

ЗАДАЧІ

до державного екзамена з математики (заочне відділення)
2010–2011 навчальний рік

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

1. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x^2 - \pi^2}.$$

2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$.

3. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}.$$

4. Знайти границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

5. Знайти інтеграл

$$\int e^{\sqrt{x}} dx.$$

6. Знайти інтеграл

$$\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx.$$

7. Знайти інтеграл

$$\int \frac{x^3}{x^8 + 3} dx.$$

8. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$.

9. Дослідити функцію $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ та побудувати її графік.

10. Дослідити функцію $f(x) = xe^{-x}$ та побудувати її графік.

11. Дослідити функцію $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ та побудувати її графік.

12. Знайти множини абсолютної і умовної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2 + 1}$. Чи збігається цей ряд рівномірно на $[0, 1)$?

13. Зобразити у прямокутній системі координат криволінійну трапецію $\{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$, виразити її площу через інтеграл та обчислити його за формулою Ньютона–Лейбніца.

14. Зобразити у прямокутній системі координат криволінійну трапецію $\{(x, y) | 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$, виразити її площу через інтеграл та обчислити його за формулою Ньютона–Лейбніца.

15. Зобразити у прямокутній системі координат криволінійну трапецію $\{(x, y) | 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{3}\}$, виразити її площу через інтеграл та обчислити його за формулою Ньютона–Лейбніца.

16. Обчислити інтеграл $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{1 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}$.

АЛГЕБРА

1. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_2 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -10 \end{cases}.$$

3. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x - 2y + 6z = 4 \\ -x + 4y - z = -1 \end{cases}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 7x + 3y = 2 \\ x - 2y = -3 \\ 4x + 9y = 11 \end{cases}.$$

5. Знайти обернену для матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Знайти найбільший спільний дільник многочленів: $f(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x + 1$ і $g(x) = x^7 + x$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків для системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

8. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму: $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

9. Знайти власні числа і власні вектори лінійного перетворення з матрицею $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$

2. $y' - xy^2 = 2xy$

3. $y' + 2y = e^{-x}$

4. $y' = \frac{y}{3x-y^2}$

5. $y'' + y' - 2y = 0$

6. $y'' - 2y' + y = 4e^{-x}$

7.
$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x' + x + 5y = 1 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$$

9. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи
$$\begin{cases} x' = 2xy - x + y \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases}$$

10. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. Випадкова величина ξ має функцію розподілу $F(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $a\xi + b$.
2. Випадкова величина ξ має функцію розподілу $F(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\exp(\xi)$.
3. Випадкова величина X має функцію розподілу F . Знайти функцію розподілу випадкової величини $|X|$.

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

1. Знайти образ області $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ при дробово-лінійному відображенні $\omega = \frac{z-i}{z+i}$.
2. Відобразити півплощину $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ з розрізом вздовж дуги кола $z = \exp(it)$, $t \in [0, \alpha]$, $(0 < \alpha < \pi)$ на верхню півплощину.
3. Відобразити область $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, |z - 1| > 1\}$ на верхню півплощину.
4. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана в околах точок $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$; знайти область збіжності цих рядів та дати характеристику особливих точок.
5. Обчислити інтеграли по замкненим контурам з додатним напрямком обходу:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin z} dz, \quad \int_{|z|=1} \cos \frac{1}{z} dz, \quad \int_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 - z^3} dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{1}{z^8 + 1} dz.$$

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

1. Методом характеристик знайти розв'язок задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + 6 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0); \quad u(x, 0) = x^2; \quad u_t(x, 0) = 4x.$$

2. Методом характеристик знайти розв'язок задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin x \quad (x \in \mathbb{R}, \quad t > 0); \quad u(x, 0) = \sin x; \quad u_t(x, 0) = 0.$$

3. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & x \in (0, l) \quad t > 0; \\ u_x(0, t) &= u_x(l, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) &= \cos \frac{3\pi x}{l}, & x \in (0, l). \end{aligned}$$

АНАЛІТИЧНА І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ, ТОПОЛОГІЯ

1. Написати рівняння спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} =$

$$\frac{z-1}{-1}, \quad \begin{cases} x+2y+3=0, \\ 7y-z+12=0 \end{cases} \quad \text{і знайти відстань між цими прямими.}$$

2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2, 3, 1)$ і перетинає прямі

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y+z+4=0, \end{cases} \quad \text{та} \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

3. Точка $A(2, -1)$ лежить на еліпсі з фокусом у точці $F(1, 0)$, а відповідна цьому фокусу директриса задана рівнянням $2x - y - 10 = 0$. Скласти рівняння цього еліпса.

4. Знайти вісь параболи $x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 3 = 0$.

5. Звести загальне рівняння кривої другого порядку до найпростішого вигляду $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$;

6. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, яка проходить через точку $A(1, -2, 1)$, якщо її віссю є пряма $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

7. Звести загальне рівняння поверхні другого порядку до найпростішого вигляду $xy + xz + yz = 0$.