

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Механіко-математичний факультет  
Кафедра геометрії

Укладач: доц. В. М. Бабич

## ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ТОПОЛОГІЇ

Робоча навчальна програма дисципліни  
циклу професійної підготовки фахівців  
освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст»  
для студентів I курсу заочної форми навчання  
спеціальності 7.04020101 «Математика»

Затверджено  
на засіданні кафедри геометрії,  
протокол №\_\_ від \_\_.\_\_.2010 р.  
Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ проф. В. В. Кириченко

Затверджено  
на засіданні вченої ради  
механіко-математичного факультету,  
протокол №\_\_ від \_\_.\_\_.2010 р.  
Декан мех.-мат. факультету  
\_\_\_\_\_ проф. М. Ф. Городній

Робоча навчальна програма з дисципліни «Додаткові розділи топології».  
Укладач: кандидат фізико-математичних наук, доцент В'ячеслав Михайлович  
Бабич.

**Лектор:** к. ф.-м. н., доц. В. М. Бабич.

Погоджено  
з науково-методичною комісією  
механіко-математичного факультету,  
протокол №\_\_ від \_\_.\_\_.2010 р.  
Голова НМК мех.-мат. факультету  
\_\_\_\_\_ проф. О. О. Курченко

## Вступ

Дисципліна «Додаткові розділи топології» для студентів заочної форми навчання спеціальності 7.04020101 «Математика» є дисципліною вільного вибору за пропозицією кафедри, що читається в I семестрі в обсязі 5 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS), і розрахована на 180 годин занять. З них 18 годин лекцій і 162 години самостійної роботи. Семестр закінчується іспитом.

**Мета і завдання навчальної дисципліни** «Додаткові розділи топології»: ознайомлення студентів з додатковими поняттями топології, операціями на топологічних просторах, топологічними властивостями, оволодіння теоретичними положеннями та основними застосуваннями топології в різних задачах математики, їх використання в подальших курсах з математики, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

**Предмет навчальної дисципліни** «Додаткові розділи топології»: топологічний простір, відображення топологічних просторів, підпростір, факторпростір, топологічні добуток і сума, топологічні властивості.

### Вимоги до знань та вмінь студентів.

*Студент повинен знати:* основні та додаткові поняття топології, зокрема: топологічний простір, база, передбаза, внутрішність, замикання, неперервне, відкрите, замкнене відображення топологічних просторів, гомеоморфізм, ініціальна та фінальна топології, підпростір, факторпростір, факторне відображення, факторизація, факторвідображення, простори орбіт, проєктивні простори, топологічні добуток і сума, зв'язність, лінійна зв'язність, аксіоми зліченності, ліндельофовість, квазікомпактність, сепарабельність, аксіоми відокремлюваності, метризованість, збіжність.

*Студент повинен вміти:* перевіряти виконання аксіом топології, знаходити базу топологічного простору та системи околів його точки найменшої потужності, знаходити топологію, породжену родиною підмножин, знаходити внутрішність, замикання, граничні та ізольовані точки множини, перевіряти відображення топологічних просторів на відкритість, замкненість та неперервність, знаходити множину всіх точок розриву відображення топологічних просторів, знаходити індуковану топологію та фактортопологію, визначати топологічні властивості топологічних просторів, перевіряти топологічні простори на метризованість, знаходити множину границь послідовності точок топологічного простору.

**Місце в структурно-логічній схемі спеціальності.** Навчальна дисципліна «Додаткові розділи топології» є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст» і використовується при вивченні поглиблених курсів з геометрії та топології.

**Система контролю та оцінювання знань.** Результати вивчення студентами навчальної дисципліни «Додаткові розділи топології» оцінюються за 100-

бальною шкалою згідно з модульно-рейтинговою системою, яка складається з 2 модулів.

*Модульний контроль.*

### І семестр

Змістовий модуль 1: 0 – 30 балів:

- активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи (опрацювання лекційного матеріалу, виконання аудиторних і домашніх завдань): 0 – 10 балів;
- письмова модульна контрольна робота: 0 – 20 балів.

