

b) 7, 8, 9;

c) 0, 8, 9 (з цифри 0 число починатися не може)?

32. Троє юнаків і дві дівчини обирають собі місце роботи. В місті є три заводи, де потрібні робітники (туди беруть лише чоловіків), два магазини, куди беруть лише жінок, і дві фірми, де потрібні і чоловіки, і жінки. Скількома способами вони можуть розподілитися між цими підприємствами?
33. Є три курки, чотири качки і два гусака. Скількома способами можна вибрати з них декілька птахів так, щоб серед обраних виявилися і кури, і качки, і гусаки?
34. На перехресті є  $m$  світлофорів. Скільки може бути різних станів цих світлофорів, якщо кожен світлофор (незалежно від інших) має три можливих стани: 1) горить зелений; 2) горить жовтий; 3) горить червоний?
- Розв'яжіть цю задачу, якщо допускаються усі можливі комбінації станів кожного світлофора (наприклад, горить одночасно зелений і червоний або нічого не горить).
35. Скільки можна скласти з 32 літер шестилітерних слів, що містять хоча б один раз літеру "а"?
36. В поселенні проживає 1000 мешканців. Доведіть, що принаймні двоє з них маєть однакові ініціали.
37. Скільки існує семизначних телефонних номерів, в яких в перших трьох цифрах не зустрічаються цифри 0 і 9?
38. Палітурник має переплести 12 різних книжок в червону, зелену і коричневу палітурку. Скількома способами він може це зробити, якщо в кожен колір повинна бути переплетена хоча б одна книжка?
39. У відділі науково-дослідного інституту працюють декілька людей, при цьому кожен з них знає хоча б одну іноземну мову: 6 людей знають англійську, 7 – французьку, 6 – німецьку, 4 знають англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – французьку і англійську, 1 людина знає всі три мови. Скільки людей працює у цьому відділі? Скільки з них знають тільки англійську мову? Тільки французьку? Скільки людей знає рівно 1 мову?
40. На заміську прогулянку поїхало 92 людини. Бутерброди з ковбасою взяли з собою 48 людей, з сиром – 38 людей, з шинкою – 42 людини, з сиром і ковбасою – 28 людей, з ковбасою і шинкою – 31 людина, з сиром і шинкою – 26 людей. Всі три види бутербродів взяли з собою 25 людей, а інші замість бутербродів взяли пиріжки. Скільки людей взяли з собою пиріжки?
41. Скільки цілих чисел від 0 до 999 не діляться ні на 5, ні на 7? А скільки чисел від 0 до 999 не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5, ні на 7?
42. У скількох дев'ятизначних числах всі цифри різні?
43. Яких чисел від 1 до 10000000 більше: тих, в записах яких зустрічається одиниця, або тих, в яких її немає?

44. Через кожну з трьох даних точок на площині проведемо по  $m$  прямих так, щоб серед них не було двох, паралельних між собою, і трьох, що перетинаються в одній точці (за природнім винятком трьох прямих одного пучку). Знайдіть число точок перетину цих прямих (не рахуючи трьох заданих).
45. Скільки шестизначних чисел містять точно три різні цифри?
46. У складанні 40 задач приймало участь 30 студентів з усіх п'яти курсів. Довільні два студенти з одного курсу придумали порівну задач, а довільні два студенти з різних курсів – різне число задач. Скільки людей придумало одну задачу?
47. Скільки є шестизначних чисел, у яких сума цифр парна (допускаються лише шестизначні числа, у яких перша цифра відмінна від 0)? А якщо беруть всі числа від 1 до 999999?
48. Скільки існує п'ятизначних чисел? У скількох з них всі цифри парні? У скількох всі цифри непарні? У скількох не входять цифри, які менші за шість? У скількох немає цифр, які більше трьох?
49. Скільки і яких цифр знадобиться, щоб написати всі числа від 1 до 999999 включно? А від 1 до  $10^n - 1$  включно?
50. Знайдіть суму всіх чотиризначних чисел, що не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5.
51. Скільки існує п'ятизначних парних чисел, у яких жодна цифра не повторюється?
52. Скільки слів довжини  $n$  з цифр 0 і 1 містять парну кількість нулів?
53. Від А до В 999 км. Вздовж дороги стоять кілометрові стовпи, на яких написані відстані до А і до В: 0|999, 1|998, 2|997, ..., 998|1, 999|0. Скільки серед цих кілометрових стовпів таких, на яких є тільки дві різні цифри?
54. Дана послідовність чисел  $1, 2, 3, \dots, 2n$ . Скількома способами можна витягти з неї три числа, з яких можна побудувати арифметичну прогресію?  
Те саме для послідовності чисел  $1, 2, 3, \dots, 2n + 1$ .
55. Знайдіть кількість трійок різних натуральних чисел, не більших за 100, з яких можна побудувати геометричну прогресію?
56. Вікна будинку з видом на море розташовані у вузлах прямокутної сітки з  $m$  горизонталями (поверхами) і  $n$  вертикалями. Скільки сигналів можна передати кораблеві, який знаходить у морі, освітлюючи деякі з вікон будинку, якщо в темряві не можна розрізнити положення освітлених вікон відносно будинку?
57. Є 14 пар різних предметів. З них обирається деяка кількість предметів. Знайдіть кількість способів це зробити (дві вибірки відрізняються одна від одної своїм складом, але не порядком предметів). А якщо є  $n$  пар?
58. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо кожна з них може повторюватися кілька разів?

