

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Кафедра геометрії

Укладач: доц. В. М. Бабич

КАТЕГОРІЇ МОДУЛІВ

Робоча навчальна програма дисципліни
циклу професійної підготовки фахівців
освітньо-кваліфікаційного рівня «магістр»
для студентів II курсу денної форми навчання
спеціальності 8.04020101 «Математика»

Затверджено
на засіданні кафедри геометрії,
протокол №__ від __.__.2010 р.
Завідувач кафедри
_____ проф. В. В. Кириченко

Затверджено
на засіданні вченої ради
механіко-математичного факультету,
протокол №__ від __.__.2010 р.
Декан мех.-мат. факультету
_____ проф. М. Ф. Городній

Робоча навчальна програма з дисципліни «Категорії модулів». Укладач:
кандидат фізико-математичних наук, доцент В'ячеслав Михайлович Бабич.

Лектор: к. ф.-м. н., доц. В. М. Бабич.

Погоджено
з науково-методичною комісією
механіко-математичного факультету,
протокол №__ від __.__.2010 р.
Голова НМК мех.-мат. факультету
_____ проф. О. О. Курченко

Вступ

Дисципліна «Категорії модулів» для студентів денної форми навчання спеціальності 8.04020101 «Математика» є спеціальним курсом, що читається в III семестрі в обсязі 4 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS), і розрахована на 144 години занять. З них 68 годин лекцій і 76 годин самостійної роботи.

Мета і завдання навчальної дисципліни «Категорії модулів»: ознайомлення студентів з категорним підходом у теорії кілець, оволодіння категорними поняттями й методами, які використовуються у теорії кілець і модулів, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Предмет навчальної дисципліни «Категорії модулів»: категорія модулів, вільний та проєктивний модуль, функтори Hom і \otimes , точна послідовність, Моріта-еквівалентність.

Вимоги до знань та вмінь студентів.

Студент повинен знати: основні поняття теорії категорій і теорії кілець, зокрема: категорія, дуальна категорія, універсальний об'єкт, добуток, кодобуток, адитивна категорія, категорія над полем, функтор, природне перетворення функторів, еквівалентність категорій, адитивний та \mathbb{K} -лінійний функтор, вільний та проєктивний модуль, тензорний добуток модулів над кільцем та \mathbb{K} -алгеброю, точна послідовність, функтори Hom і \otimes , точність функторів.

Студент повинен вміти: перевіряти виконання аксіом категорії та модуля, будувати категорію над полем за алгеброю з розкладом одиниці в суму попарно ортогональних ідемпотентів, будувати алгебру з розкладом одиниці в суму попарно ортогональних ідемпотентів за скінченною категорією над полем, будувати функтор за модулем і навпаки, обчислювати тензорний добуток модулів, перевіряти послідовності модулів на точність, перевіряти функтори на точність, перевіряти алгебри на Моріта-еквівалентність.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Навчальна дисципліна «Категорії модулів» є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «магістр» і використовується при вивченні поглиблених курсів з алгебри та геометрії.

Система контролю та оцінювання знань. Результати вивчення студентами навчальної дисципліни «Категорії модулів» оцінюються за 100-бальною шкалою згідно з модульно-рейтинговою системою, яка складається з 2 модулів.

Модульний контроль.

III семестр

Змістовий модуль 1: 0 – 70 балів:

- активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи (опрацювання лекційного матеріалу, виконання аудиторних і домашніх завдань): 0 – 30 балів;

- колоквіум: 0 – 40 балів.

Змістовий модуль 2: 0 – 30 балів:

- активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи (опрацювання лекційного матеріалу, виконання аудиторних і домашніх завдань): 0 – 30 балів.

Всього за семестр: 0 – 100 балів.

При цьому, сумарна кількість балів відповідає оцінці:

- 0–34 – «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- 35–59 – «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- 60–64 – «задовільно» («достатньо»);
- 65–74 – «задовільно»;
- 75–84 – «добре»;
- 85–89 – «добре» («дуже добре»);
- 90–100 – «відмінно».

Шкала відповідності

За 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою		
90–100	5	відмінно	зараховано
75–89	4	добре	
60–74	3	задовільно	
0–59	2	незадовільно	не зараховано

Навчально-тематичний план лекцій, практичних занять і самостійної роботи

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
III семестр				
Змістовий модуль 1				
Категорії модулів				
1	Елементи теорії категорій	18	0	18
2	Категорії модулів	20	0	18
Колоквіум				
Змістовий модуль 2				
Функтори на категоріях модулів				
3	Функтори на категоріях модулів	6	0	6
4	Теорія Моріти	10	0	15
5	Застосування	14	0	19
Всього за семестр		68	0	76
Всього за курс		68	0	76

Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи

III семестр

Змістовий модуль 1 Категорії модулів

Тема 1. Елементи теорії категорій.

- Лекція 1 Категорії. — 2 год.
Означення категорії. Підкатегорія.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [3–6].
- Лекція 2 Приклади категорій. — 2 год.
Дискретна категорія. Категорія множин. Категорія груп. Категорія топологічних просторів. Моноїд. Частково впорядкована множина. Декартів добуток. Категорія матриць. Категорія графів.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [3–6].
- Лекція 3 Приклади категорій. — 2 год.
Категорія неорієнтованих графів. Категорія біграфів. Категорія неорієнтованих біграфів.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [3–6].
- Лекція 4 Дуальна категорія. Добуток категорій. Ізоморфізм. Універсальні об'єкти — 2 год.
Дуальна категорія. Добуток категорій. Ізоморфізм. Універсальні об'єкти
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [3–6].
- Лекція 5 Добуток і кодобуток. Амальгама. — 2 год.
Добуток і кодобуток. Амальгама.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [3–6].
- Лекція 6 Адитивна категорія. — 2 год.
Адитивна категорія. Бідобуток. Єдиність бідобутку. Асоціативність бідобутку. Діаграма бідобутку n об'єктів.

- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [3–6].
- Лекція 7 Адитивна категорія. Категорія над полем. — 2 год.
Існування скінченних прямих добутків і бідобутків в адитивній категорії. Морфізми з прямої суми й у пряму суму. Пряма сума морфізмів. Категорія над полем.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [3–6].
- Лекція 8 Функтори. — 2 год.
Коваріантний та контраваріантний функтор. Приклади. Природне перетворення функторів. Категорія функторів.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [3–6].
- Лекція 9 Еквівалентність категорій. Адитивні та лінійні функтори. — 2 год.
Еквівалентність категорій. Адитивні та лінійні функтори.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [3–6].

Тема 2. Категорії модулів.

- Лекція 10 Означення модуля та категорії модулів. — 2 год.
Означення модуля та категорії модулів.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 4].
- Лекція 11 Вільні та проєктивні модулі. — 2 год.
Вільні та проєктивні модулі.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 4].
- Лекція 12 Алгебри з розкладом одиниці та категорії над полем. — 2 год.
Побудова алгебри з розкладом одиниці в суму попарно ортогональних ідемпотентів за скінченною категорією над полем і навпаки.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 4].
- Лекція 13 Категорія модулів як категорія функторів. — 2 год.
Побудова модуля за \mathcal{K} -лінійним функтором і навпаки.

- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 4].
- Лекція 14 Тензорний добуток модулів. — 2 год.
Означення. Теорема про продовження внутрішньо білінійного відображення до гомеоморфізму. Модульна структура на тензорному добутку.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].
- Лекція 15 Тензорний добуток модулів. — 2 год.
Елементарні властивості. Комутативність. Дистрибутивність.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].
- Лекція 16 Тензорний добуток модулів. — 2 год.
Асоціативність. Гомоморфізми тензорних добутків.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].
- Лекція 17 Тензорний добуток модулів. — 2 год.
Тензорний добуток модулів над алгеброю.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1, 2].
- Лекція 18 Точні послідовності. — 2 год.
Означення точної послідовності. Лема про п'ять гомоморфізмів та її наслідки.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1].
- Лекція 19 Колоквіум — 2 год.

Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 1

1. Категорії. Підкатегорія. Приклади категорій.
2. Дуальна категорія. Добуток категорій. Ізоморфізм. Універсальні об'єкти
3. Добуток і кодобуток. Амальгама.
4. Адитивна категорія. Бідобуток. Єдиність бідобутку. Асоціативність бідобутку. Діаграма бідобутку n об'єктів. Існування скінченних прямих добутків і бідобутків в адитивній категорії. Морфізми з прямої суми й у пряму суму. Пряма сума морфізмів. Категорія над полем.

5. Функтори. Коваріантний та контраваріантний функтор. Приклади. Природне перетворення функторів. Категорія функторів. Еквівалентність категорій. Адитивні та лінійні функтори.

6. Означення модуля та категорії модулів.

7. Вільні та проєктивні модулі.

8. Алгебри з розкладом одиниці та категорії над полем.

9. Категорія модулів як категорія функторів.

10. Тензорний добуток модулів. Означення. Теорема про продовження внутрішньо білінійного відображення до гомеоморфізму. Модульна структура на тензорному добутку. Елементарні властивості. Комутативність. Дистрибутивність. Асоціативність. Гомоморфізми тензорних добутків. Тензорний добуток модулів над алгеброю.

11. Точні послідовності. Означення точної послідовності. Лема про п'ять гомоморфізмів та її наслідки.

Змістовий модуль 2

Функтори на категоріях модулів

Тема 3. Функтори на категоріях модулів.

Лекція 20 Функтори $\text{Hom } i \otimes$. — 2 год.

Функтори $\text{Hom } i \otimes$.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1].

Лекція 21 Спряжена асоціативність. — 2 год.

Спряжена асоціативність.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1].

Лекція 22 Точність функторів. — 2 год.

Точність функторів.

Самостійна 2 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1].

Тема 4. Теорія Моріти.

Лекція 23 Деякі властивості еквівалентностей категорій модулів. — 2 год.

Деякі властивості еквівалентностей категорій модулів.

Самостійна 3 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1].

- Лекція 24 Деякі властивості еквівалентностей категорій модулів. — 2 год.
Деякі властивості еквівалентностей категорій модулів.
- Самостійна 3 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1].
- Лекція 25 Категорія зображень алгебри ендоморфізмів проєктивного модуля. — 2 год.
Категорія зображень алгебри ендоморфізмів проєктивного модуля.
- Самостійна 3 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1].
- Лекція 26 Категорія зображень алгебри ендоморфізмів проєктивного модуля. — 2 год.
Категорія зображень алгебри ендоморфізмів проєктивного модуля.
- Самостійна 3 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1].
- Лекція 27 Теорема Моріти та її наслідки. — 2 год.
Теорема Моріти та її наслідки.
- Самостійна 3 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
Література [1].

Тема 5. Застосування.

- Лекція 28 Категорія модулів матричної алгебри над алгеброю. — 2 год.
Категорія модулів матричної алгебри над алгеброю.
- Самостійна 3 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
- Лекція 29 Категорія модулів матричної алгебри над алгеброю. — 2 год.
Категорія модулів матричної алгебри над алгеброю.
- Самостійна 3 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
- Лекція 30 Матричні поліноми. — 2 год.
Матричні поліноми.
- Самостійна 3 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
- Лекція 31 Матричні поліноми. — 2 год.
Матричні поліноми.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.

- Лекція 32 Матричні поліноми. — 2 год.
Матричні поліноми.
- Самостійна 3 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
- Лекція 33 Матричні поліноми. — 2 год.
Матричні поліноми.
- Самостійна 2 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.
- Лекція 34 Матричні поліноми. — 2 год.
Матричні поліноми.
- Самостійна 3 год.
робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 2

1. Функтори Hom і \otimes .
2. Спряжена асоціативність.
3. Точність функторів.
4. Деякі властивості еквівалентностей категорій модулів.
5. Категорія зображень алгебри ендоморфізмів проєктивного модуля.
6. Теорема Моріти та її наслідки.
7. Категорія модулів матричної алгебри над алгеброю.
8. Матричні поліноми.

Рекомендована література

а) основна:

1. Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко. Конечномерные алгебры. – Киев: Издательство при Киевском Государственном университете издательского объединения «Вища школа», 1980. – 192 с.
2. П. М. Гудивок, В. П. Рудько. Тензорные произведения представлений конечных групп: Учеб. пособие. – Ужгород: Изд-во УжГУ, 1985. – 120 с.
3. S. MacLane. Categories for the working mathematician. – Springer-Verlag, 1971. – 262 p.

б) додаткова:

4. С. Ленг. Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 575 с.
5. С. Маклейн. Гомология. – М.: Мир, 1966. – 544 с.
6. М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер. Основы теории категорий. – М.: Наука, 1974.

Зміст

Вступ	3
Мета і завдання навчальної дисципліни	3
Предмет навчальної дисципліни	3
Вимоги до знань та вмінь студентів.	3
Місце в структурно-логічній схемі спеціальності.	3
Система контролю та оцінювання знань.	3
Навчально-тематичний план лекцій, практичних занять і самостійної роботи	5
Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи	6
<i>III семестр</i>	6
Змістовий модуль 1. Категорії модулів	6
Тема 1. Елементи теорії категорій	6
Тема 2. Категорії модулів	7
Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 1	8
Змістовий модуль 2. Функтори на категоріях модулів	9
Тема 3. Функтори на категоріях модулів	9
Тема 4. Теорія Моріти	9
Тема 5. Застосування	10
Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 2	11
Рекомендована література	12