Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

І. М. Циганівська

ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ ТА ЧЕРЕПИЧНІ ПОРЯДКИ

Методична розробка для студентів
механіко-математичного факультету

Київ — 2012

УДК 512.552

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. В. В. Кириченко,
д-р фіз.-мат. наук, проф. А. П. Петравчук

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №3 від 8 жовтня 2012 року)

І. М. Циганівська. Частково впорядковані множини та черепичні порядки: Методична розробка для студентів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. К.: Відділ оперативної поліграфії механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2012. — 60 с.

Методична розробка з тем «Частково впорядковані множини», «Черепичні порядки», передбачених навчальними планами механіко-математичного факультету, а саме програмою спецкурсу «Кільця та модулі».

УДК 512.552

Зміст

Передмова

Методична розробка призначена для студентів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також може бути використаний іншими навчальними закладами, у яких вивчається спецкурс «Кільця та модулі». Він містить теоретичний матеріал та приклади розв'язування задач.

Матеріал методичної розробки розбито на два розділи: «Частково впорядковані множини», «Черепичні порядки». В першому розділі розглядаються Q-еквівалентні частково впорядковані множини, скінченні частково впорядковані множини, $(0,1)$ порядок та скінченні ланцюги Маркова, матриці суміжності допустимих сагайдаків без петель та індекси скінченних частково впорядкованих множин з 5-ти елементів. У другому розділі розглядаються нетерові справа напівпервинні $SPSD$-кільця, сагайдаки черепичних порядків, проективні резольвенти і глобальна розмірність кілець, черепичні порядки в $M_5(D)$ скінченної глобальної розмірності. Кожен параграф містить теоретичні відомості та приклади.

Розділ 1

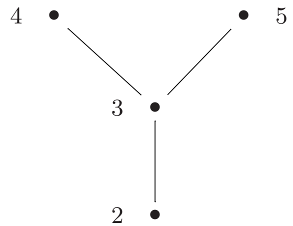
Частково впорядковані множини

1.1. Q-еквівалентні частково впорядковані множини

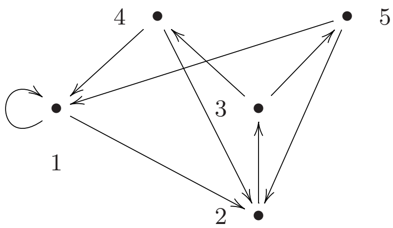
Довільній скінченній ч.в.м. $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$, як і раніше, ставимо у відповідність зведену (0,1)-матрицю $\mathcal{E}_{\mathcal{P}} = (\alpha_{ij})$ наступним чином: $\alpha_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \preceq j$, інакше $\alpha_{ij} = 1$. Тоді $A(\mathcal{P}) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}_{\mathcal{P}}\}$ є зведеним (0,1)-порядком.

Початкова ч.в.м. $\mathcal{P}$ і $[Q]$—матриця суміжності матриці показників $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ мають багато спільного між собою. Нагадаємо, що діаграма $\mathcal{P}$ — це сагайдак $Q(\mathcal{P})$, який містить стрілку $i \to j$ тоді і лише тоді, коли $i \prec j$ і не існує такого натурального $k \in \mathcal{P}$, що $i \prec k \prec j$. Нехай $\tilde{Q}(\mathcal{P})$ ("розширена діаграма" $\mathcal{P}$) отримана з $Q(\mathcal{P})$ додаванням стрілки $i \to j$ для кожної такої пари (i, j), що i максимальний в $\mathcal{P}$, а j — мінімальний.

Наприклад, якщо $\mathcal{P}$ наступна двозв'язна ч.в.м.



тоді $\tilde{Q}(\mathcal{P})$ має вигляд



Такі розширені діаграми використовувалися і раніше, див. теорему 2.2.5.

Встановимо наступний зв'язок між $\tilde{Q}(\mathcal{P})$ та "$[Q]$-матрицею"матриці показників $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$. Нехай (p_{ij}) — матриця суміжності $\tilde{Q}(\mathcal{P})$ і $(q_{ij}) = [Q(\mathcal{E}_{\mathcal{P}})]$, тоді $p_{ij} = q_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Це доводиться простою перевіркою різних випадків, як показано нижче. Існує 4 можливі випадки: $i = j$, $i \prec j$, $i \prec j$, i та j непорівняльні. Нехай $\mathcal{E}_{\mathcal{P}} = (\alpha_{ij})$, де

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \preceq j \\ 1, & \text{інакше} \end{cases}$$

Тоді

$$q_{ij} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij},$$

де

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ \alpha_{ij}, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$$

Відмітимо, що для всіх i, j завжди $\beta_{ii} + \beta_{ij} - \beta_{ij} = \beta_{ii} = 1$ і $\beta_{ik} + \beta_{kj} \geqslant \beta_{ij}$, тому $0 \leqslant q_{ij} \leqslant 1$. Також, завжди $\beta_{ij} + \beta_{jj} - \beta_{ij} = \beta_{jj} = 1$. Отже, для обчислення q_{ij} лишається розглядати лише $k \notin \{i, j\}$.

Випадок 1: $i = j$. Тут два підвипадки.

Випадок 1.1: $i = j$ та i непорівняльне з будь-яким іншим елементом з $\mathcal{P}$, тобто $\{i\}$ одноелементна компонента $\mathcal{P}$. Тоді i одночасно максимальний та мінімальний та існує петля в i у $\tilde{Q}(\mathcal{P})$. Тому $p_{ii} = 1$. З іншого боку, $\beta_{ii} + \beta_{ii} - \beta_{ii} = \beta_{ii} = 1$ і для всіх $k \neq i$ (якщо такі існують) $\beta_{ik} + \beta_{ki} - \beta_{ii} = 1 + 1 - 1 = 1$, бо k та i непорівняльні. Отже, $q_{ii} = 1$.

Випадок 1.2: $i = j$ та i порівняльний з деяким $k \neq i$. Тоді $1 = \alpha_{ik} + \alpha_{ki} = \beta_{ik} + \beta_{ki}$. Так $\beta_{ik} + \beta_{ki} - \beta_{ii} = 0$ і $q_{ii} = 0$. З іншого боку, $p_{ii} = 0$, бо i не максимальний та не виконується $i \prec i$.

Випадок 2: $i \prec j$. Тут знову два підвипадки.

Випадок 2.1: $i \prec j$ і не існує такого k, що $i \prec k \prec j$, тобто j накриває i. Тоді $p_{ij} = 1$. З іншого боку, $\alpha_{ij} = 0$. Відмітимо, що завжди $\beta_{ii} + \beta_{ij} - \beta_{ij} = 1$, $\beta_{ij} + \beta_{jj} - \beta_{ij} = 1$, тому для обчислення q_{ij} лишається розглядати лише $k \notin \{i, j\}$. Щодо розташування k відносно i та j можливі 4 підвипадки.

$i \prec k$ і $k \prec j$. Це неможливо в умовах випадку 2.1.

$i \prec k$, але не виконується $k \prec j$. Тоді $\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij} = \alpha_{ik} + \beta_{kj} - \alpha_{ij} = 0 + 1 - 0 = 1$.

не виконується $i \prec k$, але $k \prec j$. Тоді $\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = 1 + 0 - 0 = 1$.

не виконується жодне з $i \prec k$ та $k \prec j$. Тоді $\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = 1 + 1 - 0 = 2$. Отже, $q_{ij} = 1$.

Випадок 2.2: існує таке k, що $i \prec k \prec j$. Тоді $p_{ij} = 0$ і для цього конкретного k $\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = 0 + 0 - 0 = 0$, тому $q_{ij} = 0$.

Випадок 3: $j \prec i$. В цьому випадку завжди $\alpha_{ij} = 1$. Можливі три підвипадки.

Випадок 3.1: i максимальний, а j мінімальний. Тоді $p_{ij} = 1$. З іншого боку, для $k \neq i, j$ не може виконуватись $i \prec k$ або $k \prec j$ (бо i максимальний, а j мінімальний). Тож для всіх $k \neq i, j$ $\alpha_{ik} = 1$, $\alpha_{kj} = 1$. Також не виконується $i \prec j$, звідки $\alpha_{ij} = 1$. Таким чином, $\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = 1 + 1 - 1 = 1$, звідки $q_{ij} = 1$.

Випадок 3.2: i не максимальний. Тоді $p_{ij} = 0$. З іншого боку, існує таке k, що $i \prec k$. І тому, для цього конкретного k, $\alpha_{ik} = 0$, $\alpha_{kj} = 1$, а отже $\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = 0 + 1 - 1 = 0$, звідки $q_{ij} = 0$.

Випадок 3.3: j не мінімальний. Тоді $p_{ij} = 0$. З іншого боку, існує таке k, що $k \prec j$. І тому для цього конкретного k, $k \prec j \prec i$, маємо $\alpha_{ik} = 1$, $\alpha_{kj} = 0$, $\alpha_{ij} = 1$, отже $\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = 1 + 0 - 1 = 0$, отже $q_{ij} = 0$.

Випадок 4: i та j непорівняльні. Тоді $\alpha_{ij} = 1$. Тут знову можливі три підвипадки.

Випадок 4.1: i максимальний, а j мінімальний. Тоді $p_{ij} = 1$. Нехай $k \notin \{i, j\}$. Як завжди достатньо розглядати лише такі k. Оскільки i максимальний, то не може бути, що $i \prec k$, а отже $\alpha_{ik} = 1$. Також з того, що j мінімальний, випливає, що неможливий випадок $k \prec j$, звідки $\alpha_{kj} = 1$. Таким чином, $\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij} = 1 + 1 - 1 = 1$ для всіх k, звідки $q_{ij} = 1$.

Випадок 4.2: i не максимальний. Тоді $p_{ij} = 0$. Оскільки i не максимальний, то існує таке k, що $i \prec k$, і тому для цього конкретного k $\alpha_{ik} = 0$. Також $\alpha_{kj} = 1$, бо інакше ми б отримали $i \prec k \preceq j$, звідки б випливало, що i та j порівняльні. Отже, $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = 0 + 1 - 1 = 0$ для цього конкретного k, а отже $q_{ij} = 0$.

Випадок 4.3: j не мінімальний. Тоді існує таке k, що $k \prec j$, і тому $\alpha_{kj} = 0$. Але не може виконуватись $i \preceq k$, бо тоді $i \preceq k \preceq j$ робило б i та j порівняльними. Таким чином, $\alpha_{ik} = 1$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} = 1 + 0 - 1 = 0$ для цього конкретного k, а отже $q_{ij} = 0$.

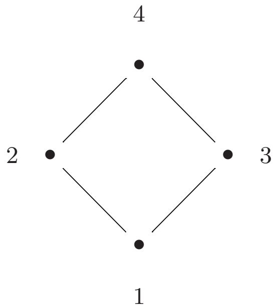
Це завершує доведення того, що матриця суміжності $\tilde{Q}(\mathcal{P})$ співпадає з $[Q(\mathcal{E}_{\mathcal{P}})]$.

Означення 1.1.1. Дві скінченні частково впорядковані множини S і T називаються *Q-еквівалентними*, якщо зведені (0,1)-матриці показників $\mathcal{E}_S$ та

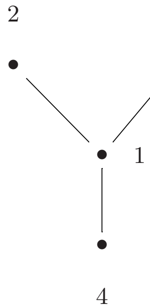
$\mathcal{E}_T$ еквівалентні (тобто $\mathcal{E}_T$ може бути отримана з $\mathcal{E}_S$ застосуванням перетворень типу (1) та (2) з означення еквівалентних матриць).

Приклад 1.1.2. Наступні ч.в.м. Q-еквівалентні:

$S =$



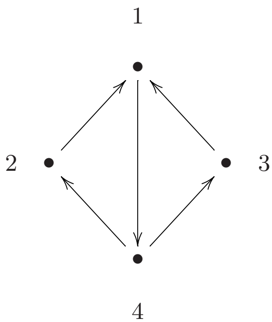
та $T =$



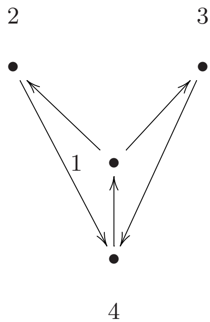
Очевидно,

$$\mathcal{E}_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ та } \mathcal{E}_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{Q}(S) =$



$\tilde{Q}(T) =$



$$[\tilde{Q}(S)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [Q(\mathcal{E}_S)]$$

$$[\tilde{Q}(T)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [Q(\mathcal{E}_T)]$$

Відмітимо, що дві матриці суміжності переходять одна в одну одночасною перестановкою першого та четвертого рядків та стовпчиків, звідки сагайдаки $\tilde{Q}(S)$ та $\tilde{Q}(T)$ є ізоморфними.

Матрицю $\mathcal{E}_T$ можна отримати з $\mathcal{E}_S$, якщо від останнього її рядка відняти 1, а до останнього стовпчика додати.

Скінченну ч.в.м. зі зв'язною діаграмою будемо називати **зв'язною**.

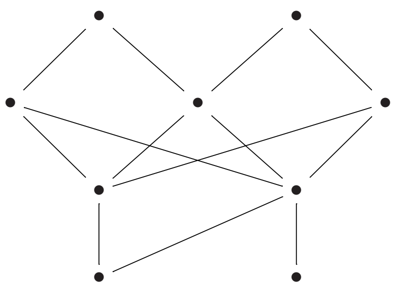
Твердження 1.1.3. *Нехай дві ч.в.м. S і T, такі що матриці показників $\mathcal{E}_S$ та $\mathcal{E}_T$ еквівалентні. Тоді $Q(\mathcal{E}_S)$ та $Q(\mathcal{E}_T)$ ізоморфні.*

Доведення випливає з тверджень 6.1.17 та 6.1.18, доведених в [18].

