ЗАДАЧІ

до державного екзамена з математики

2010– 2011навч. рік

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

1. Нехай для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ та $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \subset \mathbb{R}$
$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$
Довести, що рівняння
$$a_0 + a_1 x + \ldots a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$
має принаймні один дійсний корінь на проміжку $(0, 1)$.

2. Обчислити границю
$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{x^2 - \pi^2}.$$

3. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} x \left[\frac{1}{x}\right]$.

4. Обчислити границю
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}.$$

5. Знайти границю
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{tg}\ x - \sin x}{x^3}.$$

6. Знайти інтеграл
$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx.$$

7. Довести, що функція $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\, dt$, визначена для всіх $x \in C([0,\ 1])$, рівномірно неперервна на $C([0,\ 1])$ з рівномірною метрикою ρ.

8. Нехай функція має у всіх точках відрізка $[a,\ b]$ похідну, обмежену на $[a,\ b]$. Довести, що функція є функцією обмеженої варіації.

9. Довести, що функція
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \cos \dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$
має обмежену варіацію на відрізку $[0, 1]$.

10. Обчислити інтеграл Лебега $\int\limits_{[0,1]} f(x)\, d\lambda_1(x)$, якщо
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (\frac{1}{3}, +\infty) \setminus \mathbb{R}, \\ x^3, & x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \setminus \mathbb{R}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

11. Обчислити інтеграл Лебега $\int\limits_{[1,2]} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\, d\lambda_1(x)$, де $\mathbb{I}_A$ – індикатор множини A.

12. Показати, що відображення $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, що діє за правилом

$$Af(x) = \left(\int\limits_0^1 tf(t)\, dt + \frac{5}{6}\right) x,\ \ x \in [0,1]; \quad f \in C([0,1]),$$

є стискаючим у просторі $C([0,\, 1])$ з рівномірною метрикою ρ та знайти його нерухому точку f^*.

13. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx$.

14. Знайти множини абсолютної і умовної збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{n^2+1}$.

15. Знайти площу перетину кругів $\{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$ і $\{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 \le 4x_1\}$.

16. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \dfrac{dx_1 dx_2 dx_3}{1 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}$.

17. Розкласти в ряд Тейлора - Маклорена функцію
$f(x) = x\cos(x^2+1),\ x \in \mathbb{R}$.

18. Нехай функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ має похідну порядку m на $[a,b]$, точки $x_j \in [a,b],\ j = 0, 1, \ldots, m$, різні. Довести існування такого $\theta \in (a,b)$, що $[x_0, x_1, \ldots, x_m; f] = \dfrac{1}{m!} f^{(m)}(\theta)$.

19. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} \dfrac{n \sin \frac{x}{n}}{1+x^4} \chi_{[0,+\infty)\setminus\mathbb{Z}}(x)\, d\lambda_1(x)$.

20. Дослідити на збіжність майже скрізь та за мірою Лебега на $\mathbb{R}$ послідовність функцій $f_n(x) = x \cdot \chi_{[-n,+\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}, \quad n \ge 1$.

21. Знайти функцію $f \in C(\mathbb{R}^2)$, еквівалентну функції
$g(x,y) = \sin(xy) \cdot \chi_{\{\frac{1}{n} |\ n \ge 1\}}(x)$.

22. Знайти норму лінійного неперервного функціонала
$f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)\, dt - \int\limits_2^3 x(t)\, dt$ на просторах $C([0,3]),\ L_2([0,3])$.

23. Нехай оператор A у просторі l_p $(1 \le p < +\infty)$ заданий формулою $Ax = (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, де $\{a_k :\ k \ge 1\}$ – фіксована обмежена послідовність. Знайти його спектр.

24. Нехай оператор A у просторі l_p $(1 \le p < +\infty)$ заданий формулою $Ax = (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, де $\{a_k :\ k \ge 1\}$ – фіксована обмежена послідовність. Довести, що оператор A компактний тоді й лише тоді, коли $a_k \to 0,\ k \to \infty$.

25. Довести, що оператор $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$, заданий формулою $(Ax)(t) = \int_0^1 ts^2 x(s)\, ds,\ t \in [0,1],\ x \in L_2([0,1])$, компактний та знайти його спектр.

26. Знайти многочлен степеня не вище $(n-1)$ найкращого рівномірного наближення функції $f(x) = \cos nx,\ x \in [0,\pi]$.

27. Нехай $f_n(x) = \dfrac{1+1x+2x^2+\ldots+nx^n}{nx^{n-1}}$, $n \geq 1$, $D = \{x |$ послідовність $\{f_n(x) | n \geq 1\}$ збігається $\}$.

1) Знайти множину D.

2) Знайти $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in D$. Чи збігається послідовність рівномірно на D?

3) Перевірити, чи неперервна функція f на множині D. Чи є ця функція рівномірно неперервною на D?

28. Нехай $\omega = x_2^3 e^{x_3}\, dx_1 + e^{\sin x_3} \cos x_1\, dx_2 + x_1^2 e^{x_3} \ln(1+x_2^2)\, dx_3$.

1) Знайти $d\omega$.

