ЗАДАЧІ
до державного екзамена з математики
2010– 2011навчальний рік

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

1. Нехай для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ та $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \subset \mathbb{R}$
$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$
Довести, що рівняння
$$a_0 + a_1 x + \ldots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$
має принаймні один дійсний корінь на проміжку $(0, 1)$.

2. Обчислити границю
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 2x}{x^2 - \pi^2}.$$

3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} x \left[\frac{1}{x}\right]$.

4. Обчислити границю
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}.$$

5. Знайти границю
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\ x - \sin x}{x^3}.$$

6. Знайти інтеграл
$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx.$$

7. Довести, що функція $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\, dt$, визначена для всіх $x \in C([0,\ 1])$, рівномірно неперервна на $C([0,\ 1])$ з рівномірною метрикою ρ.

8. Нехай функція має у всіх точках відрізка $[a,\ b]$ похідну, обмежену на $[a,\ b]$. Довести, що функція є функцією обмеженої варіації.

9. Довести, що функція
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \cos \dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$
має обмежену варіацію на відрізку $[0, 1]$.

10. Обчислити інтеграл Лебега $\int\limits_{[0,1]} f(x)\, d\lambda_1(x)$, якщо
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (\frac{1}{3}, +\infty) \setminus \mathbb{R}, \\ x^3, & x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \setminus \mathbb{R}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

11. Обчислити інтеграл Лебега $\int\limits_{[1,2]} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\, d\lambda_1(x)$, де $\mathbb{I}_A$ – індикатор множини A.

12. Показати, що відображення $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, що діє за правилом

$$Af(x) = \left(\int\limits_0^1 tf(t)\, dt + \frac{5}{6} \right) x, \ x \in [0,1]; \quad f \in C([0,1]),$$

є стискаючим у просторі $C([0,\ 1])$ з рівномірною метрикою ρ та знайти його нерухому точку f^*.

13. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx$.

14. Знайти множини абсолютної і умовної збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1}$. Чи збігається цей ряд рівномірно на $[0,1)$?

15. Знайти площу перетину кругів $\{(x_1,x_2)|\ x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$ і $\{(x_1,x_2)|\ x_1^2 + x_2^2 \le 4x_2\}$.

16. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{1 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}$.

17. Розкласти в ряд Тейлора - Маклорена функцію
$f(x) = x\cos(x^2+1),\ x \in \mathbb{R}$.

18. Нехай функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ має похідну порядку m на $[a,b]$, точки $x_j \in [a,b],\ j = 0,1,\ldots,m$, різні. Довести існування такого $\theta \in (a,b)$, що $[x_0, x_1, \ldots, x_m; f] = \dfrac{1}{m!} f^{(m)}(\theta)$.

19. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int\limits_{[0,+\infty)} \frac{n \sin \frac{x}{n}}{1+x^4} \chi_{[0,+\infty)\setminus\mathbb{Z}}(x)\, d\lambda_1(x)$.

20. Дослідити на збіжність майже скрізь та за мірою Лебега на $\mathbb{R}$ послідовність функцій $f_n(x) = x^2 \cdot \chi_{[-n,n]}(x),\ x \in \mathbb{R}, \quad n \ge 1$.

21. Знайти функцію $f \in C(\mathbb{R}^2)$, еквівалентну функції
$g(x,y) = \sin(xy) \cdot \chi_{\{\frac{1}{n}|\ n\ge 1\}}(x)$.

22. Знайти норму лінійного неперервного функціонала
$f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)\, dt - \int\limits_2^3 x(t)\, dt$ на просторах $C([0,3]),\ L_2([0,3])$.

23. Нехай оператор A у просторі l_p $(1 \le p < +\infty)$ заданий формулою $Ax = (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, де $\{a_k :\ k \ge 1\}$ – фіксована обмежена послідовність. Знайти його спектр.

24. Нехай оператор A у просторі l_p $(1 \le p < +\infty)$ заданий формулою $Ax = (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, де $\{a_k :\ k \ge 1\}$ – фіксована обмежена послідовність. Довести, що оператор A компактний тоді й лише тоді, коли $a_k \to 0,\ k \to \infty$.

