

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Кафедра геометрії

Укладач: доц. В. М. Бабич

ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ СУЧАСНОЇ ТОПОЛОГІЇ

Робоча навчальна програма дисципліни
циклу професійної підготовки фахівців
освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст»
для студентів I курсу заочної форми навчання
спеціальності 7.04020101 «Математика»

Затверджено
на засіданні кафедри геометрії,
протокол №__ від __.__.2011 р.
Завідувач кафедри
_____ проф. В. В. Кириченко

Затверджено
на засіданні вченої ради
механіко-математичного факультету,
протокол №__ від __.__.2011 р.
Декан мех.-мат. факультету
_____ проф. М. Ф. Городній

Робоча навчальна програма з дисципліни «Додаткові розділи сучасної топології». Укладач: кандидат фізико-математичних наук, доцент В'ячеслав Михайлович Бабич.

Лектор: к. ф.-м. н., доц. В. М. Бабич.

Погоджено
з науково-методичною комісією
механіко-математичного факультету,
протокол №__ від __.__.2011 р.
Голова НМК мех.-мат. факультету
_____ проф. О. О. Курченко

Вступ

Дисципліна «Додаткові розділи сучасної топології» для студентів заочної форми навчання спеціальності 7.04020101 «Математика» є дисципліною вільного вибору за пропозицією кафедри, що читається в I семестрі в обсязі 4 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS), і розрахована на 144 години занять. З них 22 години лекцій і 122 години самостійної роботи. Семестр закінчується іспитом.

Мета і завдання навчальної дисципліни «Додаткові розділи сучасної топології»: ознайомлення студентів з додатковими поняттями сучасної топології, зокрема теорій гомотопій та гомологій, оволодіння теоретичними положеннями та основними застосуваннями теорій гомотопій та гомологій в різних задачах математики, їх використання в подальших курсах з математики, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Предмет навчальної дисципліни «Додаткові розділи сучасної топології»: гомотопія, гомотопічна група, ланцюговий комплекс, симпліціальний комплекс, група гомологій, сингулярні гомології.

Вимоги до знань та вмінь студентів.

Студент повинен знати: основні та додаткові поняття теорій гомотопій та гомологій, зокрема: простір відображень, гомотопія, гомотопічний тип, стягнаний простір, ретракт, деформаційний ретракт, сильний деформаційний ретракт, гомотопічна група, гомоморфізм гомотопічних груп, індукований неперервним відображенням топологічних просторів, фундаментальна група, однозв'язний простір, степінь відображення, ланцюговий комплекс, симпліціальний комплекс, поліедр, групи гомологій, сингулярні гомології.

Студент повинен вміти: будувати гомотопії неперервних відображень, перевіряти топологічний простір на стягнутість, працювати з ретрактами, обчислювати фундаментальні та гомотопічні групи топологічних просторів, перевіряти, чи є топологічний простір поліедром, обчислювати групи гомологій.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Навчальна дисципліна «Додаткові розділи сучасної топології» є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст» і використовується при вивченні поглиблених курсів з геометрії та топології.

Система контролю та оцінювання знань. Результати вивчення студентами навчальної дисципліни «Додаткові розділи сучасної топології» оцінюються за 100-бальною шкалою згідно з модульно-рейтинговою системою, яка складається з 2 модулів.

Модульний контроль.

I семестр

Змістовий модуль 1: 0 – 30 балів:

- активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи

(опрацювання лекційного матеріалу, виконання аудиторних і домашніх завдань): 0 – 10 балів;

- письмова модульна контрольна робота: 0 – 20 балів.

Змістовий модуль 2: 0 – 30 балів:

- активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи (опрацювання лекційного матеріалу, виконання аудиторних і домашніх завдань): 0 – 10 балів;
- письмова модульна контрольна робота: 0 – 20 балів.

Якщо за результатами модульно-рейтингового контролю студент отримав сумарну кількість балів за 2 змістові модулі, яка не перевищує 20 балів, то студент не допускається до іспиту.