Змістовий модуль 2: 0 – 30 балів:

- активність студента на заняттях і виконання ним самостійної роботи (опрацювання лекційного матеріалу, виконання аудиторних і домашніх завдань): 0 – 10 балів;
- письмова модульна контрольна робота: 0 – 20 балів.

Якщо за результатами модульно-рейтингового контролю студент отримав сумарну кількість балів за 2 змістові модулі, яка не перевищує 20 балів, то студент не допускається до іспиту.

Іспит: 0 – 40 балів.

Всього за семестр: 0 – 100 балів.

При цьому, сумарна кількість балів відповідає оцінці:

- 0–34 – «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- 35–59 – «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- 60–64 – «задовільно» («достатньо»);
- 65–74 – «задовільно»;
- 75–84 – «добре»;
- 85–89 – «добре» («дуже добре»);
- 90–100 – «відмінно».

#### *Шкала відповідності*

За 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою		
90–100	5	відмінно	зараховано
75–89	4	добре	
60–74	3	задовільно	
0–59	2	незадовільно	не зараховано

## Навчально-тематичний план лекцій, практичних занять і самостійної роботи

№ теми	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
<b>I семестр</b>				
<b>Змістовий модуль 1</b>				
<b>Основні поняття топології. Операції на топологічних просторах</b>				
1	Основні поняття топології	0	0	32
2	Операції на топологічних просторах	10	0	72
Модульна контрольна робота				5
<b>Змістовий модуль 2</b>				
<b>Топологічні властивості</b>				
3	Топологічні властивості	8	0	48
Модульна контрольна робота				5
Всього за семестр		18	0	162
Всього за курс		18	0	162

# Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи

## I семестр

### Змістовий модуль 1

#### Основні поняття топології. Операції на топологічних просторах

##### Тема 1. Основні поняття топології.

Самостійна 32 год.

робота Топологічний простір. Порівняння топологій. Відкриті та замкнені множини. База. Критерій бази. Покриття. Передбаза. База та передбаза системи околів точки топологічного простору.

Внутрішність і замикання множини топологічного простору. Скрізь щільні множини. Ніде не щільні множини. Внутрішні точки. Точки дотику, граничні й ізольовані точки. Локально скінченні родини множин.

Відображення топологічних просторів. Неперервні відображення. Неперервність в термінах бази й передбази систем околів точки та її образу відповідно. Критерій неперервності. Композиція неперервних відображень. Відкриті та замкнені відображення. Композиція відкритих (замкнених) відображень. Критерій відкритості відображення. Критерій замкненості відображення. Гомеоморфізм. Критерій гомеоморфізму.

Література [1–3, 6].

##### Тема 2. Операції на топологічних просторах.

Самостійна 12 год.

робота Ініціальна топологія. База та передбаза ініціальної топології. База та передбаза системи околів точки в ініціальній топології. Універсальна властивість. Транзитивність. Фінальна топологія. Відкриті та замкнені в фінальній топології множини. База та передбаза фінальної топології. Універсальна властивість. Транзитивність. Індукована топологія. Підпростір. Відкриті та замкнені в індукованій топології та в підпросторі множини.

Література [1–3, 6].

Лекція 1 Факторпростір. — 2 год.

Топологія насичених відкритих множин. Фактортопологія. Факторне відображення. Факторпростір. Відкрите та замкнене відношення еквівалентності. Підпростір відносно фактортопології. Звуження та продовження факторних відображень.

Самостійна 12 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1–3, 6].

Лекція 2 Факторпростір. — 2 год.

Бази. Універсальна властивість. Факторизація. Факторпростір підпростору. Факторвідображення. Простір орбіт. Проективні простори.

Самостійна 12 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1–3, 6].

Лекція 3 Топологічний добуток. — 2 год.

Тихоновська топологія. Внутрішність і замикання. Діагональний добуток відображень. Асоціативність і комутативність.

Самостійна 12 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1–3, 6].

Лекція 4 Топологічний добуток. Топологічна сума. — 2 год.

Відображення з топологічного добутку. Прямий добуток відображень. Підпростір топологічного добутку. Факторпростір топологічного добутку. Сума топологій. Розклад топологічного простору в топологічну суму. Асоціативність і комутативність.

Самостійна 12 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1–3, 6].

Лекція 5 Топологічна сума. — 2 год.

Внутрішність і замикання. Діагональна сума відображень. Пряма сума відображень. Відображення в топологічну суму. Дистрибутивність. Підпростір і факторпростір топологічної суми.

Самостійна 12 год.

робота Опрацювання лекційного матеріалу.

Література [1–3, 6].

Самостійна 5 год.

робота Модульна контрольна робота.

### Типове завдання модульної контрольної роботи

1. Нехай  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ :

а) довести, що пара  $(X, \tau)$  є топологічним простором;

б) виписати всі відкриті та замкнені в  $X$  множини;

в) знайти базу топологічного простору  $(X, \tau)$  найменшої потужності;

г) з'ясувати, чи є родина  $\beta = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$  підмножин множини  $X$  базою деякої топології на  $X$ ;

д) знайти топологію на  $X$ , перед базою якої є родина  $\mu = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ ;

е) знайти базу системи околів точки  $x = a$  топологічного простору  $(X, \tau)$  найменшої потужності;

є) знайти внутрішність, замикання, множини граничних та ізольованих точок множини  $A = \{b, c\}$  та з'ясувати, чи є множина  $A$  відкритою, замкненою, скрізь щільною або ніде не щільною в  $X$ ;

ж) з'ясувати, чи є відображення  $f : a \mapsto b, b \mapsto c, c \mapsto a$  топологічного про-

простору  $(X, \tau)$  у себе відкритим, замкненим, неперервним, і знайти множину всіх точок розриву відображення  $f$ ;

2. Довести, що топологічний простір дискретний тоді й лише тоді, коли жодна множина цього простору не має граничних точок.

### **Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 1**

1. Топологічний простір. Порівняння топологій. Відкриті та замкнені множини.

2. База, покриття, передбаза топологічного простору. База та передбаза системи околів точки топологічного простору.

3. Внутрішність і замикання множини топологічного простору. Скрізь щільні та ніде не щільні множини. Внутрішні точки. Точки дотику, граничні й ізольовані точки. Локально скінченні родини множин.

4. Відображення топологічних просторів. Неперервні відображення. Відкриті та замкнені відображення. Гомеоморфізм. Ініціальна та фінальна топології.

5. Індукована топологія. Підпростір. Відкриті та замкнені в індукованій топології та в підпросторі множини. Бази та передбази. Універсальна властивість. Топологія, індукована композицією відображень. Звуження відображень. Фундаментальне покриття. Продовження відображень.

6. Топологія насичених відкритих множин. Фактортопологія. Факторне відображення. Факторпростір. Відкрите та замкнене відношення еквівалентності. Підпростір відносно фактортопології. Звуження та продовження факторних відображень. Бази. Універсальна властивість. Факторизація. Факторпростір підпростору. Факторвідображення. Простір орбіт. Проективні простори.

7. Топологічний добуток. Тихоновська топологія. Внутрішність і замикання множини в топологічному добутку. Діагональний добуток відображень. Асоціативність і комутативність топологічного добутку. Відображення з топологічного добутку. Прямий добуток відображень. Підпростір топологічного добутку. Факторпростір топологічного добутку.

8. Сума топологій. Топологічна сума. Розклад топологічного простору в топологічну суму. Асоціативність і комутативність топологічної суми. Внутрішність і замикання множини топологічної суми. Діагональна сума відображень. Пряма сума відображень. Відображення в топологічну суму. Дистрибутивність топологічних суми та добутку. Підпростір і факторпростір топологічної суми.



## Змістовий модуль 2

### Топологічні властивості

#### Тема 3. Топологічні властивості.

- Лекція 6 Зв'язність. — 2 год.  
Зв'язний топологічний простір. Критерій незв'язності. Зв'язна множина топологічного простору. Достатні умови зв'язності. Компоненти зв'язності. Образ зв'язного простору при неперервному відображенні. Зв'язність топологічного добутку. Шлях. Лінійно зв'язні простори та множини.
- Самостійна 12 год.  
робота Опрацювання лекційного матеріалу.  
Література [1–3, 6].
- Лекція 7 Потужнісні характеристики. — 2 год.  
Вага та щільність топологічного простору. Аксиоми зліченності. Ліндельфовість та квазікомпактність. Сепарабельність.
- Самостійна 12 год.  
робота Опрацювання лекційного матеріалу.  
Література [1–3, 6].
- Лекція 8 Відокремлюваність. — 2 год.  
Означення та приклади. Перша аксіома відокремлюваності. Хаусдорфовість. Третя та четверта аксіоми відокремлюваності. Компактність.
- Самостійна 12 год.  
робота Опрацювання лекційного матеріалу.  
Література [1–3, 6].
- Лекція 9 Метризовність. Збіжність. Простори Фреше-Урисона. — 2 год.  
Необхідні умови метризовності. Границя послідовності. Необхідні й достатні умови єдиності границі. Простори Фреше-Урисона. Неперервність у термінах збіжності. Збіжність у конструкціях.
- Самостійна 12 год.  
робота Опрацювання лекційного матеріалу.  
Література [1–3, 6].
- Самостійна 5 год.  
робота Модульна контрольна робота.

#### Типове завдання модульної контрольної роботи

1. Нехай  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ :
  - а) знайти топологію  $\tau_i$  на множині  $S = \{a, b, c, d\}$ , індуковану топологією  $\tau$  на  $X$  та відображенням  $i : S \rightarrow X$ ,  $i : a \mapsto b, b \mapsto b, c \mapsto a, d \mapsto a$ ;
  - б) знайти фактортопологію  $\tau^p$  на множині  $Q = \{a, b, c, d\}$  відносно топології  $\tau$  на  $X$  та відображення  $p : X \rightarrow Q$ ,  $p : a \mapsto b, b \mapsto b, c \mapsto a$ ;
  - в) з'ясувати, чи буде множина  $A = \{a, b\}$  зв'язною в  $X$ ;

- г) з'ясувати, які аксіоми зліченності задовольняє топологічний простір  $(X, \tau)$ , чи є він ліндельфовим, квазікомпактним, сепарабельним, та в разі сепарабельності вписати не більш ніж зліченну скрізь щільну в ньому множину найменшої потужності;
- д) з'ясувати, які аксіоми відокремлюваності задовольняє топологічний простір  $(X, \tau)$  та чи є він регулярним або нормальним;
- е) знайти множину границь послідовності  $\{x_{2n-1} = b, x_{2n} = a, n \in \mathbb{N}\}$ .
2. Нехай  $f : X \rightarrow Y$  і  $g : Y \rightarrow Z$  — відображення топологічних просторів,  $f$  сюр'єктивне і неперервне, а композиція  $fg$  відкрита (замкнена). Довести, що відображення  $g$  відкрите (замкнене).

### Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 2

1. Зв'язність. Лінійна зв'язність.
2. Потужнісні характеристики. Вага та щільність топологічного простору. Аксіоми зліченності. Ліндельфовість та квазікомпактність. Сепарабельність.
3. Відокремлюваність. Перша аксіома відокремлюваності. Хаусдорфовість. Третя та четверта аксіоми відокремлюваності. Компактність.
4. Метризованість.
5. Збіжність. Границя послідовності. Необхідні й достатні умови єдиності границі. Простори Фреше-Урисона. Неперервність у термінах збіжності. Збіжність у конструкціях.

### Перелік питань, які виносяться на іспит

1. Топологічний простір. Порівняння топологій. Відкриті та замкнені множини.
2. База, покриття, передбаза топологічного простору. База та передбаза системи околів точки топологічного простору.
3. Внутрішність і замикання множини топологічного простору. Скрізь щільні та ніде не щільні множини. Внутрішні точки. Точки дотику, граничні й ізольовані точки. Локально скінченні родини множин.
4. Відображення топологічних просторів. Неперервні відображення. Відкриті та замкнені відображення. Гомеоморфізм. Ініціальна та фінальна топології.
5. Індукована топологія. Підпростір. Відкриті та замкнені в індукованій топології та в підпросторі множини. Бази та передбази. Універсальна властивість. Топологія, індукована композицією відображень. Звуження відображень. Фундаментальне покриття. Продовження відображень.
6. Топологія насичених відкритих множин. Фактортопологія. Факторне відображення. Факторпростір. Відкрите та замкнене відношення еквівалентності. Підпростір відносно фактортопології. Звуження та продовження факторних відображень. Бази. Універсальна властивість. Факторизація. Факторпростір підпростору. Факторвідображення. Простір орбіт. Проективні простори.

7. Топологічний добуток. Тихоновська топологія. Внутрішність і замикання множини в топологічному добутку. Діагональний добуток відображень. Асоціативність і комутативність топологічного добутку. Відображення з топологічного добутку. Прямий добуток відображень. Підпростір топологічного добутку. Факторпростір топологічного добутку.

8. Сума топологій. Топологічна сума. Розклад топологічного простору в топологічну суму. Асоціативність і комутативність топологічної суми. Внутрішність і замикання множини топологічної суми. Діагональна сума відображень. Пряма сума відображень. Відображення в топологічну суму. Дистрибутивність топологічних суми та добутку. Підпростір і факторпростір топологічної суми.

9. Зв'язність. Лінійна зв'язність.

10. Потужнісні характеристики. Вага та щільність топологічного простору. Аксиоми зліченності. Ліндельфовість та квазікомпактність. Сепарабельність.

11. Відокремлюваність. Перша аксіома відокремлюваності. Хаусдорфовість. Третя та четверта аксіоми відокремлюваності. Компактність.

12. Метризованість.

13. Збіжність. Границя послідовності. Необхідні й достатні умови єдиності границі. Простори Фреше-Урисона. Неперервність у термінах збіжності. Збіжність у конструкціях.

## Рекомендована література

### а) основна:

1. Н. С. Синюков, Т. И. Матвеевко. Топология. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. — 264 с.
2. M. G. Murdeshwar. General Topology. — New Age International Pvt Ltd Publishers, 2008. — 386 p.
3. Р. Энгелькинг. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

### б) додаткова:

4. Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян. Общая топология: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979. — 336 с.
5. Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко. Введение в топологию: Учеб. пособие. — 2-е изд., доп. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 416 с.
6. L. A. Steen, J. A. Seebach, Jr. Counterexamples in topology. — New York: Dover Publications, Inc., 1995. — 244 p.

## Зміст

<b>Вступ</b> . . . . .	<b>3</b>
Мета і завдання навчальної дисципліни . . . . .	3
Предмет навчальної дисципліни . . . . .	3
Вимоги до знань та вмінь студентів. . . . .	3
Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. . . . .	3
Система контролю та оцінювання знань. . . . .	3
<b>Навчально-тематичний план лекцій, практичних занять і     самостійної роботи</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Теми лекцій, практичних занять та завдання для     самостійної роботи</b> . . . . .	<b>6</b>
<i>I семестр</i> . . . . .	6
Змістовий модуль 1. Основні поняття топології. Операції на топологічних просторах . . . . .	6
Тема 1. Основні поняття топології . . . . .	6
Тема 2. Операції на топологічних просторах . . . . .	6
Типове завдання модульної контрольної роботи . . . . .	7
Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 1 . . . . .	8
Змістовий модуль 2. Топологічні властивості . . . . .	9
Тема 3. Топологічні властивості . . . . .	9
Типове завдання модульної контрольної роботи . . . . .	9
Контрольні запитання та завдання до змістового модуля 2 . . . . .	10
Перелік питань, які виносяться на іспит . . . . .	10
<b>Рекомендована література</b> . . . . .	<b>12</b>