25. Довести, що оператор $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$, заданий формулою $(Ax)(t) = \int_0^1 (ts)^2 x(s)\, ds,\ t \in [0,1],\ x \in L_2([0,1])$, компактний та знайти його спектр.

26. Для натурального числа $n \ge 2$ знайти Знайти многочлен степеня не вище $(n-2)$ найкращого рівномірного наближення функції $f(x) = \sin nx,\ x \in [0,\pi]$.

27. Нехай $f_n(x) = \frac{1+1x+2x^2+\dots+nx^n}{nx^{n-1}}$, $n \geq 1$, $D = \{x |$ послідовність $\{f_n(x) | n \geq 1\}$ збігається $\}$.

1) Знайти множину D.

2) Знайти $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in D$. Чи збігається послідовність рівномірно на D?

3) Перевірити, чи неперервна функція f на множині D. Чи є ця функція рівномірно неперервною на D?

28. Нехай $\omega = x_2^3 e^{x_3} dx_1 + e^{\sin x_3} \cos x_1 dx_2 + x_1^2 e^{x_3} \ln(1+x_2^2) dx_3$.

1) Знайти $d\omega$.

2) Обчислити інтеграли $\int\limits_{S_i} d\omega$, де S_1 — зовнішня сторона поверхні, що обмежує тіло $\{(x_1, x_2, x_3) | 0 \leq x_2 \leq \sqrt[4]{1 - x_1^4 - x_3^4}\}$, S_2 — зовнішня сторона поверхні $x_2 = \sqrt[4]{1 - x_1^4 - x_3^4}$, $x_1^4 + x_3^4 \leq 1$.

29. Нехай $f(t) = \begin{cases} t^2, & t \in (-1, 1); \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$

1) Записати інтегральну формулу Фур'є для цієї функції

2) Дослідити поточкову збіжність інтеграла Фур'є.

30. Довести, що множина граничних точок деякої множини у метричному просторі замкнена.

АЛГЕБРА

1. Знайти обернену для матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Знайти найбільший спільний дільник многочленів: $f(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x + 1$ і $g(x) = x^7 + x$ у $\mathbb{Z}_2[x]$.

3. Для яких значень параметра квадратична форма $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 4x_1 x_3 - 6x_2 x_3$ буде додатно визначена?

4. Знайти розмірності суми і перетину підпросторів $U = \langle (1,1,1,1), (1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1) \rangle$, $V = \langle (1,-1,-1,1), (1,-1,0,0), (3,-1,1,1) \rangle$.

5. Знайти канонічний вигляд і ортонормовану базу для самоспряженого перетворення в евклідовому векторному просторі з матрицею

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти фундаментальну систему розв'язків для системи лінійних однорідних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array} \right. .$$

7. Відокремити кратні множники многочлена: $f(x) = x^6 - 15x^4 - 8x^3 + 51x^2 + 72x + 27$.

8. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму: $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

9. Знайти власні числа і власні вектори лінійного перетворення з матрицею $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Доповнити систему векторів $a_1 = (1, 1, 1, 1),\ a_2 = (1, -1, 1, -1)$ до ортогональної бази простору $\mathbb{R}^4$.

11. Знайти степінь $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ розширення $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$.

12. Знайти всі незвідні многочлени степеня 3 над полем $\mathbb{Z}_2$.

13. Розкласти в пряму суму циклічних груп фактор-групу $\mathbb{Z}^3/H$, де H -підгрупа, породжена елементами $a = (1, -1, 2), b = (4, -7, 5), c = (2, -5, 1)$.

14. З'ясувати, чи будуть ізоморфними групи $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{60}$ і $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{30}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$

2. $y' - xy^2 = 2xy$

3. $y' + 2y = e^{-x}$

4. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$

5. $y'' + y' - 2y = 0$

6. $y'' - 2y' + y = 4e^{-x}$

7. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' + x + 5y = 1 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$

9. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи $\begin{cases} x' = 2xy - x + y \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases}$

10. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи $\begin{cases} x' = e^{x+2y} - \cos 3x \\ y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y \end{cases}$

11. Розв'язати рівняння $x^2y^2y' + 1 = y$.