2) Обчислити інтеграли $\int\limits_{S_i} d\omega$, де S_1 – зовнішня сторона поверхні, що обмежує тіло

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_2 \leq \sqrt[4]{1 - x_1^4 - x_3^4}\right\},$$

S_2 – зовнішня сторона поверхні

$$x_2 = \sqrt[4]{1 - x_1^4 - x_3^4}, \quad x_1^4 + x_3^4 \leq 1.$$

29. Нехай

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t \in (-1, 1), \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

1) Записати інтегральну формулу Фур'є для цієї функції.

2) Дослідити поточкову збіжність інтеграла Фур'є.

30. Довести, що множина граничних точок деякої множини у метричному просторі замкнена.

АЛГЕБРА. Пояснювальна записка до задач з АЛГЕБРИ на державних іспитах

Студент повинен вміти розв'язувати задачі наступних типів

1. Знаходження найбільшого спільного дільника двох многочленів з коефіцієнтами в різних полях (зокрема, в скінченних).
2. Відокремлення кратних множників многочленів.
3. Знаходження всіх незвідних многочленів заданого степеня над скінченними полями.
4. Знаходження власних чисел і власних векторів лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею.
5. Знаходження оберненої для заданої матриці.
6. Знаходження розмірності суми і перетину підпросторів векторного простору заданої розмірності.
7. Визначення того, коли задана квадратична форма буде додатно визначеною.
8. Знаходження канонічного вигляду і ортонормованої бази для самоспряженого перетворення з заданою матрицею.
9. Знаходження фундаментальної системи розв'язків для системи лінійних рівнянь.
10. Зведення до канонічного вигляду квадратичної форми.
11. Знаходження ортогональних баз простору.
12. Знаходження степеня розширення полів
13. Розклад в пряму суму циклічних підгруп скінченнопородженої абелевої групи.
14. Встановлення ізоморфізму між абелевими групами, заданими як добуток циклічних груп.
15. Знаходження жорданової нормальної форми заданої матриці.

1. Знайти власні числа і власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Знайти обернену для матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Знайти найбільший спільний дільник многочленів: $f(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x + 1$ і $g(x) = x^7 + x$ у $\mathbb{Z}_2[x]$.

4. Для яких значень параметра квадратична форма $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 4x_1 x_3 - 6x_2 x_3$ буде додатно визначена?

5. Знайти розмірності суми і перетину підпросторів $U = \langle(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1)\rangle$, $V = \langle(1,-1,-1,1),(1,-1,0,0),(3,-1,1,1)\rangle$.

6. Знайти канонічний вигляд і ортонормовану базу для самоспряженого перетворення з матрицею

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків для системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

8. Відокремити кратні множники многочлена: $f(x) = x^6 - 15x^4 - 8x^3 + 51x^2 + 72x + 27$.

9. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму: $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

10. Знайти власні числа і власні вектори лінійного перетворення з матрицею $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Доповнити систему векторів $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,-1,1,-1)$ до ортогональної бази простору $\mathbb{R}^4$.

12. Знайти степінь $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ розширення $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \supset \mathbb{Q}$.

13. Знайти всі незвідні многочлени степеня 3 над полем $\mathbb{Z}_2$.

14. Розкласти в пряму суму циклічних груп фактор-групу $\mathbb{Z}^3/H$, де H -підгрупа, породжена елементами $a = (1,-1,2), b = (4,-7,5), c = (2,-5,1)$.

15. З"ясувати, чи будуть ізоморфними групи $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{60}$ і $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{30}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$

2. $y' - xy^2 = 2xy$

3. $y' + 2y = e^{-x}$

4. $y' = \frac{y}{3x-y^2}$

5. $y'' + y' - 2y = 0$

6. $y'' - 2y' + y = 4e^{-x}$

7. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' + x + 5y = 1 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$

9. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи $\begin{cases} x' = 2xy - x + y \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases}$

10. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи $\begin{cases} x' = e^{x+2y} - \cos 3x \\ y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^{y} \end{cases}$

11. Розв'язати рівняння $x^2y^2y' + 1 = y$.

12. Розв'язати рівняння $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

13. Знайти інтегрувальний множник рівняння

$$\left(x^3 + xy^2 - y\right) dx + \left(y^3 + x^2y + x\right) dy = 0.$$

Розв'язання. Розіб'ємо ліву частину рівняння на групи, для кожної з яких інтегрувальний множник знаходиться просто:

$$\left[x\left(x^2 + y^2\right) dx + y\left(x^2 + y^2\right) dy\right] + \left[x\, dy - y\, dx\right] = 0.$$

Розглянемо два диференціальних рівняння

$$x\left(x^2 + y^2\right) dx + y\left(x^2 + y^2\right) dy = 0 \qquad \text{та} \qquad x\, dy - y\, dx = 0.$$

Інтегрувальним множником першого рівняння є $m_1 = \frac{1}{x^2+y^2}$, його інтеграл дорівнює $u_1 = x^2 + y^2$. Інтегрувальний множник другого рівняння дорівнює $m_2 = \frac{1}{xy}$, а інтегралом є $u_2 = \frac{y}{x}$.