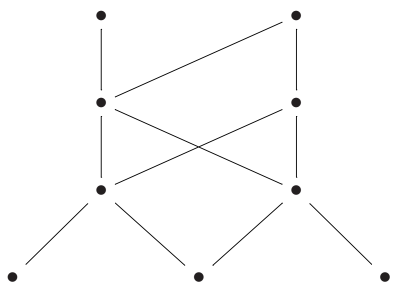
Теорема 1.1.4. *Дві скінченні зв'язні ч.в.м. $\mathcal{P}_1$ і $\mathcal{P}_2$ є Q-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли ці ч.в.м. або ізоморфні, або існують підмножини цих ч.в.м. $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}'_1 \cup \mathcal{P}''_1$ і $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}'_2 \cup \mathcal{P}''_2$ такі, що кожен елемент з $\mathcal{P}''_1$ не більший за будь-який елемент з $\mathcal{P}'_1$, та кожен елемент з $\mathcal{P}'$ не більший за будь-який елемент з $\mathcal{P}''_2$, і виконується $\mathcal{P}'_1 \simeq \mathcal{P}'_2, \mathcal{P}''_1 \simeq \mathcal{P}''_2$.*

Приклад 1.1.5. Наступні дві ч.в.м. задовольняють умовам теореми 1.1.4

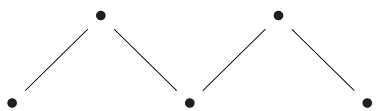
(a)



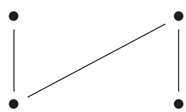
(b)



Обидві ч.в.м. містять розбиття ч.в.м.



та



і більше того, в цих ч.в.м. кожен елемент з однієї підмножини не більший за будь-який елемент з іншої.

Доведення. Нехай $\mathcal{P}_1$ і $\mathcal{P}_2$ скінченні пронумеровані зв'язні Q-еквівалентні ч.в.м. Тоді $\tilde{Q}(\mathcal{P}_1) \simeq \tilde{Q}(\mathcal{P}_2)$. Тут $\tilde{Q}(\mathcal{P}_i)$ сагайдак з матрицею суміжності $[Q(\mathcal{E}_{\mathcal{P}_i})]$. Перенумеруємо елементи множини $\mathcal{P}_2$ (перенумерація вершин сагайдака не впливає на його вигляд) таким чином, що $\tilde{Q}(\mathcal{P}_1) = \tilde{Q}(\mathcal{P}_2)$ (включаючи нумерацію). Нехай $\mathcal{P}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{P}_2 = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ і $[\tilde{Q}(\mathcal{P}_1)] = [\tilde{Q}(\mathcal{P}_2)] = (\gamma_{ij})$ (де $[\tilde{Q}(\mathcal{P}_i)]$ — матриця суміжності $\tilde{Q}(\mathcal{P}_i)$).

Якщо $q_{ij} = 0$, то елемент α_j не накриває елемент α_i і або α_i не максимальний, або α_j не мінімальний (або одночасно і те, і те); елемент γ_j не накриває елемент γ_i і або γ_i не максимальний, або γ_j не мінімальний (або одночасно і те, і те).

Якщо $q_{ij} = 1$, тоді або елемент α_j накриває α_i, або α_i максимальний, а α_j мінімальний; і або елемент γ_j накриває γ_i, або γ_i максимальний, а γ_j мінімальний.

Припустимо, що $Q(\mathcal{P}_1) \neq Q(\mathcal{P}_2)$. Тоді (оскільки $\tilde{Q}(\mathcal{P}_1) = \tilde{Q}(\mathcal{P}_2)$) існують такі i та j, що α_j накриває α_i, але γ_i максимальний, а γ_j мінімальний (чи навпаки).

Нехай $\alpha_j = \alpha_{j1}$ накриває елементи $\alpha_i = \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$. Тоді $\gamma_j = \gamma_{j_1}$ мінімальний, і $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_s}$ максимальні елементи, більш того, не існує інших максимальних елементів в ч.в.м. $\mathcal{P}_2$. Насправді, якби існував максимальний елемент $\gamma_{i_0} \notin \{\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_s}\}$ в $\mathcal{P}_2$, то існувала би стрілка з γ_{i_0} в γ_j в $\tilde{Q}(\mathcal{P}_2)$ і також стрілка з α_{i_0} до α_j в $\tilde{Q}(\mathcal{P}_1)$. Але це б означало, що α_j накриває α_{i_0}. Тому $\alpha_{i_0} \in \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}$, а це суперечність.

Якщо $\mathcal{P}_{2\,\min} = \{\gamma_{j_1}, \ldots, \gamma_{j_r}\}$, то всі $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_r}$ накривають кожен елемент з $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}\}$.

Нехай $\mathcal{P}_{1\,\max} = \{\alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_m}\}$, $\mathcal{P}_{1\,\min} = \{\alpha_{l_1}, \ldots, \alpha_{l_t}\}$, $\mathcal{P}_{2\,\max} = \{\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_s}\}$. Тоді, якщо $\alpha_p = \alpha_{p_v} \in \mathcal{P}_{1\,\max}$ і $\alpha_l = \alpha_{l_u} \in \mathcal{P}_{1\,\min}$, тоді γ_{l_u} накриває γ_{p_v}.

Позначимо $\mathcal{P'}_1 = \{\alpha_q \in \mathcal{P}_1 : \alpha_q > \alpha_{i_1}\}$, $\mathcal{P''}_1 = \mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P'}_1$; $\mathcal{P''}_2 = \{\gamma_q \in \mathcal{P}_2 : \gamma_q > \alpha_{p_1}\}$, $\mathcal{P'}_2 = \mathcal{P}_2 \setminus \mathcal{P''}_2$.

Тоді $Q(\mathcal{P'}_1) = Q(\mathcal{P'}_2)$ і $Q(\mathcal{P''}_1) = Q(\mathcal{P''}_2)$. Дійсно, оскільки жодна з множин $\mathcal{P'}_1$, $\mathcal{P'}_2$, $\mathcal{P''}_1$, $\mathcal{P''}_2$ не містить одночасно елементи з $\mathcal{P}_{1\,\max}$ і $\mathcal{P}_{1\,\min}$; $\mathcal{P}_{2\,\max}$ і $\mathcal{P}_{2\,\min}$, з рівності $q_{ij} = 1$ для, наприклад, $\alpha_i, \alpha_j \in \mathcal{P'}_1$, випливає, що α_j накриває α_i та γ_j накриває γ_i, де $\gamma_i, \gamma_j \in \mathcal{P''}_2$.

Навпаки, нехай зв'язні ч.в.м. $\mathcal{P}_1$ та $\mathcal{P}_2$ або ізоморфні, або існує розбиття цих множин $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P'}_1 \cup \mathcal{P''}_1$ і $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P'}_2 \cup \mathcal{P''}_2$ такі, що кожен елемент з $\mathcal{P''}_1$ не більший за будь-який елемент з $\mathcal{P'}_1$, та кожен елемент з $\mathcal{P'}$ не більший за будь-який елемент з $\mathcal{P''}_2$, і виконується $\mathcal{P'}_1 \simeq \mathcal{P'}_2, \mathcal{P''}_1 \simeq \mathcal{P''}_2$. Якщо $\mathcal{P}_1 \simeq \mathcal{P}_2$, то, очевидно, $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1) \simeq \mathcal{E}(\mathcal{P}_2)$ (перенумерація елементів ч.в.м. $\mathcal{P}_2$ відповідає еквівалентним перетворенням другого типу матриці $\mathcal{E}(\mathcal{P}_2)$). Якщо $\mathcal{P}_1 \not\simeq \mathcal{P}_2$ та існує вказане розбиття, то

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\mathcal{P}'_1) & U \\ 0 & \mathcal{E}(\mathcal{P}''_1) \end{pmatrix}, \mathcal{E}(\mathcal{P}_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\mathcal{P}''_2) & U \\ 0 & \mathcal{E}(\mathcal{P}'_2) \end{pmatrix},$$

де U матриця, в якої всі елементи рівні 1, $\mathcal{E}(\mathcal{P}'_1) = \mathcal{E}(\mathcal{P}'_2)$, $\mathcal{E}(\mathcal{P}''_1) = \mathcal{E}(\mathcal{P}''_2)$ (тому $\mathcal{P}'_1 \simeq \mathcal{P}'_2, \mathcal{P}''_1 \simeq \mathcal{P}''_2$).

Матриці $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$ та $\mathcal{E}(\mathcal{P}_2)$ еквівалентні. Дійсно, спочатку застосовуючи перетворення другого типу до матриці $\mathcal{E}(\mathcal{P}_2)$, отримаємо матрицю

$$\mathcal{E}(\overline{\mathcal{P}}_2) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\overline{\mathcal{P}}'_2) & 0 \\ U & \mathcal{E}(\overline{\mathcal{P}}''_2) \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{P}}''_2) = \mathcal{E}(\mathcal{P}''_2) = \mathcal{E}(\mathcal{P}''_1)$, $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{P}}'_2) = \mathcal{E}(\mathcal{P}'_2) = \mathcal{E}(\mathcal{P}'_1)$. Потім, застосовуючи перетворення першого типу до матриці $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{P}}_2)$, отримаємо матрицю $\mathcal{E}(\mathcal{P}_1)$. Таким чином, ч.в.м. $\mathcal{P}_1$ та $\mathcal{P}_2$ Q-еквівалентні. Теорему доведено. □

В доведенні теореми ми також довели наступне твердження.

Твердження 1.1.6. *Для скінченних зв'язних ч.в.м. S і T, якщо $Q(\mathcal{E}_S)$ і $Q(\mathcal{E}_T)$ ізоморфні, то $\mathcal{E}_S$ і $\mathcal{E}_T$ еквівалентні.*

Теорема 1.1.7. *Дві скінченні незв'язні ч.в.м. $\mathcal{P}$ та S Q-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли діаграми $Q(\mathcal{P})$ та $Q(S)$ ізоморфні.*

Доведення. Нехай $\mathcal{P}$ та S дві незв'язні Q-еквівалентні ч.в.м., $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, $S = S_1 \cup S_2$, $Q(\mathcal{P}) = Q(\mathcal{P}_1) \cup Q(\mathcal{P}_2)$, $Q(S) = Q(S_1) \cup Q(S_2)$ і, крім того, між $Q(\mathcal{P}_1)$ та $Q(\mathcal{P}_2)$ і між $Q(S_1)$ та $Q(S_2)$ нема стрілок. Оскільки множини $\mathcal{P}$ та S Q-еквівалентні, то за твердженням 1.1.3 сагайдаки $\tilde{Q}(\mathcal{P})$ та $\tilde{Q}(S)$ ізоморфні. Нехай $\varphi : \tilde{Q}(\mathcal{P}) \to \tilde{Q}(S)$ ізоморфізм сагайдаків. Нехай $\mathcal{P}_{1\,\max} = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}\}$, $\mathcal{P}_{1\,\min} = \{\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_s}\}$, $\mathcal{P}_{2\,\max} = \{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_t}\}$, $\mathcal{P}_{2\,\min} = \{\alpha_{l_1}, \ldots, \alpha_{l_r}\}$. З кожної вершини α_{i_v} множини $\mathcal{P}_{1\,\max}$, так як і з кожної вершини α_{k_u} множини $\mathcal{P}_{2\,\max}$, в сагайдаку $\tilde{Q}(\mathcal{P})$ стрілки ідуть до кожної вершини α_{j_p} множини $\mathcal{P}_{1\,\min}$ і α_{l_q} множини $\mathcal{P}_{2\,\min}$. Тоді з кожної вершини $\varphi(\alpha_{i_v})$ множини $\varphi(\mathcal{P}_{1\,\max})$, так як і з кожної вершини $\varphi(\alpha_{k_u})$ множини $\varphi(\mathcal{P}_{2\,\max})$ (відповідно), в сагайдаку $\tilde{Q}(S)$ стрілки ідуть до кожної вершини $\varphi(\alpha_{j_p})$ множини $\varphi(\mathcal{P}_{1\,\min})$ і $\varphi(\alpha_{l_q})$ множини $\varphi(\mathcal{P}_{2\,\min})$.

Припустимо, що $\varphi(\alpha_{i_v})$ не належить множині $S_{\max}$. Тоді $\varphi(\alpha_{j_1}), \ldots, \varphi(\alpha_{j_s}), \varphi(\alpha_{l_1}), \ldots, \varphi(\alpha_{l_r}) \notin S_{\min}$ і $\varphi(\alpha_{i_1}), \ldots, \varphi(\alpha_{i_m}), \varphi(\alpha_{k_1}), \ldots, \varphi(\alpha_{k_t}) \notin S_{\max}$. В $\tilde{Q}(S)$ є стрілки з кожної з вершин $\varphi(\alpha_{i_1}), \ldots, \varphi(\alpha_{i_m}); \varphi(\alpha_{k_1}), \ldots, \varphi(\alpha_{k_t})$ у кожну з вершин $\varphi(\alpha_{j_1}), \ldots, \varphi(\alpha_{j_s}); \varphi(\alpha_{l_1}), \ldots, \varphi(\alpha_{l_r})$. Оскільки жодна з вершин $\varphi(\alpha_{i_v}), v = 1, \ldots, m$; $\varphi(\alpha_{k_w}), w = 1, \ldots, t$ не є максимальною, то ці стрілки мають бути в $Q(S)$. Отже $\varphi(\alpha_{i_v}), \varphi(\alpha_{k_w}), \varphi(\alpha_{j_x}), \varphi(\alpha_{l_y})$ утворюють зв'язний підсагайдак T сагайдака $Q(S)$.