12. Розв'язати рівняння $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

13. Знайти інтегрувальний множник рівняння $(x^3 + xy^2 - y)dx + (y^3 + x^2y + x)dy = 0$.

14. З'ясувати, чи має рівняння $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ особливі розв'язки, і знайти їх у випадку існування.

15. Розв'язати рівняння $\ln y' + \sin y' - x = 0$.

16. Довести, що функції $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = x^2$ утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного рівняння третього порядку, та скласти це рівняння даною системою функцій.

17. Розв'язати рівняння $y^{(5)} + 2y = 0$.

18. Розв'язати рівняння $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}$.

19. Розв'язати систему $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y \\ \dot{y} = 3x + 2y \end{cases}$

20. Розв'язати систему $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + 2e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases}$

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

1. $\begin{cases} \int\limits_0^1 (x'(t))^2 dt \to \inf \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \end{cases}$

2. $\int\limits_0^1 ((x'(t))^2 - x(t))dt + x^2(1) \to \inf$

3. $\begin{cases} \int\limits_0^1 (x'(t))^2 dt \to \inf \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \\ \int\limits_0^1 x(t)dt = 0 \end{cases}$

4. Довести, що в даній задачі Лагранжа єдина допустима екстремаль не доставляє слабкого локального мінімуму:

$$\begin{cases} J(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))dt \to \inf, \\ x(0) = 0, \quad x(\frac{3\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

5. Розв'язати задачу Больца

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)dt - 2x(1)\operatorname{sh} 1 \to \inf .$$

6. Розв'язати ізопериметричну задачу

$$\begin{cases} \mathcal{I}(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\pi} \dot{x}^2(t)dt \to \inf, \\ x(0) = 1, \quad x(\pi) = -1, \\ \int\limits_0^{\pi} x(t)\cos t \; dt = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

7.

8.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. В урні знаходяться 4 кулі, про які відомо, що вони або білі або чорні. В урну поклали білу кулю і після перемішування навмання обрали кулю. Віна виявилась білою. Яка ймовірність того, що серед тих, які залишились, рівно одна біла ?

2. Випадкова величина ξ має щільність $5\exp(-10|x|)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію, функцію розподілу ξ, $P\{\xi < 0\}$.

3. У двох урнах знаходиться відповідно по n_1 і n_2 білих куль, і по m_1 і m_2 чорних куль. З першої урни навмання обираються 2 кулі, а з другої – 1 куля. Потім з цих 3 куль випадково обирається одна. Яка ймовірність того, що ця куля біла ?

4. Випадкова величина ξ має функцію розподілу $F(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини : a) $\exp(\xi)$, b) $a\xi + b$.

5. Кидають 18 гральних костей. Скільки існує способів, при яких випадають : a) всі грані кості, b) кожна грань по 3 рази?

6. З 18 стрільців 8 влучають у мішень з ймовірністю 0.9, 6 – з ймовірністю 0.7, і 4 – з ймовірністю 0.5. Навмання обраний стрілець вистрілив, але у мішень не влучив. До якої з груп по влучності найімовірніше належить цей стрілець ?

7. Потік з n однакових частинок реєструється системою з m датчиків. Частинки розподіляються по датчиках навмання. Датчики вважаються різними. В кожен може потрапити довільна кількість частинок. Всі розподіли частинок по датчикам вважаємо рівноімовірними. Яка ймовірність того, що рівно k датчиків зареєструють наявність частинок ?

8. На відрізку $[0, 6]$ навмання беруть дві точки. Знайти функцію розподілу випадкової величини ξ, яка дорівнює відстані між цими точками.

9. Стрільці $A1, A2, A3, A4$ влучають у мішень відповідно з ймовірностями $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$. Стрільці зробили залп і виявили в мішені 3 влучання. Знайти ймовірність того, що одне з них зробив $A1$.

10. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Знайти функцію розподілу, щільність випадкової величини $\zeta = \frac{1}{\xi^2}$.

11. Прилад складається з 5 вузлів, в i-ому вузлі міститься n_i елементів. Вихід з ладу одного елемента спричиняє відмову всього вузла. Прилад вийде з ладу, якщо зламається перший вузол і один з тих, що залишились. Елементи виходять з ладу незалежно, їх надійність дорівнює p. Знайти надійність приладу.