Іспит: 0 – 40 балів.

Всього за семестр: 0 – 100 балів.

При цьому, сумарна кількість балів відповідає оцінці:

- 0–34 – «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- 35–59 – «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- 60–64 – «задовільно» («достатньо»);
- 65–74 – «задовільно»;
- 75–84 – «добре»;
- 85–89 – «добре» («дуже добре»);
- 90–100 – «відмінно».

Шкала відповідності

За 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою		
90–100	5	відмінно	зараховано
75–89	4	добре	
60–74	3	задовільно	
0–59	2	незадовільно	не зараховано

Навчально-тематичний план лекцій, практичних занять і самостійної роботи

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
I семестр				
Змістовий модуль 1				
Гомотопії				
1	Основні поняття топології	0	0	14
2	Операції на топологічних просторах	0	0	18
3	Топологічні властивості	0	0	14
4	Гомотопії	12	0	36
Модульна контрольна робота				5
Змістовий модуль 2				
Гомології				
5	Теорія гомологій	10	0	30
Модульна контрольна робота				5
Всього за семестр		22	0	122
Всього за курс		22	0	122

Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи

I семестр

Змістовий модуль 1

Гомотопії

Тема 1. Основні поняття топології.

Самостійна 14 год.

робота Топологічний простір. Порівняння топологій. Відкриті та замкнені множини. База. Критерій бази. Покриття. Передбаза. База та передбаза системи околів точки топологічного простору.

Внутрішність і замикання множини топологічного простору. Скрізь щільні множини. Ніде не щільні множини. Внутрішні точки. Точки дотику, граничні й ізольовані точки. Локально скінченні родини множин.

Відображення топологічних просторів. Неперервні відображення. Неперервність в термінах бази й передбази систем околів точки та її образу відповідно. Критерій неперервності. Композиція неперервних відображень. Відкриті та замкнені відображення. Композиція відкритих (замкнених) відображень. Критерій відкритості відображення. Критерій замкненості відображення. Гомеоморфізм. Критерій гомеоморфізму.

Література [3–6].

Тема 2. Операції на топологічних просторах.

Самостійна 18 год.

робота Ініціальна топологія. База та передбаза ініціальної топології. База та передбаза системи околів точки в ініціальній топології. Універсальна властивість. Транзитивність. Фінальна топологія. Відкриті та замкнені в фінальній топології множини. База та передбаза фінальної топології. Універсальна властивість. Транзитивність. Індукована топологія. Підпростір. Відкриті та замкнені в індукованій топології та в підпросторі множини.

Топологія насичених відкритих множин. Фактортопологія. Факторне відображення. Факторпростір. Відкрите та замкнене відношення еквівалентності. Підпростір відносно фактортопології. Звуження та продовження факторних відображень. Бази. Універсальна властивість. Факторизація. Факторпростір підпростору. Факторвідображення. Простір орбіт. Проективні простори.

Топологічний добуток. Тихоновська топологія. Внутрішність і замикання. Діагональний добуток відображень. Асоціативність і комутативність. Відображення з топологічного добутку. Прямий добуток відображень. Підпростір топологічного добутку. Факторпростір топологічного добутку.

Топологічна сума. Сума топологій. Розклад топологічного простору в топологічну суму. Асоціативність і комутативність. Внутрішність і замикання. Діагональна сума відображень. Пряма сума відображень. Відображення в топологічну суму. Дистрибутивність. Підпростір і факторпростір топологічної суми.

Література [3–6].

Тема 3. Топологічні властивості.

Самостійна 14 год.

робота Зв'язний топологічний простір. Критерій незв'язності. Зв'язна множина топологічного простору. Достатні умови зв'язності. Компоненти зв'язності. Образ зв'язного простору при неперервному відображенні. Зв'язність топологічного добутку. Шлях. Лінійно зв'язні простори та множини.

Потужнісні характеристики. Вага та щільність топологічного простору. Аксиоми зліченності. Ліндельфовість та квазікомпактність. Сепарабельність.