Тепер припустимо, що в S нема мінімального елемента з $\varphi(\alpha_{i_1}),\dots,\varphi(\alpha_{i_m})$. Будь-який шлях з P_{1min} у P_{1max} обов'язково містить підшлях P_{1min} у P_{1max}, який повністю належить діаграмі $Q(P_1)$. Аналогічно будь-який шлях з $\varphi(P_{1min})$ у $\varphi(P_{1max})$, якщо він проходить через елементи з S_2, містить ланцюги L_1 з $\varphi(P_{1min})$ до S_{1max} та L_2 з S_{1min} до $\varphi(P_{1max})$. Тому такий шлях значно довший за шлях, утворений ланцюгом L_1, стрілкою з S_{1max} у S_{1min} і ланцюгом L_2. Звідси отримуємо, що цикл з $\tilde{Q}(P_1)$ повністю належить $\tilde{Q}(S_1)$.

Цілком аналогічно цикл з $\tilde{Q}(P_2)$ також належить $\tilde{Q}(S_1)$. А це означає, що ч.в.м. S є зв'язною, що суперечить умові теореми. Отже, в S є мінімальний елемент серед елементів

$$S^{(1)} = \{\varphi(\alpha_{i_1}),\dots,\varphi(\alpha_{i_m})\}; S^{(2)} = \{\varphi(\alpha_{k_1}),\dots,\varphi(\alpha_{k_t}\}.$$

У той же час в S є максимальний елемент серед елементів

$$S^{(3)} = \{\varphi(\alpha_{j_1}),\dots,\varphi(\alpha_{j_s})\}; S^{(4)} = \{\varphi(\alpha_{l_1}),\dots,\varphi(\alpha_{l_r}\}.$$

Розглянемо чотири можливі випадки.

Випадок 1: В S є мінімальний елемент з множини $S^{(1)}$, нехай $\varphi(\alpha_{i_b})$, і максимальний з $S^{(4)}$, нехай $\varphi(\alpha_{l_c})$. Тоді в $\tilde{Q}(S)$ є стрілка з $\varphi(\alpha_{l_c})$ в $\varphi(\alpha_{i_b})$, а тому і стрілка $\alpha_{l_c} \to \alpha_{i_b}$ в $\tilde{Q}(\mathcal{P})$, що неможливо, бо α_{l_c} мінімальний, а α_{i_b} максимальний і $\alpha_{l_c} \neq \alpha_{i_b}$ (бо вони належать $\mathcal{P}_2$ та $\mathcal{P}_1$ відповідно).

Випадок 2: В S є мінімальний елемент з множини $S^{(1)}$, нехай $\varphi(\alpha_{i_b})$, і максимальний з $S^{(3)}$, нехай $\varphi(\alpha_{j_c})$. Тоді є стрілка з $\varphi(\alpha_{j_c})$ в $\varphi(\alpha_{i_b})$. Тому є стрілка $\alpha_{j_c} \to \alpha_{i_b}$ в $\tilde{Q}(\mathcal{P})$. Але α_{i_b} максимальний, а α_{j_c} мінімальний. Тому це можливо лише у випадку $\alpha_{j_c} = \alpha_{i_b}$, тобто ми маємо петлю в α_{j_c}, а також $\{\alpha_{j_c}\}$ і $\{\varphi(\alpha_{j_c})\}$ є одноелементними компонентами в $\mathcal{P}$ та S. Нехай α максимальний в $\mathcal{P}\setminus\{\alpha_{i_b}\}$. Тоді в $\tilde{Q}(\mathcal{P})$ є стрілка $\alpha \to \alpha_{i_b}$. Тобто також є стрілка $\varphi(\alpha) \to \varphi(\alpha_{i_b})$ в $\tilde{Q}(S)$. Ця стрілка не може належати $Q(S)$, бо $\{\varphi(\alpha_{i_b})\}$ є одноелеменною компонентою в S. Таким чином, $\varphi(\alpha) \to \varphi(\alpha_{i_b})$ належить $\tilde{Q}(S) \setminus Q(S)$, що можливе лише у випадку, якщо $\varphi(\alpha)$ максимальний. А це призводить до суперечності тому, що існує такий α_{i_v}, що $\varphi(\alpha_{i_v})$ не є максимальним.

Випадок 3: В S є мінімальний елемент з множини $S^{(2)}$ і максимальний з $S^{(3)}$. Цей випадок з відповідними змінами повторює випадок 1.

Випадок 4: В S є мінімальний елемент з множини $S^{(2)}$ і максимальний з $S^{(4)}$. Цей випадок з відповідними змінами повторює випадок 2.

Отже, всі можливі випадки призводять до суперечності, якщо припустити, що існує такий α_{i_v}, що $\varphi(\alpha_{i_v})$ не є максимальним. Так само припущення, що існує такий α_{k_u}, що $\varphi(\alpha_{k_u})$ не є мінімальним, призводить до суперечності.

Таким чином, $\varphi(\mathcal{P}_{max}) \subset S_{max}$. Аналогічним чином доводимо, що $\varphi(\mathcal{P}_{min}) \subset S_{min}$. Розглядаючи φ^{-1} замість φ, отримаємо $\varphi^{-1}(S_{max}) \subset \mathcal{P}_{max}$ та $\varphi^{-1}(S_{min}) \subset \mathcal{P}_{min}$. Тому $\varphi(\mathcal{P}_{max}) = S_{max}$ та $\varphi(\mathcal{P}_{min}) = S_{min}$.

Оскільки сагайдаки $\tilde{Q}(\mathcal{P})$ та $\tilde{Q}(S)$ ізоморфні, а також мінімальні та максимальні елементи під дією ізоморфізму переходять в мінімальні та максималні відповідно, то звуження ізоморфізму $\varphi : \tilde{Q}(\mathcal{P}) \to \tilde{Q}(S)$ на $Q(\mathcal{P})$ дає ізоморфізм $Q(\mathcal{P}) \to Q(S)$.

Навпаки, якщо $Q(\mathcal{P})$ та $Q(S)$ ізоморфні, то матриці показників $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ та $\mathcal{E}_S$ еквівалентні, тобто ч.в.м. $\mathcal{P}$ та S Q-еквівалентні. Теорему доведено. □

Діаграма $Q(\mathcal{P})$ скінченної ч.в.м. $\mathcal{P}$ є об'єднанням її зв'язних компонент $Q(\mathcal{P}_1), \ldots, Q(\mathcal{P}_s)$. Підмножини $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_s$ будемо називати **зв'язними компонентами** ч.в.м. $\mathcal{P}$.

Теорема 1.1.8. *Нехай $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_n$ та $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_m$ розбиття двох скінченних незв'язних ч.в.м. на їх зв'язні компоненти. Ч.в.м. $\mathcal{P}$ та $\mathcal{S}$ Q-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $n = m$ та існує така перестановка $\theta \in S_n$, що $\mathcal{P}_i$ і $\mathcal{S}_{\theta(i)}$ ізоморфні для всіх $i = 1, \ldots, n$.*

Доведення цієї теореми випливає з теореми 1.1.7

Теорема 1.1.9. *Для скінченних ч.в.м. S і T наступні умови еквівалентні: (a) $Q(\mathcal{E}_S)$ та $Q(\mathcal{E}_T)$ ізоморфні;*
(b) $\mathcal{E}_S$ та $\mathcal{E}_T$ еквівалентні.

Доведення. (b) $\Rightarrow$ (a) випливає з твердження 1.1.3
(a) $\Rightarrow$ (b) випливає з теореми 1.1.7 і теореми 2.2.5. □

1.2. Скінченні частково впорядковані множини, $(0,1)$ порядок та скінченні ланцюги Маркова.

Нагадаємо, що $\Lambda = \{O, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ називається $(0,1)$ порядком, якщо $\mathcal{E}(\Lambda)$ $(0,1)$ матриця.

Означення 1.2.1. Індексом $\mathrm{inx}(P)$ скінченної частково впорядкованої множини P називають максимальне власне значення матриці суміжності $\tilde{Q}(P)$. Цьому власному значенню відповідає одновимірний кореневий простір, тобто всі власні вектори $\vec{f}$, які мають вигляд $\vec{f} = \lambda \vec{f_0}$, де $\vec{f_0} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, причому всі $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Власний вектор $\vec{f} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$ називається *Фробеніусовим вектором.* Нумерація сагайдака Q називається *стандартною*, якщо $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$.

Таким чином, $\mathrm{inx}P$=$\mathrm{inx}\Lambda(P)$. В цьому випадку $\tilde{Q}(P) = Q(\mathcal{E}_P)$, де $\mathcal{E}_P$ — зведена матриця показників, яка відповідає P. За теоремою 6.1.15 [18] сагайдак $Q(\mathcal{E}_P)$ є сильно зв'язним.

Означення 1.2.2. Скінченна частково орієнтовна множина P називається регулярною, якщо матриця суміжності $[Q(\mathcal{E}_P)]$ матриці $Q(\mathcal{E}_P)$ примітивна, інакше P називають циклічною.

Означення 1.2.3. Кажуть, що дві частково впорядковані множини $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ і $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ —еквівалентні, якщо $\tilde{Q}(S) \simeq \tilde{Q}(T)$.

Приклад 1.2.4. Індекс скінченого впорядкованого ланцюга CH_n дорівнює 1.

Приклад 1.2.5. Нехай

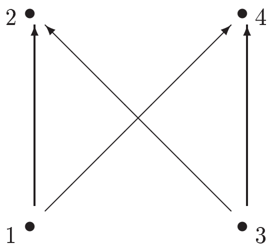
$$ACH_n = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ \bullet & \bullet & \ldots & \bullet & \bullet \end{Bmatrix}$$

антиланцюг довжиною n. Зрозуміло, $\tilde{Q}(ACH_n)$ повний простий сагайдак з n вершинами. Отже $inxACH_n = n$.

Приклад 1.2.6. Нехай $P_{n,m} = (m, m, \ldots, m)$ — примітивна частково впорядкована множина, сформована n лінійно впорядкованими непересічними множинами довжиною m кожна. Легко перевірити, що $\mathrm{inx} P_{n,m} = \sqrt[m]{n}$.

Приклад 1.2.7. Розглянемо

$P_4 =$



Позначимо

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

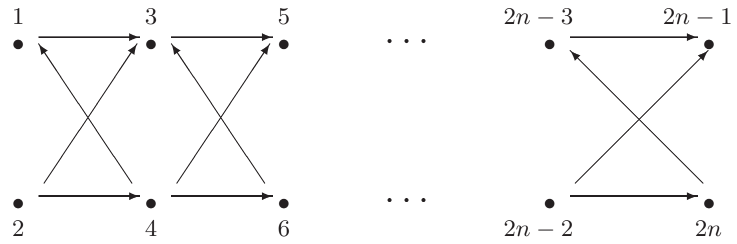
квадратну матрицю, всі елементи якої 1. Очевидно матриця суміжності $\tilde{Q}(P_4)$ дорівнює

$$[\tilde{Q}(P_4)] = \begin{pmatrix} 0 & U_2 \\ U_2 & 0 \end{pmatrix}$$

і $\mathrm{inx} P_4 = 2$.

Приклад 1.2.8. Нехай

$P_{2n} =$



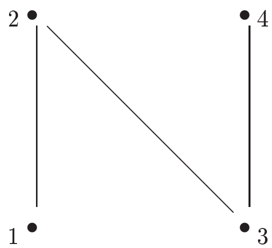
Очевидно

$$[\tilde{Q}(P_2n)] = \begin{bmatrix} 0 & U_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & U_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & U_2 \end{bmatrix}$$

і $inxP_{2n}$=2.

Приклад 1.2.9. Нехай

$N:$



частково впорядкована множина з 4 елементів. Очевидно

$$[\tilde{Q}(\mathcal{E}_N)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

і

$$\chi_B(x) = x^2(x^2 - 3).$$

Отже, $inx(N) = \sqrt{3}$ і власний вектор Фробеніуса дорівнює

$$\overrightarrow{f} = (2, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)^T.$$

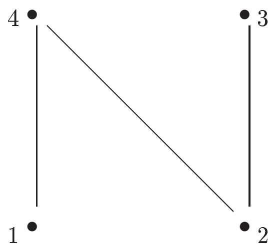
Нумерація (1.1) стандартна для власного вектора Фробеніуса ч.в.м. N. Зв'язок між матрицею переходів T_N ланцюга Маркова та матрицею суміжності $[Q(\mathcal{E}_N)]$

:

$$T_N = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно T_N задає ергодичний циклічний ланцюг Маркова. Отже частково впорядкована множина N циклічна. Нумерація N:



(1.2)

не є стандартною.

Дійсно нехай $\mathcal{E}'(N)$ — матриця показників, що відповідає ч.в.м. N відповідно до нумерації (1.2). Маємо

$$\tilde{[}Q(\mathcal{E}'_N)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і власний вектор Фробеніуса, який відповідає нумерації (1.2) — це $(2, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3})^T$. Отже, нумерація (1.2) не є стандартною.

Нижче надано список індексів і векторів Фробеніуса частково впорядкованих множин з не більш ніж 4 елементами.