59. У мене є шість друзів. Через деякий час кожен з них був у мене на обіді 7 разів, кожні двоє зустрілися у мене на обіді 5 разів, кожні троє – 4 рази, кожні чотири – 1 раз, кожен друг був відсутній у мене на обіді 8 разів. Скільки разів я обідав наодинці? Скільки обідів було за цей час?
60. Скільки двозначних чисел в сумі з числом, яке записане тими самими цифрами, але у зворотньому порядку, дають повний квадрат?
61. З числа 12345678910111213...9899100 викресліть 100 цифр так, щоб число, яке залишиться, було а) найбільшим, б) найменшим (записи, що починаються з 0, неприпустимі).
62. Чи можна розставити 9 чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по колу так, щоб сума довільних трьох чисел, що стоять поряд, ділилася на 3 і була: а) більша 9; б) більша 15?
63. Чотири числа додали усіма можливими способами по два і отримали наступні шість сум: 2, 4, 9, 9, 14, 16. Знайдіть ці числа.
64. У правління вибрано 9 людей. З них необхідно вибрати голову, заступника голови і секретаря. Скількома способами це можна зробити?
65. Є 6 пар рукавичок різних розмірів. Скількома способами можна вибрати з них одну рукавичку на ліву руку і одну – на праву руку так, щоб ці рукавички були різних розмірів?
66. Скільки словників треба видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади з будь-якої з п'яти мов: російської, англійської, французької, німецької, італійської на довільну іншу з цих п'яти мов? На скільки більше словників доведеться видати, якщо число різних мов дорівнює 10?
67. У батька є 5 різних апельсинів, які він дає своїм 8 синам, причому кожен отримує або один апельсин, або нічого. Скількома способами це можна зробити? А якщо кількість апельсинів, які отримує кожен син, не обмежена?
68. В кімнаті студентського гуртожитку живуть троє студентів. В них є 4 чашки, 5 блюдець і 6 чайних ложок (всі чашки, блюдця і ложки відрізняються одна від одної). Скількома способами вони можуть накрити на стіл для чаювання (кожен отримує чашку, блюдо і ложку)?
69. У змаганнях з гімнастики беруть участь 10 людей. Троє суддів мають незалежно один від одного пронумерувати їх у порядку, який відобразатиме їхні виступи у змаганнях. Переможцем вважається той, кого назвуть першим хоча б двоє суддів. У якій частці випадків переможець змагань буде визначений?
70. Скількома способами можна вибрати з повної колоди карт, яка складається з 52 карт, по одній кожної масті? А якщо серед витягнутих карт немає жодної пари однакових, тобто двох королів, двох десятків і т. ін.?
71. Скількома способами можна вибрати з повної колоди карт, яка складається з 52 карт, по одній карті кожної масті так, щоб карти червоних мастей і карти чорних

мастей утворювали пари (наприклад, пікова і хрестова дев'ятки та бубновий і чирвовий валет)? А так, щоб серед вибраних карт можна було скласти дві пари, які складатимуться з чорної і червоної карти однієї і тієї ж назви (наприклад, валети піки і чирви та дами хреста і бубни)?