Відокремлюваність. Означення та приклади. Перша аксіома відокремлюваності. Хаусдорфовість. Третя та четверта аксіоми відокремлюваності. Компактність.

Література [3–6].

Тема 4. Гомотопії.

Лекція 1 Простір відображень. Гомотопія. Ретракт. — 2 год.

Простір неперервних відображень. Гомотопія неперервних відображень. Гомотопічний тип. Стягуваний простір. Продовження відображень. Ретракт. Деформаційний ретракт. Сильний деформаційний ретракт. Циліндр відображення.

Самостійна 6 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1, 2].

Лекція 2 Категорії та функтори. — 2 год.

Означення категорії. Приклади. Функтори. Природне перетворення функторів. Категорія функторів.

Самостійна 6 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1, 2].

Лекція 3 Функтори гомотопічних груп. — 2 год.

Гомотопічна група простору. Гомоморфізм гомотопічних груп, індукований неперервним відображенням топологічних просторів. Фундаментальна група. Однозв'язні простори.

Самостійна 6 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1, 2].

Лекція 4 Обчислення фундаментальних і гомотопічних груп деяких просторів. — 2 год.

Лінійчаті шляхи на поверхні та їх комбінаторні гомотопії. Комбінаторні апроксимації шляхів і гомотопій.

Самостійна 6 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1, 2].

- Лекція 5 Обчислення фундаментальних і гомотопічних груп деяких просторів. — 2 год.
Фундаментальна група кола. Фундаментальна група поверхні.
- Самостійна 6 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].
- Лекція 6 Обчислення фундаментальних і гомотопічних груп деяких просторів. — 2 год.
Топологічна інваріантність ойлерової характеристики поверхні. Деякі застосування. Степінь відображення. Гомотопічні групи конкретних просторів.
- Самостійна 6 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].
- Самостійна 5 год.
робота Модульна контрольна робота.

Типове завдання модульної контрольної роботи

1. Довести, що топологічний простір X стягуваний в тому й лише в тому разі, коли його тотожне відображення гомотопно сталому відображенню.
2. Довести, що коли топологічний простір X зв'язний і має той самий гомотопічний тип, що й топологічний простір Y , то Y також стягуваний.
3. Нехай X та Y — топологічні простори й A — підпростір простору X . Довести, що $A \times Y$ є ретрактом простору $X \times Y$ в тому й лише в тому разі, коли A — ретракт X .
4. Довести, що ретракт хаусдорфового простору замкнений.
5. Нехай $x \in \mathbb{R}^2$. Знайти коло в \mathbb{R}^2 , яке є сильним деформаційним ретрактом простору $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$.

Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 1

1. Простір неперервних відображень. Гомотопія неперервних відображень. Гомотопічний тип. Стягуваний простір. Продовження відображень. Ретракт. Деформаційний ретракт. Сильний деформаційний ретракт. Циліндр відображення.
2. Означення категорії. Приклади. Функтори. Природне перетворення функторів. Категорія функторів.
3. Гомотопічна група простору. Гомоморфізм гомотопічних груп, індукований неперервним відображенням топологічних просторів. Фундаментальна група. Однозв'язні простори.
4. Обчислення фундаментальних і гомотопічних груп деяких просторів. Лінійчаті шляхи на поверхні та їх комбінаторні гомотопії. Комбінаторні апроксимації шляхів і гомотопій. Фундаментальна група кола. Фундаментальна група

поверхні. Топологічна інваріантність ойлерової характеристики поверхні. Деякі застосування. Степінь відображення. Гомотопічні групи конкретних просторів.

Змістовий модуль 2

Гомології

Тема 5. Теорія гомологій.

Лекція 7 Гомології ланцюгових комплексів. — 2 год.
Гомології ланцюгових комплексів.

Самостійна 6 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].

Лекція 8 Групи гомологій симпліціальних комплексів. — 2 год.
Симпліціальні комплекси та поліедри. Гомології симпліціальних комплексів і поліедрів.

Самостійна 6 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].

Лекція 9 Групи гомологій симпліціальних комплексів. — 2 год.
Обчислення гомологій конкретних поліедрів.

Самостійна 6 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].

Лекція 10 Сингулярна теорія гомологій. — 2 год.
Групи сингулярних гомологій.

Самостійна 6 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].

Лекція 11 Сингулярна теорія гомологій. — 2 год.
Властивості груп сингулярних гомологій.

Самостійна 6 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].

Самостійна 5 год.
робота Модульна контрольна робота.

Типове завдання модульної контрольної роботи

1. Довести, що поліедр є нормальним простором.
2. Довести, що симпліціальний комплекс K скінченний тоді й лише тоді, коли поліедр $|K|$ компактний.

3. Довести, що сфера S^n є поліедром, і задати її розбиття на криволінійні симплекси.

4. Показати, що $H_k(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z})$ ізоморфна \mathbb{Z} при $k = 0$, \mathbb{Z}_2 при $k = 1$ і 0 при $k > 1$.

Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 2

1. Гомології ланцюгових комплексів.
2. Симпліціальні комплекси та поліедри. Групи гомологій симпліціальних комплексів. Обчислення гомологій конкретних поліедрів.
3. Групи сингулярних гомологій. Властивості груп сингулярних гомологій.

Перелік питань, які виносяться на іспит

1. Простір неперервних відображень. Гомотопія неперервних відображень. Гомотопічний тип. Стягуваний простір. Продовження відображень. Ретракт. Деформаційний ретракт. Сильний деформаційний ретракт. Циліндр відображення.

2. Означення категорії. Приклади. Функтори. Природне перетворення функторів. Категорія функторів.

3. Гомотопічна група простору. Гомоморфізм гомотопічних груп, індукований неперервним відображенням топологічних просторів. Фундаментальна група. Однозв'язні простори.

4. Обчислення фундаментальних і гомотопічних груп деяких просторів. Лінійчаті шляхи на поверхні та їх комбінаторні гомотопії. Комбінаторні апроксимації шляхів і гомотопій. Фундаментальна група кола. Фундаментальна група поверхні. Топологічна інваріантність ойлерової характеристики поверхні. Деякі застосування. Степінь відображення. Гомотопічні групи конкретних просторів.

5. Гомології ланцюгових комплексів.

6. Симпліціальні комплекси та поліедри. Групи гомологій симпліціальних комплексів. Обчислення гомологій конкретних поліедрів.

7. Групи сингулярних гомологій. Властивості груп сингулярних гомологій.

Рекомендована література

а) основна:

1. Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко. Введение в топологию: Учеб. пособие. — 2-е изд., доп. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 416 с.
2. Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. — М.: Мир, 1983. — 304 с.

б) додаткова:

3. Н. С. Синюков, Т. И. Матвеевко. Топология. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. — 264 с.
4. M. G. Murdeshwar. General Topology. — New Age International Pvt Ltd Publishers, 2008. — 386 p.
5. Р. Энгелькинг. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.
6. Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян. Общая топология: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979. — 336 с.

Зміст

Вступ	3
Мета і завдання навчальної дисципліни	3
Предмет навчальної дисципліни	3
Вимоги до знань та вмінь студентів.	3
Місце в структурно-логічній схемі спеціальності.	3
Система контролю та оцінювання знань.	3
Навчально-тематичний план лекцій, практичних занять і самостійної роботи	5
Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи	6
<i>I семестр</i>	6
Змістовий модуль 1. Гомотопії	6
Тема 1. Основні поняття топології	6
Тема 2. Операції на топологічних просторах	6
Тема 3. Топологічні властивості	7
Тема 4. Гомотопії	7
Типове завдання модульної контрольної роботи	8
Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 1	8
Змістовий модуль 2. Гомології	9
Тема 5. Теорія гомологій	9
Типове завдання модульної контрольної роботи	9
Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 2	10
Перелік питань, які виносяться на іспит	10
Рекомендована література	11