Зауваження 1.2.10. Очевидно, $inxCH_n = 1$ і $inxACH_n = n$. Тоді вектор $(1,\ldots,1)^T$ — це вектор Фробеніуса CH_n і ACH_n.

I (1)=$\{\bullet\}$, $inx(I,1) = 1$.

II $(1) = \left\{\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\end{array}\right\}, \mathrm{inx}(II,1) = 1; (2) = \{\bullet \quad \bullet\}, \mathrm{inx}(II,2) = 2.$

III $(1) = \left\{\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\end{array}\right\}, \mathrm{inx}(III,1) = 1;$

$$(2) = \left\{\begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & & \bullet & & \\ & / & & \backslash & \\ \bullet & & & & \bullet \\ 1 & & & & 2 \end{array}\right\};\ (3) = \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & & & & 2 \\ \bullet & & & & \bullet \\ & \backslash & & / & \\ & & \bullet & & \\ & & 3 & & \end{array}\right\},$$

$\mathrm{inx}(III,2) = \mathrm{inx}(III,3) = \sqrt{2};\ \overrightarrow{f}(III,2) = \overrightarrow{f}(III,3) = (1,1,\sqrt{2})^T;$

$$(4) = \left\{\begin{array}{cc} & 3 \\ & \bullet \\ & | \\ \bullet & \bullet \\ 1 & 2 \end{array}\right\}, \mathrm{inx}(III,4) = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$(5) = \{\bullet \quad \bullet \quad \bullet\}, \mathrm{inx}(III,5) = 3; \overrightarrow{(}f)(III,4) = \left(1, \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)^T.$

IV $(1) = \left\{\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\\ \bullet\end{array}\right\}, \mathrm{inx}(IV,1) = 1;$

$$(2) = \left\{\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & & \bullet & & & \\ & & / & & \backslash & & \\ 2 & \bullet & & & & \bullet & 3 \\ & & \backslash & & / & & \\ & & & \bullet & & & \\ & & & 1 & & & \end{array}\right\}, \mathrm{inx}(IV,2) = \sqrt[3]{2}$$

$$(3) = \left\{\begin{array}{ccccc} 2 & & & & 3 \\ \bullet & & & & \bullet \\ & \backslash & \mathbf{1} & / & \\ & & \bullet & & \\ & & | & & \\ & & \bullet & & \\ & & 4 & & \end{array}\right\},\ (4) = \left\{\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & \bullet & & \\ & & | & & \\ & & \bullet & & \\ & / & 4 & \backslash & \\ \bullet & & & & \bullet \\ 2 & & & & 3 \end{array}\right\},$$

$\mathrm{inx}(IV,3) = \mathrm{inx}(IV,4) = \sqrt[3]{2};$
$\overrightarrow{f}(IV,2) = \overrightarrow{f}(IV,3) = \overrightarrow{f}(IV,4) = (\sqrt[3]{4}, 1, 1, [\sqrt[3]{2})^T$

$$(5) = \left\{\begin{array}{ccccc} & & & \bullet & 3 \\ & & & | & \\ 4 & \bullet & & \bullet & 2 \\ & & \diagdown & | & \\ & & & \bullet & 1 \end{array}\right\},\ (6) = \left\{\begin{array}{ccccc} & & & \bullet & 1 \\ & & \diagup & | & \\ 4 & \bullet & & \bullet & 3 \\ & & & | & \\ & & & \bullet & 2 \end{array}\right\};$$

$\chi_{5,6}(x) = x(x^3 - x - 1)$ і $1.32 < \mathrm{inx}(IV,5) = \mathrm{inx}(IV,6) < 1.33$;

$\overrightarrow{f}(IV,5) = \overrightarrow{f}(IV,6) = (\lambda^2, 1, \lambda, \lambda)^T$, де $\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$.

$$(7) = \left\{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ \bullet & \bullet \\ | & | \\ \bullet & \bullet \\ 1 & 2 \end{array}\right\},\ \mathrm{inx}(IV,7) = \sqrt{2};\ \overrightarrow{f}(IV,7) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1\right)^T$$

$$(8) = \left\{\begin{array}{cccc} & & \bullet & 4 \\ & & | & \\ & & \bullet & 3 \\ & & | & \\ 1 & \bullet & \bullet & 2 \end{array}\right\},\ \chi_8(x) = x(x^3 - x^2 - 1) \text{ і } 1.46 < \mathrm{inx}(IV,8) < 1.47;$$

$\overrightarrow{f}(IV,8) = (1, \lambda - 1, \lambda^2 - 1, 1)^T$ де $\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$.

$$(9) = \left\{\begin{array}{ccc} 4 & & 2 \\ \bullet & & \bullet \\ | & \diagdown & | \\ \bullet & & \bullet \\ 3 & & 1 \end{array}\right\},\ \mathrm{inx}(IV,9) = \sqrt{3};\ \overrightarrow{f}(IV,9) = (2, \sqrt{3}, 1, \sqrt{3})^T.$$

$$(10) = \left\{\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \bullet & & \\ & \diagup & | & \diagdown & \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ 1 & & 2 & & 3 \end{array}\right\},\ (11) = \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 3 \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & \diagdown & | & \diagup & \\ & & \bullet & & \\ & & 4 & & \end{array}\right\},$$

$\mathrm{inx}(IV,10) = \mathrm{inx}(IV,11) = \sqrt{3}$;

$\overrightarrow{f}(IV,10) = \overrightarrow{f}(IV,11) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 3)^T$.

$$(12) = \left\{\begin{array}{cccccc} & & & 4 & & \\ & & & \bullet & & \\ & & \diagup & & \diagdown & \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet \\ 1 & 2 & & & & 3 \end{array}\right\},\ (13) = \left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & & & & 3 \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet \\ & & \diagdown & & \diagup & \\ & & & \bullet & & \\ & & & 4 & & \end{array}\right\},$$

$\mathrm{inx}(IV,12) = \mathrm{inx}(IV,13) = 2$; $\overrightarrow{f}(IV,12) = (2,1,1,2)^T$; $\overrightarrow{f}(IV,13) = (1,1,1,1)^T$.

$$(14) = \left\{\begin{array}{ccc} 3 & & 4 \\ \bullet & & \bullet \\ | & \times & | \\ \bullet & & \bullet \\ 1 & & 2 \end{array}\right\}, \ \mathrm{inx}(IV, 14) = 2; \ \overrightarrow{f}(IV, 14) = (1, 1, 1, 1)^T;$$

$$(15) = \left\{\begin{array}{ccc} & & 4 \\ & & \bullet \\ & & | \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right\}, \ \chi_{15}(x) = x^2(x^2 - 2x - 1) \text{ і } \mathrm{inx}(IV, 15) = 1 + \sqrt{2};$$

$\overrightarrow{f}(IV, 15) = (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2})^T$;

$(16) = \{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet\}$, $\mathrm{inx}(IV, 16) = 4$.

Помітимо, що підмножини $(IV, 2)$, $(IV, 3)$ та $(IV, 4)$ Q-еквівалентні. Інші неодноелементні класи Q-еквівалентності це $\{(III, 2), (III, 3)\}$, $\{(IV, 10), (IV, 11)\}$. Для підмножин $N = (IV, 9)$ і $F_4 = (IV, 11)$ маємо $\mathrm{inx}N = \mathrm{inx}F_4 = \sqrt{3}$, але вони не є Q-еквівалентними.

Підмножини $(IV, 12)$ та $(IV, 13)$ антиізоморфні і $w(IV, 12) = w(IV, 13) = 3$, але $(IV, 12)$ і $(IV, 13)$ не Q-еквівалентні, оскільки $\overrightarrow{f}(IV, 13) = (2, 1, 1, 2)^T$ і $\overrightarrow{f}(IV, 13) = (1, 1, 1, 1)^T$. Підмножини $(IV, 13)$ і $(IV, 14)$ мають однакові індекси і вектори Фробеніуса, але вони не Q-еквівалентні, тому що $\tilde{Q}(IV, 13)$ має петлю, а $\tilde{Q}(IV, 14)$ ні.

1.3. Матриці суміжності допустимих сагайдаків без петель

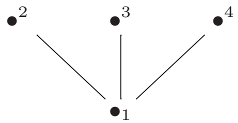
В [Harary, 1969] (Appendix 2, Digraph diagrams) є список простих сагадаків без петель для $s \leqslant 4$ (s - кількість вершин Q). Кількість таких сагайдаків 3 для $s = 2$, 16 для $s = 3$ та 218 для $s = 4$. Використовуючи цей список, дуже легко визначити кількість сильнозв'язних сагайдаків серед них. Отримаємо 1 для $s = 2$, 5 для $s = 3$ та 83 для $s = 4$.

Звідси отримаємо список допустимих сагайдаків без петель для $2 \leqslant s \leqslant 4$. Кількість таких сагайдаків 1 для $s = 2$, 2 для $s = 3$ та 11 для $s = 4$.

Будемо використовувати наступні позначення:

$$H_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\Omega_s = (\omega_{ij})$, де $\omega_{ij} = 0$ для $i \leqslant j$ та $\omega_{ij} = i - j$ для $i \geqslant j$; $H_s, F_s, \Omega_s \in$ $\in M_n(\mathbb{Z})$. Зауважимо, що запис F_s узгоджений з (з точністю до перепозначення) записом F_4 у випадку $(IV, 11)$ у кінці попереднього підрозділу в тому, що $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матриця показників частково впорядкованої множини



.

Твердження 1.3.1. *Існує единий допустимий сагайдак без петель для $s = 2$, який є $C_2 = Q(H_2)$ та існує в точності два допустимих сагайдака без петель $C_3(Q) = (H_3)$ та $Q(\Omega_3)$ для $s = 3$.*

Доведення. □

Будемо вважати, що зведені матриці показників та їх перший рядок нульовий, це можна робити, тому що що ми розглядаємо допустимі сагайдаки, які є сагайдаками зведених матриць показників.

Нехай $s = 2$. Тоді $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ та $\mathcal{E}^{(2)} =$ $= \begin{pmatrix} (2,\alpha) & (1,\alpha) \\ \alpha+1 & (2,\alpha) \end{pmatrix}$ де $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = min(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників, тоді з $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$ де $\beta_{ii} =$ $= 1$ та $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$, коли $i \neq j$, $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{kj})$, тоді $[Q(\mathcal{E})] =$ $= \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$. Отже $[Q[\mathcal{E}]] = \begin{pmatrix} (1,\alpha-1) & 1 \\ 1 & (1,\alpha-1) \end{pmatrix}$ та $Q(\mathcal{E})$ також або C_2, або $\mathcal{L}C_2$ для $\alpha \geqslant 2$ (C_2 - простий ланцюг з n вершинами, $[\mathcal{L}C_2] = [C_n] + E_n$, E_n - одинична $n \times n$ матриця).

Нехай тепер $s = 3$. Тоді $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \delta \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \delta \\ \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}$ та

$$\mathcal{E}^{(2)} = \begin{pmatrix} (2,\alpha,\beta) & (1,\gamma) & (1,\delta) \\ (\alpha+1, \beta+\delta) & (2,\alpha,\gamma+\delta) & (\alpha,\delta+1) \\ (\beta+1,\alpha+\gamma) & (\beta,\gamma+1) & (2,\beta,\gamma+\delta) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що можна розглядати випадок тільки $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta$. Тоді $\alpha = 1$. Дійсно, якщо $\alpha \geqslant 2$ ми маємо петлю в першій вершині. Якщо ж $\beta = 1$ ми маємо або $\mathcal{E} \sim H_3$, або $\mathcal{E} \sim F_3$. Зрозуміло, що $\Omega_3 \sim F_3$. Якщо ж $\beta = 2$, то $\mathcal{E} \sim \Omega_3$.

Нехай $s = 4$. Як і вище ми розглядаємо допустимі сагайдаки без петель. Позначення $\mathcal{E} \sim \Theta$ означає еквівалентність цих матриць при перетвореннях першого роду.

Очевидно, що $d(\mathcal{E}) = d(\Theta)$ для еквівалентних зведених матриць $\mathcal{E}$ та Θ.

Дуже зручно подати перші шість матриць показників в наступній послідовності:

$$(1)\ d = 6,\ \mathcal{E}_1 = H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ [Q(\mathcal{E}_1)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2)\ d = 7,\ \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ [Q(\mathcal{E}_2)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

та $\mathcal{E}_2 \sim \Theta_2$, де $\Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$(3)\ d = 8,\ \mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ [Q(\mathcal{E}_3)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

та $\mathcal{E}_3 \sim \Theta_3$, де $\Theta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$(4)\ d = 9,\ \mathcal{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ [Q(\mathcal{E}_4)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

та $\mathcal{E}_4 \sim \Theta_4$, де $\Theta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$(5)\ d=10,\ \mathcal{E}_5=\Omega_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\end{pmatrix},\ [Q(\Omega_4)]=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$(6)\ d=9,\ \mathcal{E}_6=F_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},\ [Q(F_4)]=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix};$$

$$(7)\ d=8,\ \mathcal{E}_7=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\2&1&1&0\end{pmatrix},\ [Q(\mathcal{E}_7)]=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix};$$

та $\mathcal{E}_7\sim\Theta_7$, де $\Theta_7=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$;

$$(8)\ d=10,\ \mathcal{E}_8=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&2&0&0\\2&2&1&0\end{pmatrix},\ [Q(\mathcal{E}_8)]=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$(9)\ d=10,\ \mathcal{E}_9=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\2&1&0&0\\2&2&1&0\end{pmatrix},\ [Q(\mathcal{E}_9)]=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},$$

$\mathcal{E}_9$ — горенштейнова з $\sigma(\mathcal{E}_9)=(1423)$

$$(10)\ d=11,\ \mathcal{E}_{10}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&0\\2&2&0&0\\2&2&1&0\end{pmatrix},\ [Q(\mathcal{E}_{10})]=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$(11)\ d=12,\ \mathcal{E}_{11}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\2&2&0&0\\2&2&1&0\end{pmatrix},\ [Q(\mathcal{E}_{11})]=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

1.4. Індекси скінченних частково впорядкованих множин з 5-ти елементів.