Використовуючи теорему про загальний вигляд інтегрувального множника, подамо інтегрувальний множник першого рівняння у вигляді $m_1\varphi(u_1)$, а другого $m_2\psi(u_2)$. Підберемо неперервно диференційовні функції φ і ψ так, щоб $m_1\varphi\left(x^2 + y^2\right) = m_2\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто покладемо $\varphi\left(x^2 + y^2\right) = 1$, а $\psi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} : \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$, і, в результаті, дістанемо:

$$m(x, y) = m_1\, \varphi(u_1) = m_2\, \psi(u_2) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Відповідь. $m(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

14. З'ясувати, чи має рівняння $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ особливі розв'язки і знайти їх у випадку існування.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов теореми Пікара. Функція $f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ є неперервною в $\mathbb{R}^2$, але не задовольняє умову Ліпшица вздовж прямої $y = 0$.

Справді, припустивши від супротивного, що існує стала Ліпшица L, така, що $|y_1^{\frac{2}{3}} - y_2^{\frac{2}{3}}| \le L|y_1 - y_2|$, при $y_1 \ne 0$, $y_2 = 0$, дістанемо $|y_1^{\frac{2}{3}}| \le L|y_1|$ або $L|y_1^{\frac{1}{3}}| \ge 1$. Остання нерівність не виконується для достатньо малих $|y_1|$.

Оскільки $y = 0$ є розв'язком рівняння, то саме він може бути особливим. Знайдемо інші розв'язки цього рівняння:

$$y^{-\frac{2}{3}}\,dy = 3\,dx \Rightarrow \quad \int y^{-\frac{2}{3}}\,dy = \int 3\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 3y^{\frac{1}{3}} = 3x + 3C \Rightarrow \quad y = (x+C)^3.$$

Таким чином, для довільного x_0 через точку $(x_0, 0)$ проходять принаймні дві інтегральні криві: $y = 0$ і $y = (x - x_0)^3$. Тому $y(x) \equiv 0$ є особливим розв'язком досліджуваного рівняння. Інших особливих розв'язків немає, оскільки верхня і нижня площини є областями єдиності розв'язків.

Відповідь. Рівняння має єдиний особливий розв'язок $y = 0$.

15. Розв'язати рівняння

$$\ln y' + \sin y' - x = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння проблематично розв'язати відносно похідної, тому застосуємо метод введення параметра. Дістанемо

$$y' = p, \quad x = \ln p + \sin p, \quad dx = \frac{dp}{p} + \cos p\,dp\,;$$

а оскільки $dy = p\,dx$, то

$$dy = p\left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp \quad \text{або} \quad dy = (1 + p\cos p)\,dp,$$

звідки $y = p + \cos p + p\sin p + C$.

Отже, маємо множину розв'язків рівняння у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \ln p + \sin p; \\ y = p + \cos p + p\sin p + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Відповідь. $\begin{cases} x = \ln p + \sin p; \\ y = p + \cos p + p\sin p + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{cases}$

16. Довести, що функції $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = x^2$ утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного рівняння третього порядку та скласти це рівняння даною системою функцій.

Розв'язання. Задані функції тричі неперервно диференційовні. Визначник Вронського

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix} = e^x\left[(x-1)^2 + 1\right] \ne 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, $\{y_1, y_2, y_3\}$ є ФСР для ЛОР, яке можна подати у вигляді

$$\det\begin{pmatrix} x & e^x & x^2 & y \\ 1 & e^x & 2x & y' \\ 0 & e^x & 2 & y'' \\ 0 & e^x & 0 & y''' \end{pmatrix} = 0,$$

або, після розкладання за останнім стовпцем і скорочення на e^x,

$$(x^2-2x+2)y'''-x^2y''+2xy'-2y=0.$$

Відповідь. $(x^2-2x+2)y'''-x^2y''+2xy'-2y=0.$

17. Розв'язати рівняння $y^{(5)}+2y=0$.
Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $\lambda^5+2=0$ знайдемо за *формулою Муавра*, тобто

$$\lambda_k=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\,\frac{\pi+2k\pi}{5}\right),\quad k=0,1,\ldots,4.$$

Маємо

$$\begin{aligned}
&\lambda_1=\sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{5}+i\,\tfrac{\pi}{5}\right) && (k=0);\\
&\lambda_2=\sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{5}+i\,\tfrac{3\pi}{5}\right) && (k=1);\\
&\lambda_3=-\sqrt[5]{2} && (k=2);\\
&\lambda_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{5}-i\,\tfrac{3\pi}{5}\right) && (k=3);\\
&\lambda_5=\sqrt[5]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{5}-i\,\tfrac{\pi}{5}\right) && (k=4).
\end{aligned}$$

Дійснозначну ФСР утворюють функції
$y_1=e^{-\sqrt[5]{2}}$;
$y_2=e^{\sqrt[5]{2}\,x\cos\frac{\pi}{5}}\sin\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{\pi}{5}\right)$; $y_3=e^{\sqrt[5]{2}\cos\frac{\pi}{5}}\cos\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{\pi}{5}\right)$;
$y_4=e^{\sqrt[5]{2}\,x\cos\frac{3\pi}{5}}\sin\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{3\pi}{5}\right)$; $y_5=e^{\sqrt[5]{2}\cos\frac{3\pi}{5}}\cos\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{3\pi}{5}\right)$.