72. Знайдіть суму всіх натуральних трьохзначних чисел, які можна написати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4. А якщо жодна цифра не повинна з'являтися двічі в записі кожного числа?
73. Скільки різних чотиризначних чисел, що діляться на 4, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожна цифра не може зустрічатися декілька разів? А якщо кожна цифра зустрічається лише один раз?
74. На звану вечерю запрошені 5 чоловіків і 5 жінок. Навпроти кожного місця на стіл необхідно поставити табличку з ім'ям того, хто сидітиме на цьому місці, але жодні дві особи однієї статі не повинні сидіти поряд. Скількома способами можна розставити таблички? А якщо 5 чоловіків і 5 жінок сідають не за круглий стіл, а на карусель, і способи, що переходять один в одного при обертанні каруселі, вважаються такими, що співпадають?
75. Скільки п'ятизначних чисел містять всі цифри 1, 2, 3, 4, 5? Скільки містять всі цифри 0, 2, 4, 6, 8?
76. Знайдіть суму всіх п'ятизначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб в кожному числі жодна цифра не повторювалася. Розв'яжіть цю задачу для п'ятизначних чисел, які можна записати цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
77. Скільки непарних і скільки парних чотиризначних чисел можна скласти з цифр числа 3694, якщо кожен цифру необхідно використати один раз?
78. У матері є 2 однакових яблука, 3 однакові мандаринки і 4 однакових апельсина. Кожен день протягом 9 днів підряд вона видає сину по одному фрукту. Скількома способами це може бути зроблено?
79. Скільки різних "слів" можна отримати, переставляючи літери слова: а) "метаматематика"; б) "парабола"; в) "інгредієнт"?
80. Скількома способами можна розставити білі фігури (короля, ферзя, дві тури, два слона і двух коней) на першій лінії шахової дошки (не дотримуючись шахових правил)?
81. На перших двох лініях шахової дошки довільним чином ставляться білі і чорні фігури (по два коня, два слона, дві тури, ферзь і король кожного кольору). Скількома способами можна це зробити? Скількома способами можна розставити ті самі фігури по всій дошці? А якщо розставляються і всі пішаки (по 8 пішаків кожного кольору)?
82. Знайдіть суму чотиризначних чисел, що отримуються за усіх можливих перестановок наступних 4 цифр: а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 5; в) 1, 3, 3, 3; г) 1, 1, 4, 4.
83. Знайдіть суму всіх п'ятизначних чисел, які можна отримати переставляючи цифри 0, 1, 2, 3, 4 (цифра 0 не повинна бути першою).

84. а) Скількома способами можна вибрати три різні фарби з п'яти різних фарб, що вже є в наявності?  
 б) Скількома способами можна зробити триколіровий прапор (з трьома горизонтальними смугами), якщо є в наявності матерія п'яти різних кольорів? А якщо один з кольорів повинен бути червоним? А якщо кольори можуть повторюватися, але не поряд (смуги мають бути помітні)?
85. На площині проведено  $n$  прямих ліній, серед яких жодні дві не є паралельними і жодні три не перетинаються в одній точці. Скільки точок перетину мають ці прямі?
86. Трупа складається з 10 артистів. Скількома способами можна вибрати з неї протягом двох вечорів по 6 людей для участі в спектаклях так, щоб ці склади не співпадали один з одним?
87. У матері два однакових яблука і три однакові груші. Кожен день протягом 5 днів вона видає сину по одному фрукту. Скількома способами це може бути зроблено? Розв'яжіть аналогічну задачу, якщо яблук  $n$ , а груш  $k$ .
88. Зі спортивного клубу, який нараховує 30 членів, треба скласти команду з 4 людей для участі в змаганнях з бігу на 1000 м. Скількома способами це можна зробити?  
 А скількома способами можна скласти команду з 4 людей для участі в естафеті  $100 + 200 + 400 + 800$ ?
89. а) З колоди, яка містить 52 карти, витягнули 10 карт. У скількох випадках серед цих карт є хоча б один туз? Рівно 1 туз? Не менше двох тузів? Рівно 2 тузи?  
 б) Скількома способами можна вибрати з повної колоди, що містить 52 карти, 6 карт так, щоб серед них були усі чотири масті?
90. П'ять дівчат і троє юнаків грають в містечка. Скількома способами вони можуть розділитися на дві команди по 4 людини, якщо в кожну команду має потрапити хоча б один юнак?
91. Зі складу конференції, на якій присутні 52 людини, необхідно вибрати президію з 5 осіб і делегацію з 3 осіб. Скількома способами може бути здійснений вибір, якщо члени президії можуть увійти в склад делегації? А якщо члени президії не можуть увійти в склад делегації?
92. У першої особи є 7 книжок з математики, а у другої – 9 книжок. Скількома способами вони можуть обміняти одну книжку першої на одну книжку другої особи? А 3 книжки першої на 3 книжки другої?
93. З групи, що складається з 7 чоловіків і 4 жінок, необхідно вибрати 6 людей так, щоб серед них було не менше двох жінок. Скількома способами це може бути зроблено?
94. Рота складається з 3 офіцерів, 6 сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна виділити з них загін, що складається з офіцера, двох сержантів і 20 рядових? А якщо в загін має увійти командир роти і старший за віком серед сержантів?
95. У Мишка 6 друзів і кожного дня протягом 20 днів він запрошує до себе в гості трьох з них так, щоб компанія жодного разу не повторювалася. Скількома способами він може це зробити?