Твердження 1.4.1. *Якщо скінченні частково впорядковані множини S і P Q-еквівалентні, то лівий і правий власні вектори матриці $\left[\tilde{Q}\left(S\right)\right]$ можна отримати з лівого та правого власних векторів матриці $\left[\tilde{Q}\left(P\right)\right]$ перестановкою їх координат.*

Доведення. Якщо частково впорядкованих множини S і P — Q-еквівалентні, то сагайдаки $\tilde{Q}\left(S\right)$ і $\tilde{Q}\left(P\right)$– ізоморфні. Тоді існує переставна матриця P_τ для деякої підстановка τ, така що

$$\left[\tilde{Q}\left(S\right)\right] = P_\tau^T \left[\tilde{Q}\left(P\right)\right] P_\tau.$$

Нехай λ– індекс частково впорядкованих множин S і P, і $\vec{x}_P$– правий власний вектор матриці $\left[\tilde{Q}\left(P\right)\right]$, а $\vec{y}_P$– лівий власний вектор матриці $\left[\tilde{Q}\left(P\right)\right]$.

Тоді

$$\left[\tilde{Q}\left(S\right)\right] P_\tau^T \vec{x}_P = P_\tau^T \left[\tilde{Q}\left(P\right)\right] P_\tau P_\tau^T \vec{x}_P = \lambda \left(P_\tau^T \vec{x}_P\right)$$

$$\left(\vec{y}_P P_\tau\right) \left[\tilde{Q}\left(S\right)\right] = \vec{y}_P P_\tau P_\tau^T \left[\tilde{Q}\left(P\right)\right] P_\tau = \lambda \left(\vec{y}_P P_\tau\right).$$

Тобто $P_\tau^T \vec{x}_P = \vec{x}_S$– правий власний вектор матриці $\left[\tilde{Q}\left(S\right)\right]$, а $\vec{y}_P \vec{P}_\tau = \vec{y}_S$– лівий власний вектор матриці $\left[\tilde{Q}\left(S\right)\right]$.

□

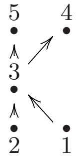
Для кожної частково впорядкованої множини з 5-ти елементів зі зв'язною діаграмою обчислюємо індекс цієї частково впорядкованої множини та правий і лівий власні вектори, що йому відповідають.

$[Q\left(P\right)]$ $\quad Q\left(P\right)$ $\quad \left[\tilde{Q}\left(P\right)\right]$

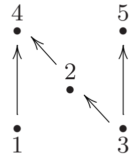
1. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

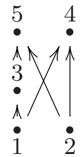
$\chi_{\left[\tilde{Q}(P)\right]}(\lambda) = \lambda^5 - 1$
$inxP = 1$
$\vec{x}_P = (1, 1, 1, 1, 1)$

2. $\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$

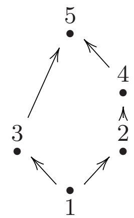
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^2$
$inxP = \sqrt[3]{4}$
$\vec{x}_P = (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}, 1, 1)$

3. $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$

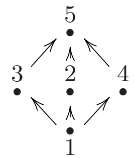
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2$ $\qquad \vec{x}_P = (1, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1, 1)$
$inxP = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $\qquad \vec{y}_P = (1, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1, 1, \frac{2}{1+\sqrt{5}})$

4. $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$

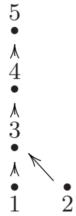
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^3 - \lambda^2$
$inxP \approx 1,879385242$

5. $\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

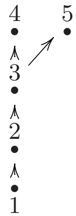
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^2 - \lambda$
$inxP \approx 1,22074$

6. $\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

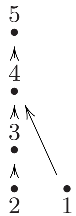
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^2$ $\qquad \vec{x}_P = (\sqrt[3]{3}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1)$
$inxP = \sqrt[3]{3}$ $\qquad \vec{y}_P = (1, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1)$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

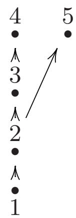
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda$
$inxP = \sqrt[4]{2}$
$\vec{x}_P = (\frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 1)$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda$
$inxP = \sqrt[4]{2}$
$\vec{x}_P = (\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{2^3}, 1, 1)$

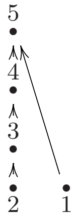
9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^2 - \lambda$
$inxP \approx 1,22074$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^2 - \lambda$
$inxP \approx 1,22074$

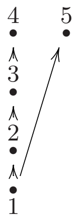
11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda \quad \vec{x}_P = (\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}}, 1)$
$inxP = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

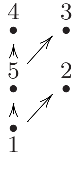


$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda$
$inxP = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$$\vec{x}_P = (\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}, \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(-1+\sqrt{5}\right), 1, 1)$$

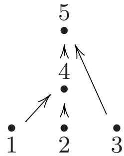
13. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2 \qquad \vec{x}_P = (\lambda, \frac{2}{\lambda}, 1, 1, 1)$
$inxP = \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{78}}{9}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{78}}{9}} \qquad \vec{y}_P = (\lambda, 1, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, 1)$

14. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

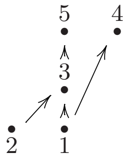
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$

$inxP = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{78}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{78}}{9}}$

$\vec{x}_P = (\lambda, 1, 1, \lambda, \lambda^2)$

$\vec{y}_P = (1, 1, 1, \frac{2}{\lambda}, \lambda)$

15. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

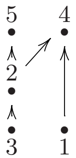
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$

$inxP = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{78}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{78}}{9}}$

$\vec{x}_P = (\lambda + 1, 1, \lambda, \lambda^2, \lambda^2)$

$\vec{y}_P = (1, 1, \frac{2}{\lambda}, \frac{2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda})$

16. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

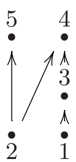
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$

$inxP = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{78}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{78}}{9}}$

$\vec{x}_P = (\lambda^2 - 1, 2, 1, \lambda, \lambda)$

$\vec{y}_P = (\lambda, 1, \lambda, \frac{\lambda+1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$

17. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



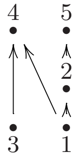
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2$

$inxP = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

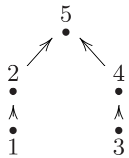
$\vec{x}_P = (\frac{4}{1+\sqrt{5}}, \frac{4}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1, 1)$

$\vec{y}_P = (\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1)$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

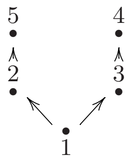
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2$ $\quad \vec{x}_P = (1, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1, 1)$

$inxP = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $\quad \vec{y}_P = (\frac{\sqrt{5}+3}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+3}{2}, \sqrt{5}+1, 1)$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

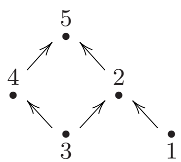
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^2$ $\quad \vec{x}_p = (\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1)$

$inxP = \sqrt[3]{2}$

20. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

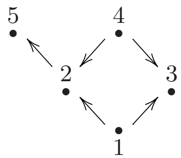
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^2$ $\quad \vec{x}_P = (\sqrt[3]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1, 1)$

$inxP = \sqrt[3]{2}$

21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

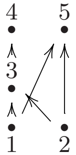
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^2$ $\quad \vec{x}_P = (\frac{2}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1)$

$inxP = \sqrt[3]{3}$

22. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^2 \quad \vec{x}_P = (\sqrt[3]{3}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1, 1)$
$inxP = \sqrt[3]{3}$

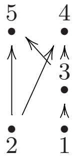
23.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2$
$inxP \approx 1,769292354$

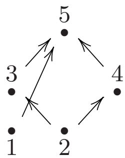
24.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2$
$inxP \approx 1,769292354$

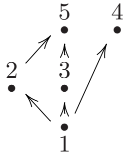
25.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$
$inxP \approx 1,521379707$

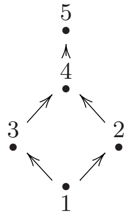
26.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$
$inxP \approx 1,521379707$

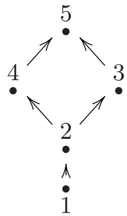
27. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda \quad \vec{x}_P = (\sqrt[4]{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 1)$
$inxP = \sqrt[4]{2}$

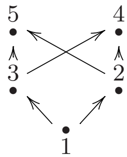
28. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda$
$inxP = \sqrt[4]{2}$

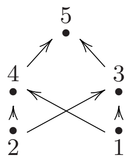
29. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^2$
$inxP = \sqrt[3]{4}$
$\vec{x}_P = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, 1, 1)$

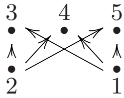
30. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^2$
$inxP = \sqrt[3]{4}$
$\vec{x}_P = (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 1)$

31. $\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

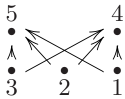


$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3$
$inxP = \sqrt{6}$

$\vec{x}_P = (\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1, 1, 1)$

32. $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

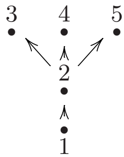


$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3$
$inxP = \sqrt{6}$

$\vec{x}_P = (\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1, 1)$

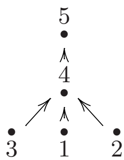
33. $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^2$
$inxp = \sqrt[3]{3}$
$\vec{x}_P = (\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^2}, 1, 1, 1)$

34. $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

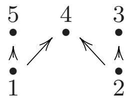


$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^2$
$inxP = \sqrt[3]{3}$

$\vec{x}_P = (\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1)$

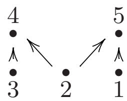
35.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3$
$inxP = 2$
$\vec{x}_P = (1, 1, 1, 1, 1)$
$\vec{y}_P = (2, 2, 2, 1, 1)$

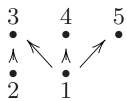
36.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3$
$inxP = 2$
$\vec{x}_P = (2, 1, 1, 2, 2)$
$\vec{y}_P = (1, 1, 1, 1, 1)$

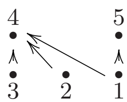
37.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

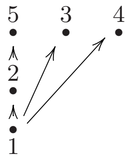
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3$
$inxP = 2$
$\vec{x}_P = (3, 1, 2, 2, 2)$
$\vec{y}_P = (2, 2, 2, 1, 1)$

38.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



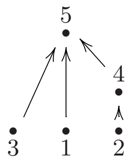
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3$
$inxP = 2$
$\vec{x}_P = (2, 1, 1, 2, 2)$
$\vec{y}_P = (2, 2, 2, 3, 1)$

39. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

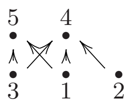
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2$
$inxP = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
$\vec{x}_P = (\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), 1, 1, 1)$

40. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

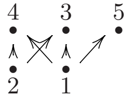
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2$
$inxP = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
$\vec{x}_P = (\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1)$

41. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

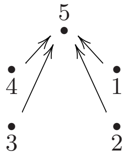
$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3$
$inxP = \sqrt{5}$
$\vec{x}_P = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1, 1)$

42. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3$
$inxP = \sqrt{5}$
$\vec{x}_P = (\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1, 1, 1)$

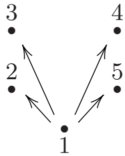
43. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3$
$inxP = 2$
$\vec{x}_P = (1, 1, 1, 1, 2)$

44. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3$
$inxP = 2$
$\vec{x}_P = (2, 1, 1, 1, 1)$

За теоремою 4 [6] серед наведених 44-ох зв'язних частково впорядкованих множин Q-еквівалентними є вище наведені частково впорядковані множини під номерами:

1. 2, 29, 30
2. 39, 40
3. 5, 9, 10
4. 6, 33, 34
5. 21, 22
6. 7, 8, 27, 28
7. 11, 12
8. 13, 25
9. 14, 26
10. 19, 20
11. 23, 24
12. 31, 32
13. 43, 44

За твердженням 1.4.1 їх ліві та праві власні вектори можна отримувати перестановкою координат з лівого та правого власних векторів Q-еквівалентних множин.

Аналіз координат лівих та правих власних векторів, що відповідають одному індексу частково впорядкованих множин, які не є Q-еквівалентними, дає наступну теорему.

Теорема 1.4.2. *Дві частково впорядковані множини S і P з 5-ти елементів зі зв'язною діаграмою Q-еквівалентні, якщо*

(a) $inxS = inxP$;

(b) координати правого $\vec{x}_S$ та лівого $\vec{y}_S$ власного вектора матриці $\left[\tilde{Q}\left(S\right)\right]$ можна отримати перестановкою координат правого $\vec{x}_P$ та лівого $\vec{y}_P$ власного вектора матриці $\left[\tilde{Q}\left(P\right)\right]$.

Розділ 2

Черепичні порядки

2.1. Нетерові справа напівпервинні $SPSD$-кільця

Розглянемо наступну теорему про розклад нетерових справа напівперинних SPSD-кілець.

Теорема 2.1.1. *Наступні умови для нетерового справа напівпервинного кільця A еквівалентні:*

(a) кільце A - напівдистрибутивне.

(b) кільце A - прямий добуток напівпростого артінового кільця та напівмаксимального кільця.

