

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Кафедра геометрії

Укладач: доц. В. М. Бабич

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

Робоча навчальна програма дисципліни
циклу професійної підготовки фахівців
освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
для студентів II курсу денної форми навчання
спеціальності 6.040202 «Механіка»

Затверджено
на засіданні кафедри геометрії,
протокол №__ від __.__.2011 р.
Завідувач кафедри
_____ проф. В. В. Кириченко

Затверджено
на засіданні вченої ради
механіко-математичного факультету,
протокол №__ від __.__.2011 р.
Декан мех.-мат. факультету
_____ проф. М. Ф. Городній

Робоча навчальна програма з дисципліни «Диференціальна геометрія та тензорний аналіз». Укладач: кандидат фізико-математичних наук, доцент В'ячеслав Михайлович Бабич.

Лектор: к. ф.-м. н., доц. В. М. Бабич.

Викладач: к. ф.-м. н., доц. В. М. Бабич.

Погоджено
з науково-методичною комісією
механіко-математичного факультету,
протокол № ____ від _____.____.2011 р.
Голова НМК мех.-мат. факультету
_____ проф. О. О. Курченко

Вступ

Дисципліна «Диференціальна геометрія та тензорний аналіз» для студентів денної форми навчання спеціальності 6.040202 «Механіка» є базовим нормативним курсом, що читається в III семестрі в обсязі 5 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS), і розрахована на 180 годин занять. З них 51 година лекцій, 34 години практичних занять і 95 годин самостійної роботи. Семестр закінчується іспитом.

Мета і завдання навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія та тензорний аналіз»: ознайомлення студентів з основними поняттями диференціальної геометрії та тензорного аналізу, оволодіння теоретичними положеннями та основними застосуваннями диференціальної геометрії та тензорного аналізу в різних задачах математики, їх використання в подальших курсах з математики, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Предмет навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія та тензорний аналіз»: крива, поверхня, параметризація, дотик, тензор.

Вимоги до знань та вмінь студентів.

Студент повинен знати: основні поняття диференціальної геометрії та тензорного аналізу, зокрема: вектор-функція, крива, поверхня, параметризація, еквівалентність та локальна еквівалентність параметризацій, регулярна крива та поверхня, елементарна крива та поверхня, дотик кривих та поверхонь, довжина дуги, натуральна параметризація, тригранник Френе, кривина, скрут, стичне коло, стична сфера, натуральні рівняння кривої, дотична площина та нормаль, перша та друга квадратичні форми, нормальний переріз, нормальна кривина, головні напрями та головні кривини, повна та середня кривина, тип точок поверхні, геодезична кривина, лінії кривини, асимптотичні, геодезичні лінії на поверхні, тензор.

Студент повинен вміти: виконувати операції диференціального числення з вектор-функціями, задавати криву та поверхню різними способами, виконувати заміну параметра в параметризаціях, перевіряти параметризації на (локальну) еквівалентність, обчислювати довжину дуги, записувати натуральну параметризацію, знаходити елементи тригранника Френе, рахувати кривину та скрут, записувати натуральні рівняння, знаходити стичне коло та стичну сферу кривої, застосовувати формули Серре-Френе при розв'язуванні задач, визначати тип особливих точок плоскої кривої, знаходити дотичну площину та нормаль, першу та другу квадратичні форми, елементи внутрішньої геометрії, нормальну кривину, головні напрями та головні кривини, повну та середню кривини, лінії кривини, асимптотичні лінії, визначати тип точок поверхні, рахувати символи Кристофеля та геодезичну кривину лінії на поверхні, знаходити компоненти тензора при заміні криволінійних координат, виконувати операції з тензорами.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Навчальна дисципліна «Диференціальна геометрія та тензорний аналіз» є складовою циклу про-

фесійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» і використовується при вивченні нормативних курсів «Диференціальні рівняння», «Теоретична механіка», «Математична фізика» та інших.

Система контролю та оцінювання знань. Результати вивчення студентами навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія та тензорний аналіз» оцінюються за 100-бальною шкалою згідно з модульно-рейтинговою системою, яка складається з 2 модулів.

Модульний контроль.