Тому загальним розв'язком вихідного рівняння є

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_5y_5,\quad C_i\in\mathbb{R}.$$

Відповідь. $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_5y_5,\quad C_i\in\mathbb{R}$, де
$y_1=e^{-\sqrt[5]{2}}$;
$y_2=e^{\sqrt[5]{2}\,x\cos\frac{\pi}{5}}\sin\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{\pi}{5}\right)$; $y_3=e^{\sqrt[5]{2}\cos\frac{\pi}{5}}\cos\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{\pi}{5}\right)$;
$y_4=e^{\sqrt[5]{2}\,x\cos\frac{3\pi}{5}}\sin\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{3\pi}{5}\right)$; $y_5=e^{\sqrt[5]{2}\cos\frac{3\pi}{5}}\cos\left(\sqrt[5]{2}\,x\sin\frac{3\pi}{5}\right)$.

18. Розв'язати рівняння

$$y'''-6y''+9y'=xe^{3x}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=0$ має корені $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=3$.
Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\overline{y}=C_1e^{0\cdot x}+(C_2x+C_3)e^{3x}=C_1+(C_2x+C_3)e^{3x},\quad C_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,3).$$

Оскільки права частина рівняння є квазімногочленом, а $\sigma=3$ є коренем характеристичного рівняння кратності $k=2$, то частинний розв'язок y_1 неоднорідного рівняння знайдемо у вигляді $y=x^sQ_m(x)e^{\sigma x}$, де $s=2$, $m=1$, $\sigma=3$, тобто $\widetilde{y}=x^2(Ax+B)e^{3x}$.

Підставивши $\widetilde{y}$ до вихідного рівняння і порівнюючи відповідні коефіцієнти, дістанемо:

0	$\widetilde{y}=(Ax^3+Bx^2)\,e^{3x}$;
$+9$	$\widetilde{y}'=(3Ax^3+(3A+3B)\,x^2+2Bx)\,e^{3x}$;
-6	$\widetilde{y}''=(9Ax^3+(18A+9B)\,x^2+(6A+12B)\,x+2B)\,e^{3x}$;
1	$\widetilde{y}'''=(27Ax^3+(81A+27B)\,x^2+(54A+54B)\,x+$ $+(6A+18B))\,e^{3x}$;

x^3	$0=0;$
x^2	$0=0;$
x^1	$18A=1 \Rightarrow \quad A=\frac{1}{18}$
x^0	$6A+6B=0 \Rightarrow \quad A=-B.$

Таким чином, маємо $A=\frac{1}{18}$, $B=-\frac{1}{18}$. Отже, $\widetilde{y}=\frac{1}{18}x^2(x-1)e^{3x}$ – частинний розв'язок вихідного рівняння, а $y=\overline{y}+\widetilde{y}$ – його загальний розв'язок.

Відповідь. $y=C_1+(C_2x+C_3)e^{3x}+\frac{1}{18}x^2(x-1)e^{3x}$, $C_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,3)$.

19. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dot{x}=6x-y, \\ \dot{y}=3x+2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матричне рівняння відповідно до заданої системи:

$$\frac{dX^T}{dt}=X^T\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо характеристичне рівняння $\lambda^2-8\lambda+15=0$, коренями якого є $\lambda_1=3$, $\lambda_2=5$. Тому $A_J^T=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. З рівності $A_J^TS=SA^T$ знаходимо матрицю S:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad S=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $Z(t)$, має вигляд $Z(T)=\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}$, то $X^T(t)=Z(t)S=\begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{3t} \\ e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix}$. Отже, $X(t)=\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{5t} \\ 3e^{3t} & e^{5t} \end{pmatrix}$ і $x=C_1e^{3t}+C_2e^{5t}$, $y=3e^{3t}C_1+e^{5t}C_2$ – загальний розв'язок заданої ЛОС.

Відповідь. $x=C_1e^{3t}+C_2e^{5t}$, $y=3e^{3t}C_1+e^{5t}C_2$.

20. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-x-2y+2e^{-t}, \\ \frac{dy}{dt}=3x+4y+e^{-t}. \end{cases}$$

Розв'язання. Проінтегруємо задану систему методом варіації довільних сталих. Маємо загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x}=C_1e^t+2C_2e^{2t}; \\ \bar{y}=-C_1e^t-3C_2e^{2t}. \end{array} \right.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи знайдемо у вигляді

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{x}=C_1(t)e^t+2C_2(t)e^{2t}; \\ \tilde{y}=-C_1(t)e^t-3C_2(t)e^{2t}. \end{array} \right.$$

Функції $C_1(t)$ і $C_2(t)$ знаходимо з системи

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t+2C_2'(t)e^{2t}=2e^{-t}; \\ -C_1'(t)e^t-3C_2'(t)e^{2t}=e^{-t}. \end{cases}$$

Дістанемо $C_1'(t) = 8e^{-2t}$, $C_2'(t) = -3e^{-3t}$. Звідки маємо, наприклад, $C_1(t) = -4e^{-2t}$, $C_2(t) = e^{-3t}$. Тому шуканий частинний розв'язок вихідної системи можна подати у вигляді

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{x} = -2e^{-t}; \\ \tilde{y} = e^{-t}. \end{array}\right.$$

Таким чином, ми отримали загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} x = -2e^{-t} + C_1e^t + 2C_2e^{2t}; \\ y = e^{-t} - C_1e^t - 3C_2e^{2t}. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{l} x = -2e^{-t} + C_1e^t + 2C_2e^{2t}; \\ y = e^{-t} - C_1e^t - 3C_2e^{2t}. \end{array}\right.$