Доведення. (a)$\Rightarrow$(b) З теореми 14.4.3 [17] випливає, що A є скінченним прямим добутком нерозкладних напівпростих кілець. Кожне нерозкладне кільце є або простим артіновим, або напівппервинним напівдосконалим кільцем,у якого основні кільця ендоморфізмів головних модулів є неартіновими. У другому випадку, за наслідком 14.4.11 [17], таке кільце є напівмаксимальним.

(b)$\Rightarrow$(a) Очевидно, що напівпервинне артінове кільце є напівпервинним $SPSD$-кільцем. А напівмаксимальне кільце є $SPSD$-кільцем за твердженням 14.4.3 [17] та за теоремою редукціїї для $SPSD$-кілець. $\square$

Теорема 2.1.2. *Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

де $n \geqslant 1$, $\mathcal{O}$ - дискретне нормоване кільце з простим елементом π та цілими числами α_{ij} такими, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k ($\alpha_{ii} = 0$ для всіх i).

Доведення. За твердженням 14.4.12 [17] напівмаксимальне кільце є скінченним прямим добутком первинних напівмаксимальних кілець. Покажемо, що первинне напівмаксимальне кільце ізоморфне кільце вигляду (2.1). Нехай $1 = e_1 + \ldots + e_m$ — розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = e_i A e_j$ для $i, j = 1, \ldots, m$. Позначимо через B_{ij} $(i \neq j)$ наступний мінор другого порядку: $B_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{pmatrix}$. Якщо кільце B_{ij} - не є зведеним, тоді $B_{ij} \simeq M_2(A_{ii})$ та B_{ij} - нетерове зліва. Якщо B_{ij}-зведене, тоді $A_{ij}a_{ji} \subset A_{ij}$, $\varphi_{ji} : A_{ij} \to A_{ii}$ - мономорфізм лівих A_{ii}-модулів (для усіх ненульових a_{ji}) таких, що $\varphi_{ji}(a_{ij}) = a_{ij}a_{ji}$. Якщо A_{ij} не є скінченно породженим, то A_{ii} містить лівий A_{ii}-підмодуль $A_{ij}a_{ji}$, який не є скінченно породженим , де $a_{ji} \neq 0$. Отримали протиріччя. Отже, за лемою 13.3.4 [17], $A_{ij} \simeq A_{ii}$ та B_{ij} - нетерове зліва за теоремою 3.6.1 [17]. Застосувавши індукцію за m та теорему 3.6.1 [17], ми отримаємо, що A — нетерове зліва. Таким чином, A — первинне нетерове $SPSD$-кільце. За твердженням 9.3.10 [17] A є правим порядком у простому артіновому кільці $Q = M_n(\mathcal{D})$. Вважаємо, що кожен локальний ідемпотент e_i з вище розглянутого розкладу $1 = e_1 + \ldots + e_m$ є локальним в $Q = M_n(D)$. Тоді два розклади $1 = e_1 + \ldots + e_m$ та $1 = e_{11} + \ldots + e_{nn}$ спряжені. Тому $m = n$ і ми можемо вважати, що матричні ідемпотенти є локальними ідемпотентами кільця A.

Позначимо A_{ii} через A_i. Маємо $Q = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ — тіло часток, e_{ij} - матричні одиниці, які комутують з елементами з $\mathcal{D}$) та $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}A_{ij}$, де $A_{ij} \subset \mathcal{D}$. Всі A_i - дискретні нормовані кільця, $A_{ij}A_{jk} \subset A_{ik}$ та $A_{ij} \neq 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$ (A - первинне та $e_{ii}Ae_{jj} = A_{ij} \neq 0$).

Доведемо, що $A_{ij} = d_{ij}A_j = A_i d_ij$, де $d_{ij} \in A_{ij} \subset \mathcal{D}$. Дійсно, нехай R_i - радикал Джекобсона A_i та нехай $\pi_i A_i = A_i \pi_i = R_i$. За наслідком 14.2.4 [17] $R_i A_{ij} = A_{ij} R_j$. Візьмемо елемент $d_{ij} \in A_{ij}$, $d_{ij} \neq 0$ такий, що $A_i d_{ij} + R_i A_{ij} = A_{ij}$. За лемою Накаями $A_{ij} = d_{ij}A_j = A_i d_{ij}$. Нехай $T = diag(d_{12}^{-1}, d_{23}^{-1}, \ldots, d_{n-1n}^{-1}, 1)$. Розглянемо TAT^{-1}. Можемо вважати, що наступні рівності $d_{12} = \ldots = d_{n-1n}$ мають місце A.Тоді $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$. Покладемо $A_1 = \mathcal{O}$, де $\mathcal{O}$ - дискретне нормоване кільце (не обов'язково комутативне). Отже $A_{ij} \supset \mathcal{O}$ для $i \leqslant j$. З $A_{ij}A_{ji} \subset \mathcal{O}$ отримаємо, що $A_{ij}A_{ji} \supset A_{ji}$ та $A_{ji} \subset \mathcal{O}$ для $i \leqslant j$. Таким чином, можемо вважати, що $d_{ji} = \pi^{\alpha_{ji}}$, де $\mathcal{M} = \pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ — єдиний максимальний ідеал $\mathcal{O}$, $\alpha_{ji} \geqslant 0$ для $j \geqslant i$. Очевидно, що $d_{ij} = \pi^{\alpha_{ij}}$, де $\alpha_{ij} \geqslant -\alpha_{ji}$. Тому ми отримали кільце вигляду (2.1) Обернене твердження слідує з означення напівмаксимального кільця. □

Означення 2.1.3. Кільце A називається черепичним порядком, якщо воно первинне нетерове $SPSD$-кільце.

Зауваження 2.1.4. Нехай $\mathcal{O}$ - дискретно нормоване кільце. Тоді з теорем 2.1.1 та 2.1.2 випливає, що кожен черепичний порядок має вигляд (2.1).

Кільце $\mathcal{O}$ вкладене в класичне кільце дробів $\mathcal{D}$, яке є тілом. Тому (2.1) означає множину всіх матриць $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$ таких, що $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, де $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ — матричні одиниці в $M_n(\mathcal{D})$. Очевидно, що $M_n(\mathcal{D})$ - класичне кільце часток кільця A.

Дотримуючись термінології *В.А.Ятегаонкара* та *Р.Б.Тарсі*, кільце $A \subset\in \in M_n(K)$, де K - тіло часток комутативного дискретного нормованого кільця $\mathcal{O}$, називається черепичним порядком над $\mathcal{O}$, якщо $M_n(K)$ - класичне кільце часток A, $e_{ii} \in A$ $e_{ii}Ae_{ii} = \mathcal{O}$ для $i = 1, \ldots, n$, де $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ - матричні одиниці $M_n(K)$ (дивись *V.A.Jategaonkar, Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring // Trans. Amer. Math. Soc., 196, 1974, pp. 313-330*).

Тому дане вище означення черепичного порядку — це узагальнення означення черепичного порядку над дискретним нормованим кільцем в сенсі В.А.Ятегаонкара та Р.Б.Тарсі.

Позначимо через $M_n(\mathbb{Z})$ кільце усіх квадратних $n \times n$-матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Нехай $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$. Будемо називати матрицю $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для $i, j, k = 1, \ldots, n$ та $\alpha_{ii} = 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Матрицю $\mathcal{E}$ будемо називати зведеною матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$.

Будемо використовувати наступне позначення: $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$, де $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця A, тобто $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, де e_{ij} - матричні одиниці. Якщо черепичний порядок зведений, тоді $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, тобто $\mathcal{E}(A)$ — зведена.

Означення 2.1.5. Нехай $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце. Правий (відповідно лівий) A-модуль M (відповідно N) називається правою (відповідно лівою) A-граткою, якщо M (відповідно N) — вільний скінченно породжений $\mathcal{O}$-модуль.

Наприклад, всі скінченно породжені проективні A-модулі — A-гратки.

Нехай A — черепичний порядок. Позначимо через $Lat_r(A)$ (відповідно $Lat_l(A)$) категорію правих (відповідно лівих) A-граток. Позначаємо через $S_r(A)$ (відповідно $S_l(A)$) частково впорядковану множину (за включенням), яка утворена усіма A-гратками, які містяться в фіксованому правому простому $M_n(\mathcal{D})$-модулі U (відповідно в лівому простому $M_n(\mathcal{D})$-модулі V). Такі A-гратки називаються незвідними.

Відмітимо, що кожен простий правий $M_n(\mathcal{D})$-модуль ізоморфний простому правому $M_n(\mathcal{D})$-модулю U з $\mathcal{D}$-базисом $e_1, \ldots, e_n$ таким, що $e_i e_{jk} = \delta_{ij} e_k$, де $e_{jk} \in M_n(\mathcal{D})$ - матричні одиниці. Відповідно кожен простий лівий $M_n(\mathcal{D})$-модуль ізоморфний простому лівому $M_n(\mathcal{D})$-модулю V з $\mathcal{D}$-базисом $e_1, \ldots, e_n$ таким, що $e_{ij} e_k = \delta_{jk} e_i$.

Нехай $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ - черепичний порядок та нехай U (відповідно V) - простий правий (відповідно лівий) $M_n(\mathcal{D})$-модуль як і вище.

Тоді кожна права (відповідно ліва) незвідна A-гратка M (відповідно N), яка лежить в U (відповідно в V) - це A-модуль з $\mathcal{O}$-базисом $(\pi^{\alpha_1}e_1, \dots, \pi^{\alpha_n}e_n)$, де

$$\begin{cases} \alpha_i \quad + \quad \alpha_{ij} \quad \geqslant \quad \alpha_j, & \text{для правого } A\text{-модуля } M \\ \alpha_{ij} \quad + \quad \alpha_j \quad \geqslant \quad \alpha_i, & \text{для лівого } A\text{-модуля } N. \end{cases} \tag{2.2}$$

Тому кожна незвідна A-решітка M може бути визначена за допомогою вектора з цілими координатами $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, які задовольняють (2.2). Будемо писати $[M] = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Відношення впорядкованості на множині таких векторів та операції на них, які відповідають сумі та перетину незвідних решіток є очевидними.

Зауваження 2.1.6. Зрозуміло, що дві незвідні A-решітки $M_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ та $M_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i = \beta_i + z$ для $i = 1, \dots, n$ та фіксованого $z \in \mathbb{Z}$. Будемо позначати через $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ вектор-стовпчик з координатами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Зазначимо, що частково впорядковані множини $S_r(A)$ та $S_l(A)$ не залежать від вибору простих $M_n(\mathcal{D})$-модулів U та V.

Твердження 2.1.7. *Частково впорядковані множини $S_r(A)$ та $S_l(A)$ є антиізоморфними дистрибутивними решітками.*

Доведення. Оскільки A — напівдистрибутивне кільце, то $S_r(A)$ $(S_l(A))$ є дистрибутивною решіткою по відношенню до суми та перетину підмодулів.

Нехай $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_r(A)$. Покладемо $M^* = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)^T \in S_l(A)$. Якщо ж $N = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T \in S_l(A)$, тоді $N^* = (-\beta_1, \dots, -\beta_n) \in S_r(A)$.

Зрозуміло, що операція $*$ задовольняє наступні умови:

1. $M^{**} = M$; 2. $(M_1 + M_2)^* = M_1^* \cap M_2^*$; 3. $(M_1 \cap M_2)^* = M_1^* + M_2^*$ у правосторонньому випадку, також аналогічно записуються тотожності для лівостороннього випадку. Тому відображення $* : S_r(A) \to S_l(A)$ є антиізоморфним. $\square$

Зауваження 2.1.8. Відображення $*$ визначає дуальність для незвідних A-решіток.

Якщо $M_1 \subset M_2$ $(M_1, M_2 \in S_r(A)$, тоді $M_2^* \subset M_1^\star$. У цьому випадку A-решітка M_2 називається надмодулем A-решітки M_1 (відповідно $M_1^\star$ надмодуль $M_2^\star$).

2.2. Сагайдаки черепичних порядків

Нагадаємо, що сагайдак називається **сильно зв'язним**, якщо в ньому існує шлях між будь-якими двома вершинами. Одноточковий сагайдак без стрілок будемо розглядати як сильно зв'язний сагайдак. Сагайдак Q без кратних стрілок і кратних петель називається **простим**, тобто Q є простим тоді і тільки тоді, коли його матриця суміжності $[Q]$ є (0,1)-матрицею.

Теорема 2.2.1. *Сагайдак $Q(A)$ нетерового справа та зліва напівпервинного напівдосконалого кільця A сильно зв'язний.*

Доведення випливає з теореми 11.6.3 і твердження 9.2.13 [17]. Використовуємо позначення з теореми 11.6.3 [17]. Якщо $Q(A)$ не є сильно зв'язним, то кільце $(g_1+g_2)A(g_1+g_2)$ не є напівпервинним. Дійсно, для ненульового ідеалу $J = \begin{pmatrix} 0 & g_1Ag_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ маємо $J^2 = 0$.

Нехай I двосторонній ідеал черепичного порядку A. Очевидно,

$$I = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\mu_{ij}}\mathcal{O},$$

де e_{ij} матричні одиниці. Позначимо через $\mathcal{E}(I) = (\mu_{ij})$ матрицю показників ідеала I. Нехай I та J двосторонні ідеали кільця A, $\mathcal{E}(I) = (\mu_{ij})$, $\mathcal{E}(J) = (\nu_{ij})$. Легко бачити, що $\mathcal{E}(IJ) = (\delta_{ij})$, де $\delta_{ij} = \min_k\{\mu_{ik} + \nu_{kj}\}$.