III семестр

Змістовий модуль 1: 0 – 30 балів:

- активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи (опрацювання лекційного матеріалу, виконання аудиторних і домашніх завдань): 0 – 10 балів;
- письмова модульна контрольна робота: 0 – 20 балів.

Змістовий модуль 2: 0 – 30 балів:

- активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи (опрацювання лекційного матеріалу, виконання аудиторних і домашніх завдань): 0 – 10 балів;
- письмова модульна контрольна робота: 0 – 20 балів.

Якщо за результатами модульно-рейтингового контролю студент отримав сумарну кількість балів за 2 змістові модулі, яка не перевищує 20 балів, то студент не допускається до іспиту.

Іспит: 0 – 40 балів.

Всього за семестр: 0 – 100 балів.

При цьому, сумарна кількість балів відповідає оцінці:

- 0–34 – «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- 35–59 – «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- 60–64 – «задовільно» («достатньо»);
- 65–74 – «задовільно»;
- 75–84 – «добре»;
- 85–89 – «добре» («дуже добре»);
- 90–100 – «відмінно».

Шкала відповідності

За 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою		
90–100	5	відмінно	зараховано
75–89	4	добре	
60–74	3	задовільно	
0–59	2	незадовільно	не зараховано

Навчально-тематичний план лекцій, практичних занять і самостійної роботи

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
III семестр				
Змістовий модуль 1				
Теорія кривих				
1	Теорія кривих	20	14	41
Модульна контрольна робота		2		
Змістовий модуль 2				
Теорія поверхонь. Тензорний аналіз				
2	Теорія поверхонь	20	12	38
3	Тензорний аналіз	7	8	16
Модульна контрольна робота		2		
Всього за семестр		51	34	95
Всього за курс		51	34	95

Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи

III семестр

Змістовий модуль 1

Теорія кривих

Тема 1. Теорія кривих.

- Лекція 1 Вектор-функція скалярного аргументу. — 2 год.
Означення вектор-функції. Границя, неперервність, похідна вектор-функції.
Розклад вектор-функції в ряд Тейлора.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 2 Крива та її рівняння. Заміна параметра. — 2 год.
Загальне, векторно-параметричне, параметричні та канонічне рівняння кривої.
Параметризація. Еквівалентні та локально еквівалентні параметризації.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 3 Регулярні криві. Довжина дуги кривої. — 2 год.
Регулярні та гладкі криві. Звичайні та особливі точки. Елементарна крива, її властивості. Теорема про вигляд регулярної кривої в околі точки. Теорема про локальну еквівалентність регулярних параметризацій кривої. Довжина дуги кривої.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 4 Натуральна параметризація кривої. Тригранник Френе. — 2 год.
Означення натуральної параметризації. Необхідна й достатня умова натуральності параметризації. Теорема про локальну еквівалентність натуральних параметризацій кривої. Зміна початку та напряму відрахунку натурального параметра кривої. Дотична кривої. Стична площина кривої. Тригранник Френе. Орти дотичної, головної нормалі та бінормалі.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 5 Кривина та скрут кривої. — 2 год.
Означення кривини. Теорема про кривину кривої. Необхідна й достатня умова належності кривої прямій. Означення абсолютного скриту. Теорема про абсолютний скрут кривої. Скрут кривої. Необхідна й достатня умова належності кривої площині.

- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 6 Формули Серре-Френе. Натуральні рівняння кривої. — 2 год.
Формули Серре-Френе. Натуральні рівняння кривої. Теорема про існування єдиної з точністю до розташування у просторі кривої з даними кривиною і скрутом.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 7 Вигляд кривої в околі звичайної точки. — 2 год.
Вигляд кривої в околі звичайної точки.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 8 Дотик кривих. — 2 год.
Теорема про необхідні й достатні умови дотику кривих.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 9 Стичне коло. Дотик кривої та поверхні. — 2 год.
Стичне коло. Дотик кривої та поверхні.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 10 Стична сфера. Особливі точки плоскої кривої. — 2 год.
Стична сфера. Особливі точки плоскої кривої.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Практичне Вектор-функція скалярного аргументу. — 2 год.
заняття 1 Вектор-функція скалярного аргументу.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне Крива та її рівняння. Заміна параметра. — 2 год.
заняття 2 Складання загальних, векторно-параметричних, параметричних та канонічних рівнянь кривої. Перевірка параметризацій на еквівалентність та локальну еквівалентність.

- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне 3
заняття Натуральна параметризація кривої. Тригранник Френе. — 2 год.
Обчислення довжини дуги кривої. Знаходження натуральної параметризації кривої. Знаходження ребер і граней тригранник Френе і ортів дотичної, головної нормалі та бінормалі.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне 4
заняття Кривина та скрут кривої. Натуральні рівняння кривої. — 2 год.
Обчислення кривини та скруту кривої. Знаходження натуральних рівнянь кривої.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне 5
заняття Формули Серре-Френе. — 2 год.
Різні задачі на застосування формул Серре-Френе.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне 6
заняття Дотик кривих та кривої з поверхнею. Стичне коло та стична сфера — 2 год.
Знаходження порядку дотику кривих та кривої з поверхнею. Знаходження стичного кола та стичної сфери.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне 7
заняття Особливі точки плоскої кривої. — 2 год.
Визначення типу особливої точки плоскої кривої та знаходження дотичних у цій точці.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Лекція 11 Модульна контрольна робота. — 2 год.

Типове завдання модульної контрольної роботи

1. У точці $(1, 1, 1)$ кривої $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$ знайти рівняння ребер і граней тригранника Френе, орти дотичної, головної нормалі та бінормалі, кривину, скрут і стичне коло.

2. Для плоскої кривої $x^2 - y^3 = 0$ знайти особливі точки, визначити їх характер та записати в цих точках рівняння дотичних, якщо вони існують.
3. Визначити порядок дотику кривих $\gamma_1 : \vec{r}_1(t) = (1 + \cos t, \sin t, 0)$ і $\gamma_2 : \vec{r}_2(t) = (1 + \cos t, -1, 1 - \sin t)$ у точці $P(1, -1, 0)$.
4. Доведіть або спростуйте твердження: похідна скалярного добутку двох диференційовних вектор-функцій дорівнює скалярному добутку їх похідних.
5. Доведіть або спростуйте твердження: при зміні напрямку відрахунку довжини дуги регулярної кривої класу C^2 без точок розпрямлення орт бінормалі у кожній точці змінюється на протилежний.

Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 1

1. Вектор-функція скалярного аргументу. Границя, неперервність, похідна вектор-функції. Розклад вектор-функції в ряд Тейлора.
2. Крива та її рівняння. Загальне, векторно-параметричне, параметричні та канонічне рівняння кривої. Параметризація. Заміна параметра. Еквівалентні та локально еквівалентні параметризації.
3. Регулярні та гладкі криві. Звичайні та особливі точки. Елементарна крива, її властивості. Теорема про вигляд регулярної кривої в околі точки. Теорема про локальну еквівалентність регулярних параметризацій кривої.
4. Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація кривої. Означення натуральної параметризації. Необхідна й достатня умова натуральності параметризації. Теорема про локальну еквівалентність натуральних параметризацій кривої. Зміна початку та напрямку відрахунку натурального параметра кривої.
5. Дотична кривої. Стична площина кривої. Тригранник Френе. Орти дотичної, головної нормалі та бінормалі.
6. Кривина та скрут кривої. Означення кривини. Теорема про кривину кривої. Необхідна й достатня умова належності кривої прямій. Означення абсолютного скруту. Теорема про абсолютний скрут кривої. Скрут кривої. Необхідна й достатня умова належності кривої площині.
7. Формули Серре-Френе. Натуральні рівняння кривої. Теорема про існування єдиної з точністю до розташування у просторі кривої з даними кривиною і скрутом.
8. Вигляд кривої в околі звичайної точки.
9. Дотик кривих. Теорема про необхідні й достатні умови дотику кривих. Стичне коло.
10. Дотик кривої та поверхні. Стична сфера.
11. Особливі точки плоскої кривої.

Змістовий модуль 2

Теорія поверхонь. Тензорний аналіз

Тема 2. Теорія поверхонь.

- Лекція 12 Поверхня та її рівняння. Заміна параметра. — 2 год.
Загальне, векторно-параметричне, параметричні та канонічне рівняння поверхні. Параметризація. Еквівалентні та локально еквівалентні параметризації.
- Самостійна робота 2 год.
Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 13 Регулярні поверхні. Криві та сітки на поверхні. — 2 год.
Регулярна параметризація. Регулярна поверхня. Звичайні та особливі точки. Елементарна поверхня, її властивості. Вигляд регулярної поверхні в околі точки. Локальна еквівалентність регулярних параметризацій. Криві та сітки на поверхні.
- Самостійна робота 2 год.
Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 14 Дотична площина та нормаль. Перша квадратична форма поверхні. Внутрішня геометрія поверхні. — 2 год.
Теорема про дотичну площину. Дотичний напрям. Перша квадратична форма поверхні. Довжина дуги кривої на поверхні. Кут між кривими на поверхні. Площа поверхні.
- Самостійна робота 2 год.
Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 15 Друга квадратична форма поверхні. Кривина кривої на поверхні. Теорема Меньє. Нормальні перерізи. Нормальна кривина. — 2 год.
Друга квадратична форма поверхні. Кривина кривої на поверхні. Теорема Меньє. Нормальні перерізи. Нормальна кривина.
- Самостійна робота 2 год.
Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 16 Головні напрями та кривини поверхні. — 2 год.
Основна вектор-функція на поверхні. Головні напрями та кривини. Дослідження нормальних кривин. Формула Ойлера. Асимптотичні напрями. Теорема Родрига.
- Самостійна робота 2 год.
Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].

- Лекція 17 Знаходження головних напрямів та кривин. Повна та середня кривина поверхні. Типи точок на поверхні. — 2 год.
Знаходження головних напрямів та кривин. Повна та середня кривина поверхні. Типи точок на поверхні.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 18 Лінії кривини. Асимптотичні лінії. — 2 год.
Лінії кривини. Асимптотичні лінії.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 19 Дериваційні формули. Рівняння Гауса та Петерсона-Кодаці. — 2 год.
Дериваційні формули Гауса та Вейнгартена. Рівняння Гауса та Петерсона-Кодаці.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 20 Існування та єдиність поверхні з заданими першою та другою квадратичними формами. — 2 год.
Теорема Боне.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Лекція 21 Геодезична кривина кривої на поверхні. Геодезичні лінії. — 2 год.
Геодезична кривина кривої на поверхні. Геодезичні лінії.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2, 4, 5].
- Практичне Поверхня та її рівняння. — 2 год.
заняття 8 Складання загальних, векторно-параметричних, параметричних та канонічних рівнянь поверхні. Перевірка отриманих параметризацій на регулярність.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне Заміна параметра. Дотична площина та нормаль. — 2 год.
заняття 9 Перевірка параметризацій на (локальну) еквівалентність. Знаходження дотичних площин і нормалей поверхні.

- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне Перша квадратична форма поверхні. Внутрішня геометрія поверхні. — 2 год.
заняття 10 Обчислення першої квадратичної форми поверхні, довжин дуги кривих на поверхні, кутів між кривими на поверхні, площ на поверхні.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне Друга квадратична форма поверхні. Головні напрями та кривини поверхні. — 2 год.
заняття 11 Обчислення другої квадратичної форми поверхні. Знаходження нормальних кривин, головних напрямів та кривин, повної та середньої кривини поверхні. Визначення типу точок поверхні. Задачі на застосування теореми Родрига.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне Лінії кривини. Асимптотичні лінії. Теорема Гауса. Символи Кристофеля. — 2 год.
заняття 12 Знаходження ліній кривини та асимптотичних ліній поверхні. Обчислення повної кривини поверхні за теоремою Гауса. Знаходження символів Кристофеля першого та другого роду.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне Геодезична кривина кривої на поверхні. Геодезичні лінії. — 2 год.
заняття 13 Обчислення геодезичної кривини кривої на поверхні. Знаходження геодезичних ліній на поверхні.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].

Тема 3. Тензорний аналіз.

- Лекція 22 Тензор. Означення та приклади. — 2 год.
Тензор. Означення та приклади.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [4, 5].
- Лекція 23 Алгебраїчні операції над тензорами. — 2 год.
Алгебраїчні операції над тензорами.

- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [4, 5].
- Лекція 24 Зв'язність і коваріантне диференціювання. — 2 год.
Зв'язність і коваріантне диференціювання.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [4, 5].
- Лекція 25 Тензор кривини. — 1 год.
Тензор кривини.
- Самостійна 1 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [4, 5].
- Практичне Означення тензора. — 2 год.
заняття 14 Обчислення компонент тензора при заміні криволінійних координат.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне Алгебраїчні операції над тензорами. — 2 год.
заняття 15 Виконання алгебраїчних операцій над тензорами.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне Коваріантне диференціювання. — 2 год.
заняття 16 Знаходження коваріантних похідних.
- Самостійна 3 год.
робота Виконання домашніх завдань.
Література [3].
- Практичне Узагальнення та систематизація навчального матеріалу. — 2 год.
заняття 17 Узагальнення та систематизація навчального матеріалу.
- Лекція 26 Модульна контрольна робота. — 2 год.

Типове завдання модульної контрольної роботи

1. Для поверхні Φ , заданої параметризацією

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) :$$

- а) з'ясувати, чи є поверхня Φ регулярною, і якщо так, то знайти клас її регулярності;
б) знайти дотичні площини поверхні Φ , паралельні площині $y - z + 5 = 0$;

- в) знайти першу квадратичну форму;
- г) знайти довжину дуги кривої $u = 1$ від $v = 0$ до $v = 2$;
- д) знайти кут між кривими $u + 2v = 0$ і $2u - v = 0$ в точці їх перетину;
- е) знайти площу чотирикутника на поверхні Φ , обмеженого кривими $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$;
- є) знайти символи Кристофеля першого та другого роду;
- ж) знайти геодезичну кривину координатних ліній;
- з) знайти другу квадратичну форму;
- и) знайти головні напрями та відповідні головні кривини в точці $(0, 0, 0)$;
- і) знайти повну та середню кривини в довільній точці;
- ї) дослідити тип точок поверхні Φ ;
- й) знайти омбілічні точки поверхні;
- к) знайти лінії кривини;
- л) знайти асимптотичні лінії, які проходять через точку $(0, 0, 0)$;
- м) з'ясувати, чи є координатна сітка ортогональною, сіткою ліній кривини, асимптотичною, напівгеодезичною.

2. Доведіть або спростуйте твердження: всі точки елементарної поверхні звичайні.

3. Доведіть або спростуйте твердження: символ Кристофеля другого роду не змінюється, якщо в ньому виконати циклічну перестановку індексів.

Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 2

1. Поверхня та її рівняння. Загальне, векторно-параметричне, параметричні та канонічне рівняння поверхні. Параметризація. Заміна параметра. Еквівалентні та локально еквівалентні параметризації.

2. Регулярна параметризація. Регулярна поверхня. Звичайні та особливі точки. Елементарна поверхня, її властивості. Вигляд регулярної поверхні в околі точки. Локальна еквівалентність регулярних параметризацій. Криві та сітки на поверхні.

3. Дотична площина та нормаль. Дотичний напрям.

4. Перша квадратична форма поверхні. Внутрішня геометрія поверхні. Довжина дуги кривої на поверхні. Кут між кривими на поверхні. Площа поверхні.

5. Друга квадратична форма поверхні. Кривина кривої на поверхні. Теорема Меньє. Нормальні перерізи. Нормальна кривина.

6. Основна вектор-функція на поверхні. Головні напрями та кривини. Дослідження нормальних кривин. Формула Ойлера. Асимптотичні напрями. Теорема Родрига.

7. Знаходження головних напрямів та кривин. Повна та середня кривина поверхні. Типи точок на поверхні.

8. Лінії кривини. Асимптотичні лінії.

9. Дериваційні формули Гауса та Вейнгартена. Рівняння Гауса та Петерсона-Кодацці.

10. Існування та єдиність поверхні з заданими першою та другою квадратичними формами. Теорема Боне.
11. Геодезична кривина кривої на поверхні. Геодезичні лінії.
12. Тензор. Означення та приклади.
13. Алгебраїчні операції над тензорами.
14. Зв'язність і коваріантне диференціювання.
15. Тензор кривини.

Перелік питань, які виносяться на іспит

1. Вектор-функція скалярного аргументу. Границя, неперервність, похідна вектор-функції. Розклад вектор-функції в ряд Тейлора.
2. Крива та її рівняння. Загальне, векторно-параметричне, параметричні та канонічне рівняння кривої. Параметризація. Заміна параметра. Еквівалентні та локально еквівалентні параметризації.
3. Регулярні та гладкі криві. Звичайні та особливі точки. Елементарна крива, її властивості. Теорема про вигляд регулярної кривої в околі точки. Теорема про локальну еквівалентність регулярних параметризацій кривої.
4. Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація кривої. Означення натуральної параметризації. Необхідна й достатня умова натуральності параметризації. Теорема про локальну еквівалентність натуральних параметризацій кривої. Зміна початку та напряму відрахунку натурального параметра кривої.
5. Дотична кривої. Стична площина кривої. Тригранник Френе. Орти дотичної, головної нормалі та бінормалі.
6. Кривина та скрут кривої. Означення кривини. Теорема про кривину кривої. Необхідна й достатня умова належності кривої прямій. Означення абсолютного скруту. Теорема про абсолютний скрут кривої. Скрут кривої. Необхідна й достатня умова належності кривої площині.
7. Формули Серре-Френе. Натуральні рівняння кривої. Теорема про існування єдиної з точністю до розташування у просторі кривої з даними кривиною і скрутом.
8. Вигляд кривої в околі звичайної точки.
9. Дотик кривих. Теорема про необхідні й достатні умови дотику кривих. Стичне коло.
10. Дотик кривої та поверхні. Стична сфера.
11. Особливі точки плоскої кривої.
12. Поверхня та її рівняння. Загальне, векторно-параметричне, параметричні та канонічне рівняння поверхні. Параметризація. Заміна параметра. Еквівалентні та локально еквівалентні параметризації.
13. Регулярна параметризація. Регулярна поверхня. Звичайні та особливі точки. Елементарна поверхня, її властивості. Вигляд регулярної поверхні в околі точки. Локальна еквівалентність регулярних параметризацій. Криві та сітки на поверхні.
14. Дотична площина та нормаль. Дотичний напрям.

15. Перша квадратична форма поверхні. Внутрішня геометрія поверхні. Довжина дуги кривої на поверхні. Кут між кривими на поверхні. Площа поверхні.

16. Друга квадратична форма поверхні. Кривина кривої на поверхні. Теорема Меньє. Нормальні перерізи. Нормальна кривина.

17. Основна вектор-функція на поверхні. Головні напрями та кривини. Дослідження нормальних кривин. Формула Ойлера. Асимптотичні напрями. Теорема Родрига.

18. Знаходження головних напрямів та кривин. Повна та середня кривина поверхні. Типи точок на поверхні.

19. Лінії кривини. Асимптотичні лінії.

20. Дериваційні формули Гауса та Вейнгартена. Рівняння Гауса та Петерсона-Кодацці.

21. Існування та єдиність поверхні з заданими першою та другою квадратичними формами. Теорема Боне.

22. Геодезична кривина кривої на поверхні. Геодезичні лінії.

23. Тензор. Означення та приклади.

24. Алгебраїчні операції над тензорами.

25. Зв'язність і коваріантне диференціювання.

26. Тензор кривини.

Рекомендована література

а) основна:

1. А. В. Погорелов. Дифференциальная геометрия. — М., 1974.
2. П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, М, 1956.
3. Н. И. Кованцов, Г. М. Зражевская, В. Г. Кочаровский, В. И. Михайловский, Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач, К., Вища школа, 1989.

б) додаткова:

4. А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, Курс дифференциальной геометрии и топологии, Изд-во Московского университета, 1980.
5. М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 480 с.

Зміст

Вступ	3
Мета і завдання навчальної дисципліни	3
Предмет навчальної дисципліни	3
Вимоги до знань та вмінь студентів.	3
Місце в структурно-логічній схемі спеціальності.	3
Система контролю та оцінювання знань.	4
Навчально-тематичний план лекцій, практичних занять і самостійної роботи	6
Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи	7
<i>III семестр</i>	7
Змістовий модуль 1. Теорія кривих	7
Тема 1. Теорія кривих	7
Типове завдання модульної контрольної роботи	9
Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 1	10
Змістовий модуль 2. Теорія поверхонь. Тензорний аналіз	11
Тема 2. Теорія поверхонь	11
Тема 3. Тензорний аналіз	13
Типове завдання модульної контрольної роботи	14
Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 2	15
Перелік питань, які виносяться на іспит	16
Рекомендована література	18