12. Знайти коефіцієнт кореляції між кількістю випадання двійки і трійки при 10 підкидуваннях гральної кості.

13. З 12 білетів, які пронумеровані від 1 до 12, без повернення обирають три білети. Яка ймовірність того, що у вибраних білетів : a) всі номери парні, b) точно один номер парний ?

14. Знайти ймовірність того, що дні народження 6 чоловік, які обираються навмання з числа 12 місяців, випадуть на різні місяці року.

15. В двох урнах містяться відповідно n_1 і n_2 білих куль, і m_1 і m_2 чорних. Навмання узяту в першій урні кулю переклали в другу. Яка ймовірність того, що куля, вибрана після цього навмання з другої урни, виявиться білою ?

16. В квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1]$ навмання кинуто точку (a, b). Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + 2ax + b = 0$ дійсні.

17. На колі одиничного радіуса навмання вибрані точки A, B, C. Яка ймовірність того, що трикутник ABC – гострокутний?

18. Випадкова величина X має функцію розподілу F. Знайти функції розподілу випадкових величин: a) e^X, b) $|X|$.

19. Кидають 12 гральних костей. Скільки існує способів, при яких випадають: a) всі грані кості, b) непарні грані по два рази, а парні – по чотири.

20. Випадкові величини X і Y незалежні та мають однаковий геометричний розподіл. Обчислити при всіх n і k ймовірність $P(\{X = k \mid X + Y = n\})$.

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

1. Випадкова величина має логнормальний розподіл з параметрами (a, σ^2), якщо $\eta = \ln \xi$ має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$. Знайти достатню статистику для векторного параметра $\theta = (a, \sigma^2)$.

2. Нехай $= (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з рівномірним розподілом спостережень на відрізку $[0; 2\theta]$. На який коефіцієнт треба домножити статистику $T(X) = \max\limits_{1 \le i \le n} \xi_i - \min\limits_{1 \le i \le n} \xi_i$, щоб отримати незміщену оцінку параметра θ ?

3. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з розподілом Паскаля: $P\{\xi = k\} = \frac{\theta^k}{(1+\theta)^{k+1}},\ k = 0, 1, \ldots;\ \theta > 0$. Показати, що статистика $\widehat{\theta}_n = \overline{\xi}$ є незміщеною та ефективною оцінкою параметра θ.

4. Задана щільність рівномірного розподілу $f(x, \theta) = \begin{cases} 0, & x \notin [-\theta, \theta], \\ \frac{1}{2\theta}, & x \in [-\theta, \theta], \end{cases}$ $\theta > 0$. Знайти оцінку методу моментів параметра θ.

5. Методом максимальної вірогідності за кратною вибіркою $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ знайти оцінку невідомого параметра θ розподілу Паскаля $P\{\xi = k\} = \theta^k (1 + \theta)^{-k-1},\ k = 0, 1, \ldots;\ \theta > 0$.

6. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ вибірка з нормального розподілу $N(1, \sigma^2)$. Чи є оцінка $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - 1)^2$ ефективною оцінкою параметра σ^2?

7. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – вибірка з розподілу Ерланга з параметрами m та λ:

$$f(x, \lambda, m) = \begin{cases} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\lambda x\}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Оцінити параметри m та λ за методом моментів.

8. Знайти функцію вірогідності та достатні статистики для вибірки з розподілу Ерланга з параметрами m та λ:

$$f(x, \lambda, m) = \begin{cases} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\lambda x\}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

9. На відрізок $[0; 1]$ навмання кидають точку, яка ділить відрізок на дві частини, і фіксують її координату. Експеримент проведено 10 разів, і при цьому отримано 10 незалежних спостережень випадкової величини: 0,33; 0,93; 0,62; 0,38; 0,65; 0,53; 0,81; 0,07; 0,61; 0,04. Оцінити за вибіркою математичне сподівання площі круга з радіусом, що дорівнює більшій частині відрізка $[0; 1]$.

10. Випадкова величина ξ має логнормальний розподіл з параметрами (a, σ^2), якщо $\eta = \ln \xi$ має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$. Знайти достатню статистику для векторного параметра $\theta = (a, \sigma^2)$.

11. Методом максимальної вірогідності за кратною вибіркою $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ знайти оцінку невідомого параметра θ розподілу $P(\{\xi = m\}) = \frac{(\theta-1)^m}{\theta^{m+1}}$, $\theta > 1$, $m = 0, 1, \ldots$.

12. При підкиданні грального кубика отримали такі результати:

Цифра	1	2	3	4	5	6
Кількість появ	50	39	55	47	60	53

Чи можна за цими даними за критерієм χ^2 прийняти гіпотезу про симетричність грального кубика? (Вірогідний рівень $\alpha = 0,05$.)

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

1. Знайти образ області $\Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при дробово-лінійному відображенні $\omega = \frac{z-i}{z+i}$.

2. Відобразити півплощину $\{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} z > 0\}$ з розрізом вздовж дуги кола $z = \exp(it),\ t \in [0, \alpha], (0 < \alpha < \pi)$ на верхню півплощину.

3. Знайти область, на яку функція Жуковського відображає круг $|z| < 1$ з розрізом вздовж відрізка $[a, 1]$, $(0 < a < 1)$.

4. Відобразити область $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2, \ |z-1| > 1\}$ на верхню півплощину.

5. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана в околах точок $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$; знайти область збіжності цих рядів та дати характеристику особливих точок.

6. Обчислити інтеграли по замкненим контурам з додатним напрямком обходу:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{\sin z}\,dz, \qquad \int\limits_{|z|=1} \cos\frac{1}{z}\,dz, \qquad \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 - z^3}\,dz, \qquad \int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^8+1}\,dz.$$

7. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2 - 2x + 5}\,dx.$$

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

1. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння другого порядку $u_{xx} - 4\,u_{xy} + 2\,u_{xz} + 4\,u_{yy} + u_{zz} = 0$.

2. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння другого порядку $4\,u_{xx} - 4\,u_{xy} - 2\,u_{yz} = 0$.

3. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння другого порядку $u_{xx} + 2\,u_{xy} - 2\,u_{xz} + 2\,u_{yy} + 6\,u_{zz} = 0$.

4. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння другого порядку $u_{xx} - 2\,u_{xy} - 3\,u_{yy} + u_y = 0$.

5. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння другого порядку $u_{xx} - 6\,u_{xy} + 10\,u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$.

6. Звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння другого порядку $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$.

7. Використовуючи формулу д'Аламбера, знайти розв'язок задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = 4\,u_{xx} \quad (x \in \mathbb{R}, \quad t > 0); \qquad u(x,0) = x^2; \quad u_t(x,0) = x.$$

8. Методом характеристик знайти розв'язок задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + 6 \quad (x \in \mathbb{R}, \quad t > 0); \qquad u(x,0) = x^2; \quad u_t(x,0) = 4x.$$

9. Методом характеристик знайти розв'язок задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin x \quad (x \in \mathbb{R}, \quad t > 0); \qquad u(x,0) = \sin x; \quad u_t(x,0) = 0.$$

10. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & a^2 u_{xx}, & x \in (0,l) \quad t > 0; \\ u(0,t) & = & u(l,t) = 0, & t > 0; \\ u(x,0) & = & \sin\frac{\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = 0, & x \in (0,l). \end{array}$$

11. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{array}{rcll} u_t &=& u_{xx}, & x\in(0,l)\quad t>0; \\ u_x(0,t) &=& u_x(l,t)=0, & t>0; \\ u(x,0) &=& \cos\frac{3\pi x}{l}, & x\in(0,l). \end{array}$$

12. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{array}{rcll} u_t &=& u_{xx}, & x\in(0,1)\quad t>0; \\ u_x(0,t) &=& u(1,t)=0, & t>0; \\ u(x,0) &=& \cos\frac{\pi x}{2} + \cos\frac{3\pi x}{2}, & x\in(0,1). \end{array}$$

АНАЛІТИЧНА І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ, ТОПОЛОГІЯ

1. Написати рівняння спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\begin{cases} x+2y+3=0, \\ 7y-z+12=0 \end{cases}$ і знайти відстань між цими прямими.

2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,3,1)$ і перетинає прямі $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y+z+4=0, \end{cases}$ та $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

3. Точка $A(2,-1)$ лежить на еліпсі з фокусом у точці $F(1,0)$, а відповідна цьому фокусу директриса задана рівнянням $2x-y-10=0$. Скласти рівняння цього еліпса.

4. Знайти вісь параболи $x^2-2xy+y^2+x-2y+3=0$.

5. Звести загальне рівняння кривої другого порядку до найпростішого вигляду $x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$;

6. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, яка проходить через точку $A(1,-2,1)$, якщо її віссю є пряма $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.

7. Звести загальне рівняння поверхні другого порядку до найпростішого вигляду $xy+xz+yz=0$.

8. Показати, що множини $\{(\mathbb{R}^2,\varphi)\}$ і $\{(\mathbb{R}^2,\psi)\}$, де

$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1,x_2) \overset{\varphi}{\longmapsto} (2x_1-5x_2, x_1-3x_2)\in\mathbb{R}^2,$$
$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1,x_2) \overset{\psi}{\longmapsto} (x_1-2x_2, x_1-3x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

є C^∞-атласами, що задають однакові C^∞-структури в $\mathbb{R}^2$.

9. Записати натуральні рівняння кривої $\vec{r}(t)=\{t,\operatorname{ch}t,\operatorname{sh}t\}$.

10. Знайти стичне коло кривої $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=x$ в точці $M(0,0,1)$.

11. Знайти стичну сферу кривої $\vec{r}(t)=\{e^t,e^t\cos t,e^t\sin t\}$ у довільній неособливій точці, яка не є точкою розпрямлення і точкою сплощення.

12. Знайти периметр і внутрішні кути криволінійного трикутника, обмеженого лініями $u = \pm v^2$, $v = 2$ на поверхні $\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, 2v\}$.

13. На параболоїді $z = 2xy$ знайти криві, які перетинають під прямим кутом його прямолінійні твірні однієї серії.

14. Обчислити геодезичну кривину лінії $u = \operatorname{sh} v$, $0 \leqslant v \leqslant v_0$, на гелікоїді $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$.

15. З'ясувати, чи є зв'язним топологічний простір $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 7\}$ з індукованою з $\mathbb{R}^2$ топологією. Відповідь обгрунтувати.

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1. Швидкість автомобілів в тунелі ϑ не більша 50км/год та пов'язана з щільністю потоку (кількістю машин на 1км шляху) співвідношенням $P = (\vartheta_0 - \vartheta)/z$, де $\vartheta_0 = 60$км/год, а z — рівномірно розподілена на відрізку $[1/2, 1]$ випадкова величина. Регулювання руху здійснюється вибором ϑ. Мета операції — збільшення потоку машин F через тунель (тобто їх щільності вийшовши з тунелю за 1год.) Знайти оптимальні в середньому стратегію та стратегію гарантованого ризику.

2. Відділ хімічної фірми виготовляє дві фарби: для внутрішніх 1 та зовнішніх робіт 2, використовуючи початкові продукти A та B, максимально можливі добові запаси яких 6т та 8т відповідно. Витрати A і B на 1т фарби 1 є 1 і 2 відповідно, а для 2 є 2 і 1 відповідно. Попит на фарбу 2 не перевищує попиту на фарбу 1 більше ніж на 1т, а попит на фарбу 2 не перевищує 2т на добу. Ціни 1т фарби 1 — 3000 грн, фарби 2 — 2000 грн. Формалізуючи задачу пошуку оптимального плану добового виробництва фарб, як задачу лінійного програмування та геометрично розв'язати її. (Ціль - максимізація доходу)

3. Розв'язати матричну гру двох осіб з платіжною матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ геометричним методом.

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

1. Знайти функції попиту на два товари для споживача, що застосовує неокласичний підхід до раціонального споживання з функцією корисності $V(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2, x_1,\ x_2 > 0$, $a_1, a_2 > 0$.

2. Фірма має виробничу функцію $F(K, L) = AK^a L^b$, $A > 0, a > 0, b > 0$ де K — капітал і L — праця, використані у виробництві, та орієнтована на максимізацію прибутку в довгостроковому періоді часу. Знайти функції попиту фірми на капітал і працю та функцію пропозиції фірми.