Теорема 2.2.2. *Сагайдак $Q(A)$ черепичного порядку A над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ простий і сильно зв'язний. Якщо A зведений, то $Q(A) = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R)$.*

Доведення. Приймаючи до уваги, що A первинне напівдосконале нетерове кільце, за теоремою 2.2.1 можна зробити висновок, що $Q(A)$ сильно зв'язний сагайдак. Нехай A зведений порядок. Тоді $\mathcal{E}(A)$ — зведена матриця. Будемо використовувати наступні позначення: $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$; $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1,\ldots,n$ і $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ $(i,j = 1,\ldots,n)$; $\mathcal{E}(R^2) = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$ для $i,j = 1,\ldots,n$. Оскільки $\mathcal{E}(A)$ зведена, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geqslant 1$ для $i,j = 1,\ldots,n$, тобто $\gamma_{ii} = \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\beta_{ik} + \beta_{ki}\} = \min_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq i}\{\beta_{ik} + \beta_{ki}\}$. Отже, γ_{ii} рівне 1 або 2. Якщо $i \neq j$, то $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ і $\gamma_{ij} = \min\{\min_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq i,j}\{\alpha_{ik} + \alpha_{kj}\}, \alpha_{ij} + 1\}$, тобто γ_{ij} рівне α_{ij} або $\alpha_{ij} + 1$. Довільній незвідній A−гратці M з $\mathcal{O}$−базисом $(\pi^{\alpha_1}e_1,\ldots,\pi^{\alpha_n}e_n)$ поставимо у відповідність n−кортеж $[M] = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Розглянемо

$$[P_i] = (\alpha_{i1},\ldots,0,\ldots,\alpha_{in}),$$

$$[P_iR] = (\alpha_{i1},\ldots,1,\ldots,\alpha_{in}) = (\beta_{i1},\ldots,\beta_{in}).$$

Покладемо $[P_iR^2] = (\gamma_{i1},\ldots,\gamma_{in})$. Тоді $\vec{q}_i = [P_iR^2] - [P_iR]$ є (0,1)-вектором. Припустимо, що у векторі $\vec{q}_i$ одиниці знаходяться на місцях $j_1,\ldots,j_m$. Приймаючи до уваги лему про анулювання, це означає $P_iR/P_iR^2 = U_{j_1}\oplus\ldots\oplus U_{j_m}$. З означення $Q(A)$ маємо рівно одну стрілку з вершини i до кожної з вершин $j_1,\ldots,j_m$. Таким чином, матриця суміжності $[Q(A)]$ має вигляд:

$$[Q(A)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R).$$

Теорему доведено. □

Означення 2.2.3. Черепичний порядок $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ називається (0,1)-*порядком*, якщо $\mathcal{E}(A)$ є (0,1)-матрицею.

Надалі під (0,1)-порядком завжди матимемо на увазі черепичний (0,1)-порядок над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$.

Зведеному (0,1)-порядку A ставимо у відповідність частково впорядковану множину

$$P_A = \{1, \ldots, n\}$$

з відношенням $\leqslant$, визначеним наступним чином: $i \leqslant j \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0$.

Очевидно, $(P, \leqslant)$ є частково впорядкованою множиною (ч.в.м.).

Навпаки, довільній скінченній ч.в.м. $P = \{1, \ldots, n\}$ поставимо у відповідність зведену (0,1)-матрицю $\mathcal{E}_P = (A_{ij})$ наступним чином: $A_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \leqslant j$, інакше $A_{ij} = 1$. Тоді $A(P) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}_P\}$ є зведеним (0,1)-порядком.

Ми дамо конструкцію, яка для заданої скінченної ч.в.м. $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ дає сильно зв'язний сагайдак без кратних стрілок і кратних петель.

Позначимо через P_{max} (P_{min}) множину максимальних (мінімальних) елементів P та через $P_{max} \times P_{min}$ їх декартів добуток.

Означення 2.2.4. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$ отриманий з діаграми $Q(P)$ додаванням стрілок $\sigma_{ij} : i \to j$ для всіх $(p_i, p_j) \in P_{max} \times P_{min}$ називається *сагайдаком, асоційованим з частково впорядкованою множиною* P.

Очевидно, $\tilde{Q}(P)$ є сильно зв'язним простим сагайдаком.

Теорема 2.2.5. *Сагайдак $Q(A(P))$ збігається з сагайдаком $\tilde{Q}(P)$.*

Доведення. Нагадаємо, що $Q(A(P)) = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R)$. Припустимо, що в $Q(P)$ є стрілка з s в t. Це означає, що $\alpha_{st} = 0$ і не існує натурального k ($k \neq s, t$) такого, що $\alpha_{sk} = 0$ і $\alpha_{st} = 0$. Елементи β_{ss} та β_{tt} матриці показників $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$ рівні 1. Маємо, що $\mathcal{E}(R^2) = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n}\{\beta_{sk} + \beta_{kt}\} = 1$. Таким чином, в $[Q(A(P))]$ на (s,t)-й позиції маємо $\gamma_{st} - \beta_{st} = 1 - \alpha_{st} = 1 - 0 = 1$. Звідси випливає, що $Q(A(P))$ має стрілку з s в t.

Нехай $p \in P_{max}$. Це означає, що $\alpha_{pk} = 1$ для $k \neq p$. Тому в p-тому рядку $\mathcal{E}(R)$ всі елементи рівні 1, тобто $(\beta_{p1}, \ldots, \beta_{pp}, \ldots, \beta_{pn}) = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)$.

Аналогічно, якщо $q \in P_{min}$, то q-й стовпчик $(\beta_{1q}, \ldots, \beta_{qq}, \ldots, \beta_{nq})^T$ матриці $\mathcal{E}(R)$ має вигляд $(1, \ldots, 1, \ldots, 1)^T$. Звідси $\gamma_{pq} = 2$, $\beta_{pq} = 1$, і $Q(A(P))$ має стрілку з p в q. Отже, ми довели, що $\tilde{Q}(P)$ підсагайдак $Q(A(P))$.

Тепер покажемо обернене включення. Нехай $\gamma_{pq} = 2$. Тоді очевидно

$$(\beta_{p1}, \ldots, \beta_{pp}, \ldots, \beta_{pn}) = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)$$

і

$$(\beta_{1q}, \ldots, \beta_{qq}, \ldots, \beta_{nq})^T = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)^T.$$

Тому $p \in P_{max}$, $q \in P_{min}$ і існує стрілка з p в q.

Нехай $\gamma_{pq} = 1$ і $\beta_{pq} = 0$. Тоді $p \neq q$, $\beta_{pq} = \alpha_{pq} = 0$. Оскільки $\gamma_{pq} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n}\{\beta_{pk} + \beta_{kq}\}$, то $\beta_{pk} + \beta_{kq} \geqslant 1$ для $k = 1, \ldots, n$. Таким чином, для $k \neq p, q$ маємо $\beta_{pk} + \beta_{kq} \geqslant 1$, звідки отримаємо $\alpha_{pk} + \alpha_{kq} \geqslant 1$. Тому не існує такого натурального k $(k \neq p, q)$, що $\alpha_{pk} = \alpha_{kq} = 0$. Це означає, що в $\widetilde{Q}(P)$ є стрілка з p в q, що доводить обернене включення. $\square$

2.3. Проективні резольвенти і глобальна розмірність кілець.

Нехай A – кільце і M – правий модуль.

Означення 2.3.1. *Проективною резольвентою* M називається точна послідовність A-модулів:

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

в якій всі модулі P_n є проективними.

Як випливає, наприклад, з [17] будь-який A-модуль M має вільну, а тому і проективну резольвенту.

Ми кажемо, що *проективна розмірність* M дорівнює n і пишемо $proj.dim_A\, M = n$, якщо існує проективна резольвента довжини n:

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

і не існує більш короткої проективної резольвенти модуля M.

Ми кажемо, що модуль M має нескінченну проективну резольвенту, якщо для нього не існує проективної резольвенти скінченної довжини. Цей факт записується наступним чином: $proj.dim_A\, M = \infty$.

Добре відомо, що $proj.dim_A\, M$ не залежить від вибору проективної резольвенти.

Нехай $proj.dim_A\, M = n$ і

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

відповідна проективна резольвента.

Точна послідовність

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

називається *початком проективної резольвенти* модуля M, а точна послідовність

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1}$$

називається *кінцем проективної резольвенти* модуля M.

Позначимо через $\mathbb{M}_A({}_A\mathbb{M})$ категорію всіх правих (лівих) A-модулів.

Означення 2.3.2. Якщо A – кільце, то його права глобальна розмірність (скорочено $r.gl.dim\, A$) визначається наступним чином:

$$r.gl.dim\, A = \sup\{proj.dim_A M : M \text{ — правий } A- \text{ модуль }\}$$

Аналогічно визначається $l.gl.dim\, A$:

$$l.gl.dim\, A = \sup\{proj.dim_A M : M \text{ — лівий } A- \text{ модуль }\}$$

2.4. Черепичні порядки в $M_5(D)$ скінченної глобальної розмірності

Означення 2.4.1. Модуль M називається **дистрибутивним**, якщо для довільних його підмодулів K, L, N справедлива рівність

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Очевидно, що підмодуль та фактормодуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним. Модуль називається **напівдистрибутивним**, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається **напівдистрибутивним справа (зліва)**, якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A (${}_AA$) є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа та зліва кільце називається напівдистрибутивним.

Очевидно, що кожний ланцюговий модуль є дистрибутивним модулем та кожний напівланцюговий модуль є напівдистрибутивним модулем.

Означення 2.4.2. Кільце ендоморфізмів нерозкладного проективного модуля над напівдосконалим кільцем називається головним кільцем ендоморфізмів.

Ми будемо писати $SPSD$-кільце A для напівдосконалого напівдистрибутивного кільця A.

Означення 2.4.3. Кільце A називається **напівмаксимальним**, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним), тобто всі головні кільця ендоморфізмів кільця A є дискретно нормованими кільцями.

Твердження 2.4.4. *Напівмаксимальне кільце є прямим добутком скінченного числа первинних напівмаксимальних кілець.*

Теорема 2.4.5. *Наступні умови для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A еквівалентні:*

- *(a) кільце A — напівдистрибутивне;*

- *(b) кільце A є прямим добутком напівпростого артінового кільця та напівмаксимального кільця.*

Теорема 2.4.6. *Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \cdots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

де $n \geqslant 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з простим елементом π, α_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i.

Означення 2.4.7. Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком.

З теорем 2.4.5 та 2.4.6 отримуємо, що черепичний порядок — це первинне нетерове справа $SPSD-$ кільце з ненульовим радикалом Джекобсона.

Позначимо через $M_n(B)$ кільце всіх $n \times n$ матриць над кільцем B.

Означення 2.4.8. Цілочисельна матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ називається

- матрицею показників, якщо $\mathcal{E}$ - матриця показників і $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i, j, k;
- зведеною матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всіх i, j $i \neq j$.

Ми використовуємо наступне позначення: $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$, де $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця A, тобто

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O},$$

де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок зведений, тобто $A/R(A)$ є прямим добутком тіл, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ при $i \neq j$, тобто матриця показників $\mathcal{E}(A)$ є зведеною. Тут $R(A)$ — радикал Джекобсона кільця A.

Черепичний порядок A має класичне кільце часток $Q = M_n(D)$, де D — класичне тіло часток дискретно нормованого кільця $\mathcal{O}$.

Означення 2.4.9. Нехай A — черепичний порядок. Правою (лівою) A-браткою називається правий (лівий) A-модуль, який є скінченнопородженим вільним $\mathcal{O}$-модулем.

Зокрема, всі скінченнопороджені проективні A-модулі є A-гратками.

Серед всіх A-граток виділяються так звані незвідні A-гратки, тобто A-гратки, які містяться у простому правому (лівому) Q-модулі U (відп. V). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$)

відносно включення. Будь-яка права (відп. ліва) незвідна A-гратка M (відп. N), яка лежить в U (відп. в V), є A-модулем з $\mathcal{O}$-базисом $(\pi^{\alpha_1}e_1, \ldots, \pi^{\alpha_n}e_n)$, причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geqslant \alpha_j, & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geqslant \alpha_i & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases} \tag{2.4}$$

де буква T означає операцію транспонування.

Для наших цілей досить розглянути зведений черепичний порядок A. В цьому випадку елементи $S_r(A)$ ($S_l(A)$) знаходяться в бієктивній відповідності з чілочисельними рядками векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (стовпчиками векторів $\vec{a}^T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$), де $\vec{a}$ і $\vec{a}^T$ задовольняють умовам 2.4. Ми будемо записувати $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

Нехай $\vec{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Відношення порядку $\vec{a} \preccurlyeq \vec{b}$ в $S_r(A)$ визначається наступним чином:

$$\vec{a} \preccurlyeq \vec{b} \Longleftrightarrow \alpha_i \geqslant \beta_i \text{для } i = 1, \ldots, n.$$

Оскільки кільце A є напівдистрибутивним, то $S_r(A)$ та $S_l(A)$ є дистрибутивними гратками відносно додавання та перетину.