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

1. $\begin{cases} \int\limits_0^1 (x'(t))^2 dt \to inf \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \end{cases}$

2. $\int\limits_0^1 ((x'(t))^2 - x(t))dt + x^2(1) \to \inf$

3. $\begin{cases} \int\limits_0^1 (x'(t))^2 dt \to \inf \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \\ \int\limits_0^1 x(t)dt = 0 \end{cases}$

4. Довести, що в даній задачі Лагранжа єдина допустима екстремаль не доставляє слабкого локального мінімуму:

$$\begin{cases} J(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2(t) - x^2(t))\, dt \to \inf, \\ x(0) = 0,\, x(\frac{3\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Складемо рівняння Ейлера для даного функціоналу

$$\ddot{x} + x = 0,$$

розв'язуючи яке отримаємо загальний розв'язок

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t,\ C_1, C_2 = \text{const}\,.$$

Для виокремлення допустимих екстремалей з множини всіх розв'язків рівняння Ейлера використаємо дані крайові умови $x(0) = x(\frac{3\pi}{2}) = 0$, в результаті отримаємо єдину допустиму екстремаль $\widehat{x}(t) = 0$. Покажемо, що дана екстремаль не доставляє слабкого локального мінімуму, тобто $\widehat{x} \notin \text{wlocmin}$.

Розглянемо послідовність функцій $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin\frac{2t}{3}$. Функції з цієї послідовності є допустимими та, крім того, $x_n \to \widehat{x}$ при $n \to \infty$ в метриці простору $C^1([0, \frac{3\pi}{2}])$. Але

$$J(x_n(\cdot)) = \frac{1}{n^2}\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{4}{9}\cos^2\frac{2t}{3} - \sin^2\frac{2t}{3}\right)dt = \frac{1}{n^2}\frac{3\pi}{4}\left(\frac{4}{9} - 1\right) < 0 = J(\widehat{x}(\cdot)).$$

Отже, значення функціоналу на послідовності функцій x_n менше за значення функціоналу на допустимій екстремалі, тобто $\widehat{x} \notin \text{wlocmin}$.

Відповідь: $\widehat{x}(t) = 0 \notin \text{wlocmin}$.

5. Розв'язати задачу Больца

$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int\limits_0^1(\dot{x}^2 + x^2)dt - 2x(1)\operatorname{sh}1 \to \inf.$

Розв'язання.

Рівняння Ейлера для даної задачі має вигляд $\ddot{x} - x = 0$, загальним розв'язком якого є сім'я функцій $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$. З умов трансверсальності визначимо сталі C_1 та C_2, які відповідають допустимій екстремалі, отже,

$$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \Leftrightarrow 2(C_1 - C_2) = 0,$$

$$L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)} \Leftrightarrow 2(C_1e - C_2e^{-1}) = 2\operatorname{sh}1,$$

звідки випливає, що $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. Таким чином, ми отримали єдину допустиму екстремаль $\widehat{x}(t) = \operatorname{ch}t$.

Дослідимо, чи доставляє знайдена допустима екстремаль мінімум досліджуваній задачі.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}((\widehat{x} + h)(\cdot)) - \mathcal{B}(\widehat{x}(\cdot)) = \\
&= \int\limits_0^1\Big((\dot{\widehat{x}}(t) + \dot{h}(t))^2 + \widehat{x}(t) + h(t)\Big)dt - 2(\widehat{x}(1) + h(1))\operatorname{sh}1 - \int\limits_0^1(\dot{\widehat{x}}^2(t) + \widehat{x}(t))dt + 2\widehat{x}(1)\operatorname{sh}1 = \\
&\qquad = 2\int\limits_0^1(\dot{h}(t)\operatorname{sh}t + h(t)\operatorname{ch}t)dt + \int\limits_0^1(\dot{h}^2(t) + h^2(t))dt - 2h(1)\operatorname{sh}1 \geq \\
&\qquad\qquad \geq 2h(t)\operatorname{sh}t\big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 h(t)\operatorname{ch}t\,dt + 2\int\limits_0^1 h(t)\operatorname{ch}t\,dt - 2h(1)\operatorname{sh}1 = 0.
\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає, що $\widehat{x}(t) = \operatorname{ch}t \in \text{absmin}$.

Відповідь. $\widehat{x}(t) = \operatorname{ch}t \in \text{absmin}$.

6. Розв'язати ізопериметричну задачу

$$\begin{cases} \mathcal{I}(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\pi} \dot{x}^2(t)dt \to \inf, \\ x(0) = 1,\ x(\pi) = -1, \\ \int\limits_0^{\pi} x(t)\cos t\, dt = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання.

Лагранжиан для даної задачі має вигляд $\mathcal{L} = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x \cos t$ і відповідне рівняння Ейлера $2\lambda_0 \ddot{x} - \lambda_1 \cos t = 0$.

Нехай $\lambda_0 = 0$, але тоді й $\lambda_1 = 0$, що неможливо. Тому, покладаючи $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, отримаємо рівняння $\ddot{x} - \lambda_1 \cos t = 0$, загальним розв'язком якого є сім'я функцій $x(t) = -\lambda_1 \cos t + C_1 t + C_2$. З крайових умов знаходимо:

$$x(0) = -\lambda_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1 + \lambda_1,$$

$$x(\pi) = 2\lambda_1 + C_1\pi + 1 = -1 \Rightarrow C_1 = -\frac{2}{\pi}(1 + \lambda_1).$$

Далі з умови $\int\limits_0^{\pi} x(t)\cos t\, dt = \frac{\pi}{2}$ визначаємо λ_1:

$$\int\limits_0^{\pi} x(t)\cos t\, dt = \lambda_1 \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}t - \cos t\right)\cos t\, dt + \int\limits_0^{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}t\right)\cos t\, dt =$$

$$= \lambda_1 \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{\pi} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1,$$

звідки випливає, що існує єдина допустима екстремаль $\widehat{x}(t) = \cos t$.

Шляхом безпосередньої перевірки покажемо, що знайдена допустима екстремаль доставляє в задачі абсолютний мінімум. Візьмемо функцію $h(t) \in C^1([0,\pi])$ таку, що $h(0) = h(\pi) = 0$ і $\int\limits_0^{\pi} h(t)\cos t\, dt = 0$. Тоді

$$\mathcal{I}((\widehat{x} + h)(\cdot)) - \mathcal{I}(\widehat{x}(\cdot)) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(\dot{\widehat{x}}(t) + \dot{h}(t)\right)^2 dt - \int\limits_0^{\pi} \dot{\widehat{x}}^2(t)dt = \int\limits_0^{\pi} 2\dot{\widehat{x}}(t)\dot{h}(t)dt + \int\limits_0^{\pi} \dot{h}^2(t)dt \geq$$

$$\geq 2\left(\dot{x}(t)h(t)\big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \ddot{\widehat{x}}(t)h(t)dt\right) = 2\int\limits_0^{\pi} h(t)\cos t\, dt = 0.$$

Отже, з останньої нерівності випливає, що $\widehat{x}(t) = \cos t \in \text{absmin}$.

Відповідь. $\widehat{x}(t) = \cos t \in \text{absmin}$.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. В урні знаходяться 4 кулі, про які відомо, що вони або білі або чорні. В урну поклали білу кулю і після перемішування навмання обрали кулю. Віна виявилась білою. Яка ймовірність того, що серед тих, які залишились, рівно одна біла ?

2. Випадкова величина ξ має щільність $5\exp(-10|x|)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію, функцію розподілу ξ, $P\{\xi < 0\}$.

3. У двох урнах знаходиться відповідно по n_1 і n_2 білих куль, і по m_1 і m_2 чорних куль. З першої урни навмання обираються 2 кулі, а з другої – 1 куля. Потім з цих 3 куль випадково обирається одна. Яка ймовірність того, що ця куля біла ?

4. Випадкова величина ξ має функцію розподілу $F(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини : a) $\exp(\xi)$, b) $a\xi + b$.

5. Кидають 18 гральних костей. Скільки існує способів, при яких випадають : a) всі грані кості, b) кожна грань по 3 рази?

6. З 18 стрільців 8 влучають у мішень з ймовірністю 0.9, 6 – з ймовірністю 0.7, і 4 – з ймовірністю 0.5. Навмання обраний стрілець вистрілив, але у мішень не влучив. До якої з груп по влучності найімовірніше належить цей стрілець ?

7. Потік з n однакових частинок реєструється системою з m датчиків. Частинки розподіляються по датчиках навмання. Датчики вважаються різними. В кожен може потрапити довільна кількість частинок. Всі розподіли частинок по датчикам вважаємо рівноімовірними. Яка ймовірність того, що рівно k датчиків зареєструють наявність частинок ?

8. На відрізку $[0, 6]$ навмання беруть дві точки. Знайти функцію розподілу випадкової величини ξ, яка дорівнює відстані між цими точками.

9. Стрільці $A1, A2, A3, A4$ влучають у мішень відповідно з ймовірностями p_1, p_2, p_3, p_4. Стрільці зробили залп і виявили в мішені 3 влучання. Знайти ймовірність того, що одне з них зробив $A1$.

10. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Знайти функцію розподілу, щільність випадкової величини $\zeta = \frac{1}{\xi^2}$.

11. Прилад складається з 5 вузлів, в i-ому вузлі міститься n_i елементів. Вихід з ладу одного елемента спричиняє відмову всього вузла. Прилад вийде з ладу, якщо зламається перший вузол і один з тих, що залишились. Елементи виходять з ладу незалежно, їх надійність дорівнює p. Знайти надійність приладу.

12. Знайти коефіцієнт кореляції між кількістю випадання двійки і трійки при 10 підкидуваннях гральної кості.

13. З 12 білетів, які пронумеровані від 1 до 12, без повернення обирають три білети. Яка ймовірність того, що у вибраних білетів : a) всі номери парні, b) точно один номер парний ?

14. Знайти ймовірність того, що дні народження 6 чоловік, які обираються навмання з числа 12 місяців, випадуть на різні місяці року.

15. В двох урнах містяться відповідно n_1 і n_2 білих куль, і m_1 і m_2 чорних. Навмання узяту в першій урні кулю переклали в другу. Яка ймовірність того, що куля, вибрана після цього навмання з другої урни, виявиться білою ?

16. В квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1]$ навмання кинуто точку (a, b). Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + 2ax + b = 0$ дійсні.

17. На колі одиничного радіуса навмання вибрані точки A, B, C. Яка ймовірність того, що трикутник ABC – гострокутний?

18. Випадкова величина X має функцію розподілу F. Знайти функції розподілу випадкових величин: a) e^X, b) $|X|$.

19. Кидають 12 гральних костей. Скільки існує способів, при яких випадають: a) всі грані кості; b) непарні грані по 2 рази, а парні – по чотири? 20. Прилад складається з 5 вузлів, в i-му вузлі міститься $n(i)$ елементів. Вихід з ладу одного елемента спричиняє відмову всього вузла. Прилад вийде з ладу, якщо зламається перший вузол і один з тих, що залишились. Елементи виходять з ладу незалежно, їх надійність дорівнює p. Знайти надійність приладу.

21. Випадкові величини X і Y незалежні та мають однаковий геометричний розподіл. Обчислити при всіх n і k ймовірність $P(\{X = k \mid X + Y = n\})$.

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

1. Випадкова величина має логнормальний розподіл з параметрами (a, σ^2), якщо $\eta = \ln \xi$ має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$. Знайти достатню статистику для векторного параметра $\theta = (a, \sigma^2)$.

2. Нехай $= (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з рівномірним розподілом спостережень на відрізку $[0; 2\theta]$. На який коефіцієнт треба домножити статистику $T(X) = \max\limits_{1 \le i \le n} \xi_i - \min\limits_{1 \le i \le n} \xi_i$, щоб отримати незміщену оцінку параметра θ ?

3. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка з розподілом Паскаля: $P\{\xi = k\} = \frac{\theta^k}{(1+\theta)^{k+1}}$, $k = 0, 1, \ldots$; $\theta > 0$. Показати, що статистика $\hat{\theta}_n = \bar{\xi}$ є незміщеною та ефективною оцінкою параметра θ.

4. Задана щільність рівномірного розподілу $f(x, \theta) = \begin{cases} 0, & x \notin [-\theta, \theta], \\ \frac{1}{2\theta}, & x \in [-\theta, \theta], \end{cases}$ $\theta > 0$. Знайти оцінку методу моментів параметра θ.

5. Методом максимальної вірогідності за кратною вибіркою $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ знайти оцінку невідомого параметра θ розподілу Паскаля $P\{\xi = k\} = \theta^k (1 + \theta)^{-k-1}$, $k = 0, 1, \ldots$; $\theta > 0$.

6. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ вибірка з нормального розподілу $N(1, \sigma^2)$. Чи є оцінка $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - 1)^2$ ефективною оцінкою параметра σ^2?

7. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – вибірка з розподілу Ерланга з параметрами m та λ:

$$f(x, \lambda, m) = \begin{cases} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\lambda x\}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Оцінити параметри m та λ за методом моментів.

8. Знайти функцію вірогідності та достатні статистики для вибірки з розподілу Ерланга з параметрами m та λ:

$$f(x, \lambda, m) = \begin{cases} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\lambda x\}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

9. На відрізок $[0; 1]$ навмання кидають точку, яка ділить відрізок на дві частини, і фіксують її координату . Експеримент проведено 10 разів, і при цьому отримано 10 незалежних спостережень випадкової величини : 0,33; 0,93; 0,62; 0,38; 0,65; 0,53; 0,81; 0,07; 0,61; 0,04. Оцінити за вибіркою математичне сподівання площі круга з радіусом, що дорівнює більшій частині відрізка $[0; 1]$.

10. Нехай $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – кратна вибірка спостережень з рівномірним розподілом на відрізку $[0; 2\theta]$. На який коефіцієнт треба домножити статистику $T(X) = \max\limits_{1 \le i \le n} \xi_i - \min\limits_{1 \le i \le n} \xi_i$, щоб отримати незміщену оцінку параметра θ?

11. Випадкова величина ξ має логнормальний розподіл з параметрами (a, σ^2), якщо $\eta = \ln \xi$ має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$. Знайти достатню статистику для векторного параметра $\theta = (a, \sigma^2)$.

12. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – вибірка з розподілу Ерланга з параметрами m і λ:

$$f(x, \lambda, m) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\lambda x\}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Оцінки параметри m та λ за методом моментів.

13. Методом максимальної вірогідності за кратною вибіркою $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ знайти оцінку невідомого параметра θ розподілу $P(\{\xi = m\}) = \dfrac{(\theta - 1)^m}{\theta^{m+1}}$, $\theta > 1$, $m = 0, 1, \ldots$

14. При підкиданні грального кубика отримали такі результати:

Цифра	1	2	3	4	5	6
Кількість появ	50	39	55	47	60	53

Чи можна за цими даними за критерієм χ^2 прийняти гіпотезу про симетричність грального кубика? (Вірогідний рівень $\alpha = 0,05$.)

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

1. Знайти образ області $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0\}$ при дробово-лінійному відображенні $\omega = \frac{z-i}{z+i}$.

2. Відобразити півплощину $\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z > 0\}$ з розрізом вздовж дуги кола $z = \exp(it), \ t \in [0, \alpha], (0 < \alpha < \pi)$ на верхню півплощину.

3. Знайти область, на яку функція Жуковського відображає круг $|z| < 1$ з розрізом вздовж відрізка $[a, 1], \ (0 < a < 1)$.

4. Відобразити область $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2, \ |z-1| > 1\}$ на верхню півплощину.

5. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в ряд Лорана в околах точок $z = 0, \ z = 1, \ z = \infty$; знайти область збіжності цих рядів та дати характеристику особливих точок.

6. Обчислити інтеграли по замкненим контурам з додатним напрямком обходу:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{\sin z}\,dz, \qquad \int\limits_{|z|=1} \cos\frac{1}{z}\,dz, \qquad \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 - z^3}\,dz, \qquad \int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^8+1}\,dz.$$

7. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2 - 2x + 5}\,dx.$$

АНАЛІТИЧНА І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ, ТОПОЛОГІЯ

1. Написати рівняння спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$, $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0, \\ 7y - z + 12 = 0 \end{cases}$ і знайти відстань між цими прямими.

2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,3,1)$ і перетинає прямі $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y + z + 4 = 0, \end{cases}$ та $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$.

3. Точка $A(2,-1)$ лежить на еліпсі з фокусом у точці $F(1,0)$, а відповідна цьому фокусу директриса задана рівнянням $2x - y - 10 = 0$. Скласти рівняння цього еліпса.

4. Знайти вісь параболи $x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 3 = 0$.

5. Звести загальне рівняння кривої другого порядку до найпростішого вигляду $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$;

6. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, яка проходить через точку $A(1,-2,1)$, якщо її віссю є пряма $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$.

7. Звести загальне рівняння поверхні другого порядку до найпростішого вигляду $xy + xz + yz = 0$.

8. Показати, що множини $\{(\mathbb{R}^2, \varphi)\}$ і $\{(\mathbb{R}^2, \psi)\}$, де
$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \xmapsto{\varphi} (2x_1 - 5x_2, x_1 - 3x_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \xmapsto{\psi} (x_1 - 2x_2, x_1 - 3x_2) \in \mathbb{R}^2,$$
є C^∞-атласами, що задають однакові C^∞-структури в $\mathbb{R}^2$.

9. Записати натуральні рівняння кривої $\vec{r}(t) = \{t, \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t\}$.

10. Знайти стичне коло кривої $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = x$ в точці $M(0, 0, 1)$.

11. Знайти стичну сферу кривої $\vec{r}(t) = \{e^t, e^t \cos t, e^t \sin t\}$ у довільній неособливій точці, яка не є точкою розпрямлення і точкою сплощення.

12. Знайти периметр і внутрішні кути криволінійного трикутника, обмеженого лініями $u = \pm v^2$, $v = 2$ на поверхні $\vec{r} = \{u \cos v, u \sin v, 2v\}$.

13. На параболоїді $z = 2xy$ знайти криві, які перетинають під прямим кутом його прямолінійні твірні однієї серії.

14. Обчислити геодезичну кривину лінії $u = \operatorname{sh} v$, $0 \leqslant v \leqslant v_0$, на гелікоїді $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$.

15. З'ясувати, чи є зв'язним топологічний простір $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 7\}$ з індукованою з $\mathbb{R}^2$ топологією. Відповідь обгрунтувати.

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1. Швидкість автомобілів в тунелі ϑ не більша 50км/год та пов'язана з щільністю потоку (кількістю машин на 1км шляху) співвідношенням $P = (\vartheta_0 - \vartheta)/z$, де $\vartheta_0 = 60$км/год, а z — рівномірно розподілена на відрізку $[1/2, 1]$ випадкова величина. Регулювання руху здійснюється вибором ϑ. Мета операції — збільшення потоку машин F через тунель (тобто їх щільності вийшовши з тунелю за 1год.) Знайти оптимальні в середньому стратегію та стратегію гарантованого ризику.

2. Відділ хімічної фірми виготовляє дві фарби: для внутрішніх 1 та зовнішніх робіт 2, використовуючи початкові продукти А та В, максимально можливі добові запаси яких 6т та 8т відповідно. Витрати А і В на 1т фарби 1 є 1 і 2 відповідно, а для 2 є 2 і 1 відповідно. Попит на фарбу 2 не перевищує попиту на фарбу 1 більше ніж на 1т, а попит на фарбу 2 не перевищує 2т на добу. Ціни 1т фарби 1 — 3000\$, фарби 2 — 2000\$. Формалізуючи задачу пошуку оптимального плану добового виробництва фарб, як задачу лінійного програмування та геометрично розв'язати її. (Ціль - максимізація доходу)

3. Розв'язати матричну гру двох осіб з платіжною матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ геометричним методом.

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

1. Знайти функції попиту на два товари для споживача, що застосовує неокласичний підхід до раціонального споживання з функцією корисності $V(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2, x_1,\ x_2 > 0$, $a_1, a_2 > 0$.

2. Фірма має виробничу функцію $F(K, L) = AK^a L^b$, $A > 0, a > 0, b > 0$ де K — капітал і L — праця, використані у виробництві, та орієнтована на максимізацію прибутку в довгостроковому періоді часу. Знайти функції попиту фірми на капітал і працю та функцію пропозиції фірми.