Твердження 2.4.10. *Нехай X_1, X_2, X_3 — всі максимальні підмодулі незвідного і непроективного Λ-модуля M з $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ та $\mathcal{E}(X_i) = \mathcal{E}(M) + e_{j_i}$, де $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$. Тоді $P(M) = \bigoplus\limits_{i=1}^{3} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$ та $M = \sum\limits_{i=1}^{3} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$.*

Теорема 2.4.11. *Нехай M_1, M_2, M_3 — підмодулі дистрибутивного модуля $M = \sum\limits_{i=1}^{3} M_i$ та епіморфізм $\varphi\colon \bigoplus\limits_{i=1}^{3} M_i \mapsto M$ діє за правилом $\varphi(m_1, m_2, m_3) = m_1 + m_2 + m_3$. Тоді*

$$\ker \varphi = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_i = \sum_{j \neq i} m_{ij},$$

$$m_{ij} = -m_{ji} \in M_i \cap M_j\}.$$

Наслідок 2.4.12. *Нехай M — незвідний Λ-модуль і $P(M) = \bigoplus\limits_{i=1}^{3} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$, $M = \sum\limits_{i=1}^{3} \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i}$. Тоді ядро епіморфізму $\varphi\colon P(M) \mapsto M$ дорівнює*

$$\ker \varphi = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_i = \sum_{k \neq i} m_{ik},$$

$$m_{ik} = -m_{ki} \in \pi^{\alpha_{j_i}} P_{j_i} \cap \pi^{\alpha_{j_k}} P_{j_k}\}.$$

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — черепичний порядок в $M_5(D)$ і $d = \sum\limits_{i,j=1}^{5} \alpha_{ij}$. Нижче наведено з точністю до ізоморфізму всі черепичні порядки в $M_5(D)$ скінченної глобальної розмірності.

d = 10

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 1$

d = 11

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$

d = 12

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$

d = 12

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$

d = 13

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$
d = 13

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$
d = 13

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$
d = 14

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 14

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 14

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$

d = 14

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$

d = 14

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$

d = 15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$

d = 15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$

d = 15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 4$

d = 15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$

d = 15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$

d = 15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$

d = 15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$

d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$

d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$

d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$

d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 4$
d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 4$
d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$

d = 16

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$
d = 17

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$
d = 17

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 4$
d = 17

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 17

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 17

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 4$

d = 17

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 4$
d = 18

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 18

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 18

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 2$
d = 19

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$gl.dim\,\Lambda = 3$
d = 20

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

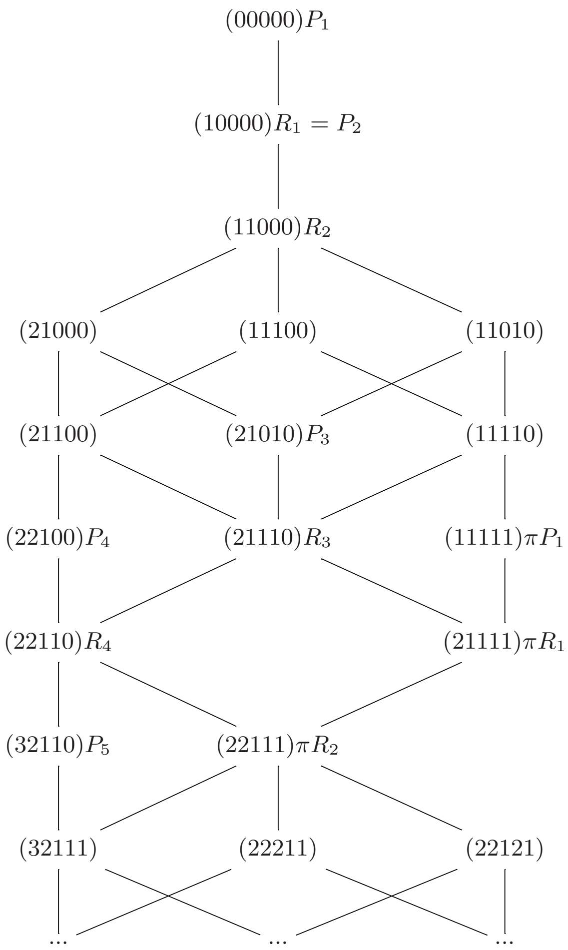
$gl.dim\,\Lambda = 2$

Обчислимо глобальну розмірність одного з вище наведених черепичних порядків.

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ —зведений черепичний порядок з матрицею показників.

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решітка всіх незвідних модулів, що містяться в незвідному модулі (00000) має вигляд



Випишемо проективні резольвенти всіх простих модулів.

Проективним накриттям модуля $U_i = P_i/R_i$ ($i = 1, ..., 5$) є модуль P_i, тобто $P(U_i) = P_i$.

Отже, маємо точні короткі послідовності

$$0 \longrightarrow R_i \longrightarrow P_i \longrightarrow U_i \longrightarrow 0$$

Оскільки $R_1 = P_2$ — проективний модуль, то точна послідовність

$$0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow U_1 \longrightarrow 0$$

є проективною резольвентою модуля U_1.

Звідси отримуємо, що $pd\,U_1 = 1$.

Модуль R_2 має 3 максимальних підмодулі і $P(R_2) = \pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4$, причому $\pi P_1 + P_3 + P_4 = R_2$. З комутативної діаграми точних рядків та 2-го і 3-го точних стовбчиків

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \pi P_1 \cap P_3 \arrow[r] \arrow[d] & \pi P_1 \cap P_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & \pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \arrow[r] \arrow[d] & \pi P_1 + P_3 + P_4 = R_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\pi P_1 + P_3) \cap P_4 \arrow[r] \arrow[d] & (\pi P_1 + P_3) \oplus P_4 \arrow[r] \arrow[d] & \pi P_1 + P_3 + P_4 = R_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

за лемою 3×3 отримуємо коротку точну послідовність

$$0 \longrightarrow \pi P_1 \cap P_3 \longrightarrow K \longrightarrow (\pi P_1 + P_3) \cap P_4 \longrightarrow 0$$

де K — ядро епіморфізму $\pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \longrightarrow R_2$, що діє за правилом $\varphi(m_1, m_2, m_3) = m_1 + m_2 + m_3$, $\pi P_1 \cap P_3 = (21111) = \pi P_2$ — проективний модуль, $(\pi P_1 + P_3) \cap P_4 = (22110) = R_4$.

Для модулів $\pi P_1 \cap P_3$ та $(\pi P_1 + P_3) \cap P_4$ маємо точні послідовності

$$0 \longrightarrow \pi P_2 = \pi P_1 \cap P_3 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \pi^2 P_2 \longrightarrow \pi^2 P_1 \oplus P_5 \longrightarrow (\pi P_1 + P_3) \cap P_4 \longrightarrow 0$$

Тоді маємо наступну комутативну діаграму з точними рядками і стовпчиками

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \pi^2 P_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi^2 P_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi P_2 \arrow[r] \arrow[d] & \pi P_2 \oplus \pi^2 P_1 \oplus P_5 \arrow[r] \arrow[d] & \pi^2 P_1 \oplus P_5 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi P_1 \cap P_3 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & (\pi P_1 + P_3) \cap P_4 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

З трьох коротких точних послідовностей

$$0 \longrightarrow R_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow U_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \longrightarrow R_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \pi^2 P_2 \longrightarrow \pi P_2 \oplus \pi^2 P_1 \oplus P_5 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

отримуємо проективну резольвенту модуля U_2

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^2 P_2 \arrow[r] & \pi P_2 \oplus \pi^2 P_1 \oplus P_5 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi P_1 \oplus P_3 \oplus P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[r] & U_2 \arrow[r] & 0 \\
& & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & R_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Аналогічно отримуємо проективні резольвенти модулів U_3, U_4, U_5:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^3 P_2 \arrow[r] & \pi^3 P_1 \oplus \pi P_5 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi P_3 \oplus \pi P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi P_2 \oplus P_5 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[r] & U_3 \arrow[r] & 0 \\
& & & \pi R_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & R_5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & R_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^2 P_2 \arrow[r] & \pi^2 P_1 \oplus P_5 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_4 \arrow[r] & U_4 \arrow[r] & 0 \\
& & & R_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^3 P_2 \arrow[r] & \pi^3 P_1 \oplus \pi P_5 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi P_3 \oplus \pi P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_5 \arrow[r] & U_5 \arrow[r] & 0 \\
& & & \pi R_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & R_5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Отже, проективні розмірності простих Λ — модулів наступні:
$pd\,U_1 = 1$, $pd\,U_2 = 3$, $pd\,U_3 = 4$, $pd\,U_4 = 2$, $pd\,U_5 = 3$.
Оскільки

$$gl.dim\Lambda = pd_\Lambda(\Lambda/R) = pd_\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^{5} U_i\right) = \max_i pd_\Lambda U_i,$$

то
$gl.dim\,\Lambda = 4$.

Зауваження. Наведений вище список черепичних порядків в скінченної глобальної розмірності співпадає зі списком Фуджіiти в [12].

Література

1. Дрозд Ю.А. Конечномерные алгебры / Ю.А. Дрозд, В.В. Кириченко. – К.: Изд. объед. "Вища школа", 1980. – 192 с.
2. Завадский А.Г. Полумаксимальные кольца конечного типа / А.Г. Завадский, В.В. Кириченко // Мат. сборник. – 1977. – Т. 103. – С. 323-345.
3. Кириченко В.В. Порядки, все представления которых вполне разложимы / В.В. Кириченко // Математические заметки. – 1967. – Т. 2. – №2. – С. 139-144.
4. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца / В.В. Кириченко // Математический сборник. – 1976. – Т. 99(141). – № 4.– С. 559-581.
5. Кириченко В.В. Полусовершенные полудистрибутивные кольца / В.В. Кириченко, М.А. Хибина // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики – 1993. – С. 457-480.
6. Циганівська І.М. Q-еквівалентні скінченні частково впорядковані множини /В.М. Журавльов, І.М. Циганівська // Вісник київського ун-ту., сер. фіз-мат. науки. - 2005. - №1. — С. 47-51.
7. Циганівська І.М. Індекси скінченних частково впорядкованих множин з 5-ти елементів /І.М. Циганівська // Вісник київського ун-ту., сер. фізмат. науки. - 2005. - №2. - С. 62-73.
8. Цыгановская И.Н. О жестких колчанах. /В.В. Кириченко ,В.М. Журавлёв, И.Н. Цыгановская //Фундаментальная прикладная математика.- 2006. - №8. – Т.12— С. 105-120.
9. Циганівська І.М. Черепичні порядки в скінченної глобальної розмірності / І.М. Циганівська // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. - 2012. - №1. — С. 37-43.
10. Chernousova Zh.T. Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets, I / Zh.T. Chernousova, M.A. Dokuchaev, V.V. Kirichenko and Etc. // Algebra and Discrete mathimatics. – 2002. – № 1. – P. 36-63.
11. Chernousova Zh.T. Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets, II / Zh.T. Chernousova, M.A. Dokuchaev,

V.V. Kirichenko and Etc. // Algebra and Discrete mathimatics. – 2003. – № 2. – P. 47-86.

12. Fujita H. Tiled orders of finite global dimension / H. Fujita // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – vol. 322. – P. 329-342.
13. Fujita H. Erratum to "Tiled orders of finite global dimension"/ H. Fujita // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – vol. 327 – № 2. – P. 919-920.
14. Fujita H. Neat idempotents and tiled orders having large global dimension / H. Fujita // J. Algebra. – 2002. – vol. 256. – P. 194-210.
15. Fujita H. Tiled order of finite global dimension with no neat primitive idempotent / H. Fujita, A. Oshima // Communications in algebra. – 2009. – vol. 37 – No. 2. – P. 575-593.
16. Gubareni N. Rings and Modules / N. Gubareni, V.V. Kirichenko. – Czestochowa (Poland), 2001. – 306 p.
17. Hazewinkel M. Algebras, Rings and Modules, Vol 1. / Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. – Kluwer Academic Publishers, 2004. – 380 c.
18. Hazewinkel M. Algebras, Rings and Modules, Vol 2. / Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. – Kluwer Academic Publishers, 2007. – 400 c.
19. Jacobson N. Structure of rings / N. Jacobson // American Mathematical Society Coiioquium Publication. – 1956. – Vol. 37. – P. 263.
20. Kirichenko V.V. Global dimension of semiperfect semidistributive prime rings / V.V. Kirichenko, N.A. Bronickaya // 7th International Algebraic Conference in Ukraine, Abstracts of Talks, Kharkov, August 18-23, 2009. – P. 73.
21. Kirichenko V.V. Semi-Perfect Semi-Distributive Rings/ V.V. Kirichenko // Algebras and Representation Theory. – 2000. – Vol. 3. – P. 81-98.
22. Kirkman E. Global dimensions of a class of tiled orders / E. Kirkman, J. Kuzmanovich // J. Algebra. – 1989. – № 127. – P. 57-92.
23. Michler G. Structure of semi-perfect hereditary Noetherian rings / G. Michler // J. of Algebra. – v. 13. – 1969 – № 3 – P. 327-344.
24. Rump W. Discrete posets, cell complexes, and the global dimension of tiled orders / W. Rump // Communications in algebra – 1996. – **24(1)**. – P. 55-107.
25. Tarsy R.B. Global dimension of triangular orders / R.B. Tarsy // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971.– vol. 28(2). – P. 423-426.
26. Wiedemann A. Path orders of global dimension two / A. Wiedemann, K.W. Roggenkamp // J. Algebra. – 1983. – vol.80. – P. 113-133.

І. М. Циганівська

ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ ТА ЧЕРЕПИЧНІ ПОРЯДКИ

Методична розробка для студентів
механіко-математичного факультету

Тираж 30 екземплярів
Відділ оперативної поліграфії механіко-математичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка