# Теорія наближень

Навчальний посібник

А. В. Примак, І. О. Шевчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2011

# Зміст

## 1. Передмова.

Засновниками теорії наближень є К. Вейєрштрас та П. Л. Чебишев.

У XX сторіччі фундаментальний внесок у розвиток теорії зробили академіки та члени-корреспонденти АН УРСР Н. І. Ахієзер (1901-1980, Харків), С. Банах (1892-1945, Львів), С. Н. Бернштейн (1980-1968, Харків, Ленінград), В. К. Дзядик (1919-1998, Київ), М. П. Корнєйчук (1920-2003, Дніпропетровськ, Київ), М. Г. Крейн (1907-1989, Одеса), Є. Я. Ремез (1896-1975, Київ), інші видатні математики.

Якщо це спеціально не буде оговорено, під словом "функція" будемо розуміти "дійснозначна функція".

## 2. Вступ. Основна задача теорії наближень.

Нехай $X$ — досить "широкий" простір функцій, та $f \in X$ — деяка "складна" функція. Потрібно знайти "просту" функцію $p$ із "невеликої" підмножини $P$ простору $X$, що мало відрізняється від $f$.

Як правило, в теорії наближень $X$ — нормований простір, переважно

- $C[a,b]$ — простір неперервних на $[a,b]$ функцій, з нормою
$$\|f\|_{C[a,b]} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$
- $\widetilde{C}$ — простір неперервних $2\pi$-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій, з нормою
$$\|f\|_{\widetilde{C}} := \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|.$$
- $L_p[a,b]$, $1 \leqslant p < \infty$, — простір вимірних на $[a,b]$ функцій $f$ таких, що
$$\|f\|_{L_p[a,b]} := \left(\int_a^b |f(u)|^p \, du\right)^{1/p} < +\infty.$$
- $\widetilde{L}_p$, $1 \leqslant p < \infty$, — простір вимірних $2\pi$-періодичних на $\mathbb{R}$ функцій $f$ таких, що
$$\|f\|_{\widetilde{L}_p} := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|^p \, du\right)^{1/p} < +\infty.$$

Класичними "невеликими" множинами $P$ є

- простір $\mathcal{P}_n$ алгебраїчних многочленів
$$p_n(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$
степеня $\leqslant n$, для $C[a,b]$ та $L_p[a,b]$;

- простір $\mathcal{T}_n$ тригонометричних поліномів

$$\tau_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad t \in \mathbb{R},$$

  степеня $\leqslant n$, для $\widetilde{C}$ та $\widetilde{L}_p$;
- множина сплайнів (кусково-многочленних функцій), для всіх чотирьох класичних просторів.

*Зауваження* 2.1. $\mathcal{P}_n$ — скінченновимірний простір розмірності $n+1$, а $\mathcal{T}_n$ — розмірності $2n+1$.

*Зауваження* 2.2. У сучасній теорії наближень вивчають ще простори $C(M)$, $L_p(M)$, де $M \subset \mathbb{R}^d$, $M \subset \mathbb{C}^d$, $\widetilde{C}(\mathbb{R}^d)$, $\widetilde{L}_p(\mathbb{R}^d)$, простори BMO та багато інших. Серед інструментів для наближення зазначимо ще раціональні функції $r_{m,n} = \dfrac{p_m}{q_n}$, де $p_m \in \mathcal{P}_m$, $q_n \in \mathcal{P}_n$, вейвелети (плески), та ін.

## 3. Величина та елемент найкращого наближення. Теорема Бореля.

Нехай $(X, \|\cdot\|_X)$ — Банахів простір, $Y$ — його підпростір.

**Означення 3.1.** Величиною найкращого наближення елемента $f \in X$ підпростором $Y$ називається число

$$E_Y(f)_X := \inf_{y \in Y} \|f - y\|_X \,.$$

**Означення 3.2.** Елемент $y^* \in Y$ називається елементом найкращого наближення елемента $f \in X$ підпростором $Y$, якщо

$$\|f - y^*\|_X = E_Y(f)_X.$$

Виявляється, що при наближенні скінченновимірним підпростором елемент найкращого наближення завжди існує. Має місце

**Теорема 3.1** (Теорема Бореля). *Нехай $Y$ — скінченновимірний підпростір банахового простору $X$. Тоді для кожного $f \in X$ існує елемент найкращого наближення підпростором $Y$.*

*Доведення.* Позначимо: $\|\cdot\| := \|\cdot\|_X$, $E(f) := E_Y(f)_X$. За означенням інфімума, існує послідовність $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ елементів $y_j \in Y$ така, що $\|y_j - f\| \to E(f)$, $j \to \infty$. Оскільки $\|y_j\| \leqslant \|y_j - f\| + \|f\|$, то послідовність $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ є обмеженою. Кожен член цієї послідовності належить скінченновимірному підпростору $Y$, тому, за теоремою Больцано-Вейєрштраса, можна вибрати підпослідовність $\{y_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$, збіжну до деякого елемента $y^* \in Y$, тобто $\|y_{j_m} - y^*\| \to 0$, $m \to \infty$. Тоді

$$\begin{aligned} E(f) \leqslant \|f - y^*\| &= \lim_{m\to\infty} \|f - y^*\| \leqslant \lim_{m\to\infty} (\|f - y_{j_m}\| + \|y_{j_m} - y^*\|) \\ &= E(f), \end{aligned}$$

отже $\|f - y^*\| = E(f)$. $\square$

**Вправа 1.** *Довести, що елемент найкращого наближення кожної функції* $f \in L_p[a,b]$, $1 < p < \infty$, *скінченновимірним підпростором* $Y \subset L_p[a,b]$ *єдиний.*

**Вправа 2.** *Чи завжди існує елемент найкращого наближення довільним підпростором простору* $C[a,b]$ *(простору* $L_p[a,b]$*)?*

**Вправа 3.** *Нехай* $L := \{h \in C[a,b] : h(x) = \lambda x, x \in [a,b], \lambda \in \mathbb{R}\}$ *— одновимірний підпростір простору* $C[a,b]$*. Дослідити, за яких умов елемент найкращого наближення підпростором* $L$ *функції* $f(x) \equiv 1$ *єдиний.*

*Зауваження* 3.1. Якщо підпростором $Y$ є простір $\mathcal{P}_n$ або $\mathcal{T}_n$, то, як правило, в позначенні величини найкращого наближення замість $Y$ пишуть $n$, а не $\mathcal{P}_n$ або $\mathcal{T}_n$.

Переважно ми будемо працювати в просторах $C[a,b]$ і $\widetilde{C}$. Наступні означення є частинними випадками двох попередніх, але в них вводяться позначення, що будуть найчастіше використовуватись.

**Означення 3.3.** Величиною найкращого наближення функції $f \in C[a,b]$ многочленами степеня $\leqslant n$ називається число

$$E_n(f)_{C[a,b]} := \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{C[a,b]}\,.$$

**Означення 3.4.** Многочлен $p_n^*$ степеня $\leqslant n$ називається многочленом найкращого наближення функції $f \in C[a,b]$, якщо

$$\|f - p_n^*\|_{C[a,b]} = E_n(f)_{C[a,b]}.$$

**Означення 3.5.** Величиною найкращого наближення функції $f \in \widetilde{C}$ тригонометричними поліномами степеня $\leqslant n$ називається число

$$E_n(f)_{\widetilde{C}} := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_n} \|f - \tau\|_{\widetilde{C}}\,.$$

**Означення 3.6.** Тригонометричний поліном $\tau_n^*$ степеня $\leqslant n$ називається тригонометричним поліномом найкращого наближення функції $f \in \widetilde{C}$, якщо

$$\|f - \tau_n^*\|_{\widetilde{C}} = E_n(f)_{\widetilde{C}}.$$

**Наслідок 3.1** (теореми Бореля). *Для довільної функції $f \in C[a,b]$ існує многочлен $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ її найкращого наближення в $C[a,b]$, тобто такий, що*

$$\|f - p_n^*\|_{C[a,b]} = E_n(f)_{C[a,b]}.$$

**Наслідок 3.2** (теореми Бореля). *Для довільної функції $f \in \widetilde{C}$ існує тригонометричний поліном $\tau_n^* \in \mathcal{T}_n$ її найкращого наближення в $\widetilde{C}$, тобто такий, що*

$$\|f - \tau_n^*\|_{\widetilde{C}} = E_n(f)_{\widetilde{C}}.$$

*Зауваження* 3.2. Аналогічно до означень 3.3–3.6, означаються величини $E_n(f)_{L_p[a,b]}$, $E_n(f)_{\widetilde{L}_p}$ та многочлени і тригонометричні поліноми найкращого наближення функції $f \in L_p[a,b]$ і, відповідно, $f \in \widetilde{L}_p$. Аналоги наслідків 3.1, 3.2, очевидно мають місце і для наближення в $L_p[a,b]$ і $\widetilde{L}_p$, $1 \leqslant p < \infty$.

## 4. Теорема Хаара – Чебишова про альтернанс.

**Теорема 4.1** (Теорема Хаара – Чебишова про альтернанс). *Для того, щоб многочлен $p_n \in \mathcal{P}_n$ був многочленом найкращого наближення функції $f \in C[a,b]$ необхідно і достатньо, щоб існували $n+2$ точки $x_j$ такі, що*

$$a \leqslant x_1 < \cdots < x_{n+2} \leqslant b,$$

$$f(x_j) - p_n(x_j) = -(f(x_{j+1}) - p_n(x_{j+1})), \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

*та*

$$|f(x_j) - p_n(x_j)| = \|f - p_n\|_{C[a,b]}, \quad j = 1, \ldots, n+2.$$

*Доведення.* Позначимо

$$\|\cdot\| := \|\cdot\|_{C[a,b]}.$$

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $f \notin \mathcal{P}_n$, звідки $\|f - p_n\| \neq 0$. Позначимо

$$g := f - p_n.$$

*Достатність.* Припустимо, від супротивного, що $p_n$ не є многочленом найкращого наближення. Тоді існує $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ такий, що

$$\|f - p_n^*\| < \|f - p_n\|.$$

Позначимо $g^* := f - p_n^*$. Із припущення від супротивного і умов теореми випливає, що графіки неперервних функцій $g$ і $g^*$ перетинаються на кожному із проміжків $(x_j, x_{j+1})$, $j = 1, \dots, n+1$. Тобто функція $g - g^*$ має принаймні $n+1$ нуль, значить многочлен $p_n - p_n^*$ степеня $\leqslant n$ має принаймні $n+1$ нуль, отже $p_n \equiv p_n^*$. Тут ми використали наслідок з основної теореми алгебри: нетривіальний многочлен степеня $\leqslant n$ має не більше $n$ нулів.

*Необхідність.* Нехай $p_n$ — многочлен найкращого наближення функції $f$ та

$$E := E_n(f)_{C[a,b]} = \|f - p_n\| = \|g\|.$$

Оскільки множина $\{x \in [a,b] : |g(x)| = E\}$ є замкненою, то існує точка

$$x_1 := \min\{x \in [a,b] : |g(x)| = E\}.$$

Для визначеності вважатимемо, що $g(x_1) > 0$, тобто

$$g(x_1) = E.$$

Позначимо

$$x_2 := \min\{x \in [x_1, b] : g(x) = -E\}, \tag{4.1}$$

якщо така точка $x_2$ існує. Аналогічно, позначимо

$$x_{k+1} := \min\{x \in [x_k, b] : g(x) = (-1)^k E\}, \tag{4.2}$$

якщо така точка $x_{k+1}$ існує, і так далі. Нехай $x_l$ — остання така точка, що існує. Припустимо від супротивного, що $l < n+2$. Позначимо $y_0 := a$, $y_l := b$,

$$y_j := \max\{x \in [x_j, x_{j+1}] : g(x) = 0\}, \quad j = 1, \dots, l-1.$$

За побудовою, при кожному $j = 0, \dots, l-1$ маємо

$$\max_{x \in [y_j, y_{j+1}]} (-1)^j g(x) = E, \tag{4.3}$$

але

$$\min_{x \in [y_j, y_{j+1}]} (-1)^j g(x) =: A_j > -E. \tag{4.4}$$

Поза тим,

$$g(y_j) = 0, \quad j = 1, \dots, l-1. \tag{4.5}$$

Тепер розглянемо многочлен

$$q(x) := \prod_{j=1}^{l-1} (y_j - x)$$

степеня $l - 1 \leqslant n$ і врахуємо, що

$$q(y_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, l-1, \tag{4.6}$$

та, при кожному $j = 0, \ldots, l - 1$,

$$(-1)^j q(x) > 0, \quad x \in (y_j, y_{j-1}). \tag{4.7}$$

Поза тим,

$$q(a) > 0 \quad \text{і} \quad (-1)^l q(b) > 0. \tag{4.8}$$

Щоб дійти протиріччя покажемо, що при досить малому $\varepsilon > 0$ многочлен $p_n + \varepsilon q$ степеня $\leqslant n$ наближує функцію $f$ "краще", ніж многочлен $p_n$, що суперечить означенню многочлена найкращого наближення. Точніше, залишилось довести нерівність

$$\|f - p_n - \varepsilon q\| < \|f - p_n\|$$

при досить малому $\varepsilon > 0$, або, що те ж саме, нерівність

$$\|g - \varepsilon q\|_{C[a,b]} < \|g\|_{C[a,b]}. \tag{4.9}$$

Справді, якщо $x \in (y_j, y_{j+1})$ то нерівності (4.3) та (4.7) зумовлюють

$$(-1)^j (g(x) - \epsilon q(x)) \leqslant E - (-1)^j \epsilon q(x) < E,$$

а для всіх $j = 1, \ldots, l - 1$ рівності (4.5) та (4.6) також спричиняють

$$(-1)^j (g(y_j) - \epsilon q(y_j)) = 0 < E.$$

З іншого боку, для $x \in [y_j, y_{j+1}]$ нерівнсть (4.5) тягне за собою

$$(-1)^j (\varepsilon q(x) - g(x)) \leqslant \varepsilon \|q\| - A_j = E - (E + A_j - \varepsilon \|q\|) < E,$$

де остання оцінка справедлива для всіх додатніх

$$\varepsilon < \frac{1}{\|q\|} \left( E + \min_{j=1,\ldots,l} A_j \right).$$

Отже нерівність (4.9), а разом з нею, і необхідність доведені. $\square$

**Вправа 4.** *Сформулювати і довести теорему Чебишова для наближення $2\pi$-періодичних неперервних функцій тригонометричними поліномами.*

Користуючись міркуваннями достатності з теореми Чебишова можна розв'язати наступні вправи 5, 6 та 7.

**Вправа 5.** *Довести теорему Валле-Пуссена: Якщо для функції* $f \in C[a,b]$ *існують* $n+2$ *точки* $a \leqslant x_1 < \cdots < x_{n+2} \leqslant b$ *такі, що*

$$\operatorname{sign} f(x_j) = -\operatorname{sign} f(x_{j+1}), \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

*то*

$$E_n(f)_{C[a,b]} \geqslant \min_{j=1,\ldots,n+2} |f(x_j)|.$$

*Зауваження* 4.1. На основі теорем Валле-Пуссена та Чебишова розроблено алгоритм (алгоритм Ре́меза), що дозволяє знайти многочлен найкращого наближення з довільною заданою точністю.

**Вправа 6.** *Сформулювати та довести теорему Валле-Пуссена для* $2\pi$*-періодичного випадку.*

**Вправа 7.** *Довести єдиність многочлена найкращого наближення в* $C[a,b]$*.*

*Зауваження* 4.2. Зазначимо, що для наближення довільним скінченновимірним підпростором в $C[a,b]$ єдиності елемента найкращого наближення немає (наприклад, розв'яжіть вправу 3). В той же час, вправа 7 стверджує, що для $\mathcal{P}_n$ єдиність є. Оскільки питання єдиності дуже важливе, Хааром (Чебишовим) а також Колмогоровим описані всі лінійні скінченновимірні підпростори для яких єдиність елемента найкращого наближення має місце, див. наступний параграф.

*Приклад* 4.1. Теорема Чебишова дає можливість легко знайти (вгадати) многочлен найкращого наближення в певних випадках. Наприклад, легко бачити, що для $f(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$, маємо

$$p_n^*(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & n = 0, 1, \\ x^2, & n \geqslant 2. \end{cases}$$

Точки альтернансу: -1, 0, 1. Аналогічно, для $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 7.3\pi]$, маємо $p_n^* \equiv 0$, $n = 0, \ldots, 5$.

## 5. Системи Хаара (Чебишова).

Нехай $(X, \rho)$ — метричний простір, $M$ — деяка підмножина $X$, що містить принаймні $n+1$ елемент.

**Означення 5.1.** Набір функцій $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, означених на $M$ та зі значеннями в $\mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) називається системою Хаара на $M$, якщо кожний нетривіальний поліном по цій системі (тобто функція вигляду $\sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j$, де $\lambda_j \in \mathbb{R}$ (або із $\mathbb{C}$) не всі рівні нулю) має $\leqslant n$ нулів на $M$.

*Приклад* 5.1.

а) $\{1, x, \ldots, x^n\}$ — система Хаара на довільній множині $M \subset \mathbb{R}$ потужності $\geqslant n+1$, бо нетривіальний многочлен степеня $\leqslant n$ має $\leqslant n$ нулів.

б) Відомо, що $\tau \in \mathcal{T}_n$ на кожному $(a, a+2\pi]$ має $\leqslant 2n$ нулів (за умови нетривіальності $\tau$).

**Вправа 8.** *Довести, що за умови нетривіальності $\tau$, $\tau \in \mathcal{T}_n$ на кожному $(a, a+2\pi]$ має $\leqslant 2n$ нулів.*

**Вправа 9.** *Довести, що $\{1, \cos x, \ldots, \cos nx\}$ на $[0, \pi]$ є системою Хаара.*

**Вправа 10.** *Довести, що $\{\sin x, \ldots, \sin nx\}$ на $(0, \pi)$ є системою Хаара.*

**Вправа 11.** *Довести, що $\{e^{\lambda_0 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ на $\mathbb{R}$, де $\lambda_j$, $j = 0, \ldots, n$ — різні числа, є системою Хаара.*

**Вправа 12.** *Довести, що $\{x^{\lambda_0}, \ldots, x^{\lambda_n}\}$ на $[a, b]$, де $\lambda_j$, $j = 0, \ldots, n$ — різні числа, $a > 0$, є системою Хаара.*

**Теорема 5.1** (критерій того, що система є системою Хаара)**.** *Щоб $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ була системою Хаара на $M$, необхідньо і достатньо, щоб для будь-якого набору $\{x_j\}_{j=1}^n \subset M$ різних точок*

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.1}$$

*Доведення.* За означенням системи Хаара, $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ є системою Хаара на $M$ тоді і тільки тоді, коли кожний нетривіальний поліном по цій системі має $\leqslant n$ нулів на

$M$, тобто, тоді і тільки тоді, коли система з $n+1$ лінійного рівняння

$$\begin{cases} a_0\varphi_0(x_0)+\cdots+a_n\varphi_n(x_0)=0 \\ a_0\varphi_0(x_1)+\cdots+a_n\varphi_n(x_1)=0 \\ \vdots \\ a_0\varphi_0(x_n)+\cdots+a_n\varphi_n(x_n)=0 \end{cases}$$

має єдиний (нульовий) розв'язок відносоно $a_0,\ldots,a_n$. Це, як відомо з курсу лінійної алгебри, рівносильно (5.1). □

**Теорема 5.2** (інтерполяційна для систем Хаара)**.** *Якщо* $\{\varphi_0,\ldots,\varphi_n\}$ *— система Хаара на* $M$*, то для довільних різних* $\{x_j\}_{j=0}^n \subset M$ *та довільних* $\{y_j\}_{j=0}^n$ *існує рівно один поліном*

$$p_n(x)=\sum_{j=0}^n a_j\varphi_j(x), \quad x\in M,$$

*такий, що*

$$p_n(x_j)=y_j, \quad j=0,\ldots,n.$$

*Доведення.* Доведемо існування. Досить взяти

$$p_n(x):=-\frac{Y(x)}{D}, \quad x\in M,$$

де

$$Y(x):=\det\begin{pmatrix} 0 & \varphi_0(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ y_0 & \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix}, \quad x\in M,$$

а

$$D:=\det\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix},$$

$D\neq 0$ за попередньою теоремою. В тому, що $Y(x_j)=y_jD$, $j=0,\ldots,n$, легко переконатись, розкладаючи визначник для $Y$ по першому стовпчику.

Єдиність. Якщо є два таких полінома $p_n$ та $p_n^*$, то $p_n-p_n^*$ — теж поліном по цій системі, і він має нулі в $n+1$ точці $x_j$, $j=0,\ldots,n$, тому $p_n$ та $p_n^*$ співпадають. □

*Зауваження* 5.1. При доведенні теореми Чебишова будувався допоміжний многочлен вигляду $(x-y_1)\dots(x-y_{l-1})$, $x \in [a,b]$. Остання теорема дозволяє будувати аналог такого многочлену по системі Хаара, що дає можливість розв'язати наступня вправи.

**Вправа 13.** *Сформулювати і довести теорему Чебишова для наближення по системі Хаара в* $C[a,b]$.

**Вправа 14.** *Довести, що многочлен найкращого наближення по системі Хаара в* $C[a,b]$ *єдиний.*

**Вправа 15.** *Довести теорему Хаара-Колмогорова, для* $M=[a,b]$. *Нехай* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n \subset C(M)$. *Щоб многочлен найкращого наближення по цій системі на* $M$ *був єдиним для кожної* $f \in C(M)$ *необхідно і достатньо, щоб ця система була системою Хаара на* $M$.

## 6. Многочлени Чебишова.

**Означення 6.1.** Многочленом Чебишова степеня $\leqslant n$ називають многочлен $T_n$, що на $[-1,1]$ задовольняє $T_n(\cos x) = \cos nx$, $x \in \mathbb{R}$, або $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1,1]$.

*Зауваження* 6.1. Із властивості 1 випливатиме, що $T_n$ справді многочлен.

*Зауваження* 6.2. Оскільки кожен многочлен є аналітичною функцією в $\mathbb{C}$, то за теоремою про єдиність для аналітичних функцій, його достатньо задати на довільній множині, що містить хоч одну свою граничну точку, зокрема, на $[-1,1]$.

*Зауваження* 6.3. Позначення $T_n$ для многочленів Чебишова походить від написання його прізвища німецькою мовою (Tchebyshev). В сучасній літературі все частіше зустрічається $C_n$ (від англ. Chebyshev), але ми будемо вживати $T_n$, щоб не плутати це з позначеннями для констант.

Легко підрахувати два перших многочлена Чебишова:

$$T_0(x) = 1, \quad x \in [-1,1],$$

$$T_1(x) = x, \quad x \in [-1,1].$$

**Властивість 1.** *Має місце рекуретна формула:*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad x \in [-1,1], \quad n \geqslant 1.$$

*Доведення.* Згадаємо, що

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\cos nt \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

**Наслідок 6.1.** *Многочлен Чебишова — справді многочлен (індукція).*

**Наслідок 6.2.** *Старший коефіцієнт многочлена Чебишова $T_n$ дорівнює $2^{n-1}$, тобто $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$, $x \in \mathbb{R}$ (індукція).*

**Наслідок 6.3.** *Якщо , $|x| > 1$ то*

$$|T_n(x)| < 2^{n-1}|x|^n.$$

**Наслідок 6.4.** *Має місце рівність*

$$2T_n(x) = (x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n,$$

*де $\sqrt{-|a|} = i\sqrt{|a|}$ (індукція).*

**Властивість 2.** *Нехай $f(x) := x^n$, $x \in [-1,1]$. Тоді многочленом степеня $\leqslant n-1$ найкращого наближення $f$ є $p^*_{n-1}(x) := x^n - \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$, $x \in [-1,1]$, і $E_{n-1}(f)_{C[-1,1]} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.*

*Доведення.* Використаємо теорему Чебишова. Різниця $f(x) - p^*_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$, $x \in [-1,1]$, по модулю $\leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, та точки $x_j = \cos\left(\dfrac{j\pi}{n}\right)$, $j = 0, \ldots, n$, є для неї точками альтернансу. □

**Означення 6.2** (чебишовських точок)**.** Точки $x_j = \cos\left(\dfrac{j\pi}{n}\right)$, $j = 0, \ldots, n$ називають чебишовськими точками.

**Вправа 16** (властивість 3)**.** *Довести, що многочлени Чебишова задовольняють наступне диференціальне рівняння*

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Вправа 17** (властивість 4)**.** *Довести, що многочлени Чебишова є попарно ортогональними на $[-1,1]$ з вагою $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, тобто*

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0, \quad n \neq m.$$

**Вправа 18** (явний вигляд $T_n$). *Довести, що*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Властивість 5.** *Серед усіх многочленів степеня $n$ і старшим коефіцієнтом $2^{n-1}$ многочлен Чебишова найменше відхиляється від нуля, тобто, якщо $p_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$, то*

$$\|p_n\|_{C[-1,1]} \geqslant \|T_n\|_{C[-1,1]} = 1.$$

*Доведення.* Нехай $\|p_n\|_{C[-1,1]} < \|T_n\|_{C[-1,1]}$. Тоді, розглядаючи значення різниці $T_n - p_n$ в чебишовських вузлах, маємо, що $T_n - p_n$ має $\geqslant n$ нулів, але водночас є многочленом степеня $\leqslant n-1$. Це суперечить основній теоремі алгебри. □

**Наслідок 6.5.** *Серед усіх многочленів степеня $n$ і старшим коефіцієнтом $1$ многочленом, що найменше відхиляється від нуля є $2^{1-n}T_n$.*

## 7. Розбиття одиниці.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ — фіксоване, $n > 2$. Чебишовськими точками називають точки $x_j := \cos\frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, \ldots, n$. Чебишовським розбиттям порядку $n$ називається набір $\{I_j\}_{j=1}^n$ відрізків $I_j := [x_j, x_{j-1}]$. Позначимо $|I_j| := x_{j-1} - x_j, \quad j = 1, \ldots, n$.

**Лема 7.1.** *Мають місце нерівності*

$$|I_1| = |I_n| < |I_j| < 3|I_{j\pm 1}|, \quad j = 2, \ldots, n-1. \tag{7.1}$$

**Вправа 19.** *Довести лему.*

Позначимо через $x_j^0 := \cos\dfrac{(j-1/2)\pi}{n}$, $j = 1, \ldots, n$, — нулі многочлена Чебишова. Оскільки $\{[x_1^0, x_0], [x_1, x_1^0], [x_2^0, x_1], \ldots, [x_n, x_n^0]\}$ є чебишовським розбиттям порядку $2n$ то з (7.1) випливають нерівності $\frac{1}{3}(x_j^0 - x_j) < x_{j-1} - x_j^0 < 3(x_j^0 - x_j)$, звідки

$$\frac{4}{3} < \frac{|I_j|}{x_j^0 - x_j} < 4 \qquad \text{і} \qquad \frac{4}{3} < \frac{|I_j|}{x_{j-1} - x_j^0} < 4, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7.2}$$

**Означення 7.1.** Для $j = 1, \ldots, n$ позначимо через

$$Q_j(x) := \begin{cases} \dfrac{T_n(x)}{x - x_j^0}|I_j|, & x \neq x_j^0, \\[2ex] T_n'(x_j^0)|I_j|, & x = x_j^0, \end{cases}$$

— многочлени степеня $n-1$.

Ясно, що

$$|Q_j(x)| \leqslant \frac{|I_j|}{|x - x_j^0|}, \quad x \in [-1,1], \quad x \neq x_j^0. \tag{7.3}$$

**Лема 7.2.** *Мають місце нерівності*

$$\frac{4}{3} < |Q_j(x)| < 4, \quad x \in I_j. \tag{7.4}$$

*Доведення.* Оскільки на $I_j$ похідна $Q_j'$ має не більше одного нуля, то, при всіх $x \in I_j$,

$$|Q_j(x)| \geqslant \min\{|Q_j(x_j)|, |Q_j(x_{j-1})|\} = \min\left\{\frac{|I_j|}{|x_j - x_j^0|}, \frac{|I_j|}{|x_{j-1} - x_j^0|}\right\} > \frac{4}{3},$$

де використані ліві частини нерівностей (7.2). Тобто оцінка знизу в (7.4) доведена.

Доведемо оцінку зверху в (7.4). Нехай $t, t_j^0$ та $t_j$ – такі точки з проміжку $[0,\pi]$, що $x := \cos t$, $x_j^0 := \cos t_j^0$ та $x_j := \cos t_j$. Тоді, для кожного $j \leqslant n/2, j \neq 1$ та $x \in I_j$, маємо

$$\begin{aligned}
|Q_j(x)| &= \left|\frac{\cos nt}{\cos t - \cos t_j^0}\right| |I_j| = \left|\frac{\cos nt - \cos nt_j^0}{\cos t - \cos t_j^0}\right| (\cos t_{j-1} - \cos t_j) \\
&= \left|\frac{\sin(\frac{n}{2}(t - t_j^0)) \sin(\frac{n}{2}(t + t_j^0))}{\sin(\frac{1}{2}(t - t_j^0)) \sin(\frac{1}{2}(t + t_j^0))}\right| 2 \sin\frac{\pi}{2n} \sin(j - \frac{1}{2}) \\
&\leqslant \frac{\sin(j - \frac{1}{2})}{\sin(j - \frac{3}{4})} 2n \sin\frac{\pi}{2n} \leqslant \pi\frac{j - \frac{1}{2}}{j - \frac{3}{4}} \leqslant \frac{6}{5}\pi < 4.
\end{aligned}$$

Якщо $j = 1$, то

$$|Q_1(x)| \leqslant Q_1(1) = \frac{|I_1|}{x_0 - x_1^0} < 4.$$

Аналогічно міркуємо при $j > n/2$. □

*Зауваження* 7.1. Ми використали нерівність $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$, де $x \in \mathbb{R}$, та $n \in \mathbb{N}$, та факт спадання функції $\frac{\sin x}{x}$ на $(0, \frac{\pi}{2}]$.

**Лема 7.3.** *Нехай $m > 2$ — фіксоване. Тоді*

$$|I_j| \leqslant \int_{-1}^{1} |Q_j(x)|^m \, dx \leqslant c_1(m)|I_j|, \quad j = 1, \ldots, n,$$

*де $c_1(m)$ – стала, що залежать тільки від $m$.*

*Доведення.* Враховуючи (7.4), маємо

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |Q_j(x)|^m \, dx &\geqslant \int_{I_j} |Q_j(x)|^m \, dx \geqslant \\
&\geqslant \int_{I_j} \left(\frac{4}{3}\right)^m dx \geqslant |I_j|.
\end{aligned}$$

Тепер оцінимо інтеграл зверху. Враховуючи (7.3) та (7.4), маємо

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|Q_j(x)|^m\,dx &= \int_{-1}^{x_j}|Q_j(x)|^m\,dx+\int_{x_{j-1}}^{1}|Q_j(x)|^m\,dx+\int_{I_j}|Q_j(x)|^m\,dx\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{x_j}\frac{|I_j|^m}{|x-x_j^0|^m}\,dx+\int_{x_{j-1}}^{\infty}\frac{|I_j|^m}{|x-x_j^0|^m}\,dx+\int_{I_j}4^m\,dx\\ &= \frac{1}{m-1}\left(\frac{|I_j|^m}{|x_j-x_j^0|^{m-1}}+\frac{|I_j|^m}{|x_{j-1}-x_j^0|^{m-1}}\right)+4^m|I_j|\\ &\leqslant |I_j|\left(\frac{2}{m-1}4^{m-1}+4^m\right)<4^{m+1}|I_j|=:c_1(m).\end{aligned}$$

□

**Означення 7.2.** Позначатимемо

$$\chi_j(x):=\begin{cases}1, & x\geqslant x_j,\\ 0, & x<x_j,\end{cases}$$

— функцію Хевісайда.

**Означення 7.3.** Для кожного парного числа $m>0$ покладемо

$$\widetilde{P}_j(x):=\widetilde{P}_{j,m}(x):=\frac{\int_{-1}^{x}Q_j^m(t)\,dt}{\int_{-1}^{1}Q_j^m(t)\,dt},\quad x\in[-1,1],\quad j=1,\dots,n-1,$$

– многочлен степеня $m(n-1)+1<mn$.

Оскільки число $m$ є парним, і отже $Q_j^m(t)\geqslant 0$, то

$$0\leqslant\widetilde{P}_j(x)\leqslant\widetilde{P}_j(1)=1,\quad x\in[-1,1].$$

Має місце

**Лема 7.4.** *Виконується оцінка*

$$|\chi_j(x)-\widetilde{P}_j(x)|\leqslant\frac{|I_j|^{m-1}}{|x-x_j^0|^{m-1}},\quad x\in[-1,1]\setminus\{x_j^0\}.$$

*Доведення.* Нехай $x\in[-1,x_j)$. Тоді, враховуючи (7.3) та лему 7.3, маємо

$$\begin{aligned}|\chi_j(x)-\widetilde{P}_j(x)|=|\widetilde{P}_j(x)|\leqslant|I_j|^{m-1}\int_{-1}^{x}\frac{1}{|t-x_j^0|^m}\,dt\leqslant|I_j|^{m-1}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{|t-x_j^0|^m}\\ =\frac{|I_j|^{m-1}}{|x-x_j^0|^{m-1}}.\end{aligned}$$

Нехай тепер $x \in (x_{j-1}, 1]$. Тоді

$$\begin{aligned}|\chi_j(x) - \widetilde{P}_j(x)| &= \left|1 - \frac{\int_{-1}^x Q_j^m(t)\,dt}{\int_{-1}^1 Q_j^m(t)\,dt}\right| \\ &= \left|\frac{\int_x^1 Q_j^m(t)\,dt}{\int_{-1}^1 Q_j^m(t)\,dt}\right| \leqslant |I_j|^{m-1}\int_{-\infty}^x \frac{1}{|t-x_j^0|^m}\,dt \\ &\leqslant \frac{|I_j|^{m-1}}{|x-x_j^0|^{m-1}}.\end{aligned}$$

□

**Теорема 7.1** (про розбиття одиниці)**.** *Нехай $m > 0$ — фіксоване парне число. Існує набір $\{P_{j,m}\}_{j=1}^n$ многочленів $P_j := P_{j,m}$ степеня $< mn$ такий, що*

$$\sum_{j=1}^n P_{j,m}(x) \equiv 1; \tag{7.5}$$

$$|P_{j,m}(x)| \leqslant \min\left\{1, \frac{c_2(m)|I_j|^{m-1}}{|x-x_j|^{m-1}}\right\}, \quad x \in [-1,1], \quad j = 1,\ldots,n, \tag{7.6}$$

*де $c_2(m)$ – стала, що залежить тільки від $m$.*

*Доведення.* Нехай $\widetilde{P}_j$ — многочлени з означення 7.3, $j = 1,\ldots,n-1$. Покладемо $\widetilde{P}_0(x) = P_0(x) \equiv 0$, $\widetilde{P}_n(x) \equiv 1$, і $P_j := \widetilde{P}_j - \widetilde{P}_{j-1}$, $j = 1,\ldots,n$. Тепер (7.5) є очевидним, залишається перевірити (7.6). Справді, нехай $P_j := P_{j,m}$. Оскільки

$$0 \leqslant \widetilde{P}_j(x) \leqslant 1, \quad x \in [-1,1],$$

то

$$|P_j(x)| = |\widetilde{P}_j(x) - \widetilde{P}_{j-1}(x)| < 1, \quad x \in [-1,1].$$

Зокрема, якщо $x \in [x_j, x_{j-2}]$ (де $x_{-1} := x_0$), то

$$|x - x_j| \leqslant \max\{|I_j|, |I_{j-1}|\} < 4|I_j|,$$

отже

$$|P_{j,m}(x)| \leqslant \min\left\{1, \frac{4^{m-1}|I_j|^{m-1}}{|x-x_j|^{m-1}}\right\}.$$

Якщо ж $x \in [-1,1] \setminus [x_j, x_{j-2}]$, то

$$|x - x_j| < 4|x - x_j^0| \quad \text{і} \quad |x - x_j| < 4|x - x_{j-1}^0|,$$

отже, за попередньою лемою,

$$
\begin{aligned}
|P_{j,m}(x)| &\leqslant |\widetilde{P}_j(x) - \chi_j(x)| + |\widetilde{P}_{j-1}(x) - \chi_{j-1}(x)| \\
&\leqslant \frac{|I_j|^{m-1}}{|x - x_j^0|^{m-1}} + \frac{|I_{j-1}|^{m-1}}{|x - x_{j-1}^0|^{m-1}} \\
&\leqslant (4^{m-1} + 4^{m-1} \cdot 4^{m-1}) \frac{|I_j|^{m-1}}{|x - x_j|^{m-1}}.
\end{aligned}
$$

□

*Зауваження* 7.2. За допомогою цієї теореми ми доведемо оцінки наближення функцій многочленами.

## 8. Модуль неперервності.

*Зауваження* 8.1. З двох неперевних функцій більш гладкою є та, що має більше похідних. Функції, що не мають похідних, порівнюються за допомогою скінченних різниць ($f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ — похідна, а $f(x+h) - f(x)$ — перша скінченна різниця).

**Означення 8.1.** Модулем непервності функції $f \in C[a, b]$ називається функція $\omega : [0, \infty] \to [0, \infty)$, визначена рівністю

$$
\omega(t) := \omega(t, f, [a, b]) := \begin{cases} \sup\limits_{h \in [0,t]} \max\limits_{x \in [a, b-h]} |f(x+h) - f(x)|, & t \leqslant b - a, \\ \max\limits_{x, x' \in [a,b]} |f(x) - f(x')|, & t > b - a. \end{cases}
$$

**Вправа 20.** *Розглянемо функції* $f_j : [0, 1] \to \mathbb{R}$, *для* $x \in [0, 1]$

$$
\begin{aligned}
&f_1(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1; \\
&f_2(x) = 1; \\
&f_3(x) = x^2; \\
&f_4(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|; \\
&f_5(x) = \cos \pi x; \\
&f_6(x) = x \log \frac{e}{x}.
\end{aligned}
$$

*Довести, що для* $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
&\omega(t, f_1, [0,1]) = t^\alpha;\\
&\omega(t, f_2, [0,1]) = 0;\\
&\omega(t, f_3, [0,1]) = t(1-t);\\
&\omega(t, f_4, [0,1]) = \min\{1/2, t\};\\
&\omega(t, f_5, [0,1]) = 2\sin(t/2);\\
&\omega(t, f_6, [0,1]) = t\log\frac{e}{t}.
\end{aligned}$$

**Лема 8.1.** *Модуль неперервності* $\omega(t) = \omega(t, f, [a,b])$ *функції* $f \in C[a,b]$ *має властивості:*

1) $\omega(0) = 0$*;*
2) $\omega$ *— неспадна функція;*
3) *півадитивність: для довільних* $t_1, t_2 > 0$*:*

$$\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2);$$

4) $\omega \in C[0, \infty)$*.*

*Доведення.* 1), 2) очевидні.
3) Нехай $t_1 + t_2 \leqslant b - a$. Якщо $x, x+h \in [a,b]$, при $h = h_1 + h_2$, $h_1 \in [0, t_1]$, $h_2 \in [0, t_2]$, маємо $|f(x+h) - f(x)| \leqslant |f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)| + |f(x+h_1) - f(x)|$, звідки випливає потрібна нерівність. Випадок $t_1 + t_2 > b - a$ зводиться до $t_1 + t_2 \leqslant b - a$.
4) Неперервність в точці $t = 0$ безпосередньо випливає з рівномірної неперервності $f$. Далі, враховуючи 2) та 3), для $0 < t < t + \delta$ маємо $\omega(t) \leqslant \omega(t+\delta) \leqslant \omega(t) + \omega(\delta)$, значить $\omega$ є рівномірно неперервною, бо як вже доведено $\omega(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$. □

**Вправа 21.** *Довести півадитивність модуля неперервності для* $t_1 + t_2 > b - a$*.*

**Лема 8.2.** *Нехай* $\omega$ *— функція, що задовольняє умовам 1)–3) леми 8.1. Тоді*

1) $\omega(nt) \leqslant n\omega(t)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$*;*
2) *при* $0 < t_1 < t_2$*:* $\dfrac{\omega(t_2)}{t_2} \leqslant 2\dfrac{\omega(t_1)}{t_1}$*;*
3) $\omega(t) \geqslant \dfrac{t}{2(b-a)}\,\omega(b-a)$, $0 < t < b - a$*.*

*Доведення.* Твердження 1) випливає з півадитивнсті за індукцією по $n$. Для доведення 2) покладемо $n := \left[\frac{t_2}{t_1}\right]$. Тоді

$$\begin{aligned}\omega(t_2) &\leqslant \omega((n+1)t_1) \leqslant (n+1)\omega(t_1)\\ &= \left(\left[\frac{t_2}{t_1}\right]+1\right)\omega(t_1) \leqslant \left(\frac{t_2}{t_1}+1\right)\omega(t_1)\\ &\leqslant 2\left(\frac{t_2}{t_1}\right)\omega(t_1).\end{aligned}$$

При $t_1 = t$ і $t_2 = b - a$ отримуємо 3). □

*Зауваження* 8.2. Якщо $f$ не є сталою, то її модуль неперервності по порядку $\geqslant t$ ($\omega(t) \geqslant ct$). Якщо $\omega(t) = o(t)$, то

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = o(t)\frac{1}{t}, \quad t \to 0,$$

тому похідна $f$ існує в кожній точці $x$ і є рівною 0, тобто $f$ — стала.

*Зауваження* 8.3. Якщо $f$ — абсолютно-неперервна на $[a, b]$ і $|f'(x)| \leqslant M$ для майже всіх $x \in [a, b]$ по мірі Лебега, то

$$\omega(t, f, [a, b]) \leqslant Mt, \quad 0 \leqslant t \leqslant b - a,$$

тобто $f$ задовольняє умову Lip1, $f \in \mathrm{Lip}_M 1$.

*Доведення.* З абсолютної неперервності $f$ за теоремою Лебега

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt, \quad x \in [a, b],$$

звідки для $x', x'' \in [a, b]$

$$\begin{aligned}|f(x') - f(x'')| &= \left|\int_{x'}^{x''} f'(t)\,dt\right|\\ &\leqslant \int_{x'}^{x''} |f'(t)|\,dt \leqslant M\,|x' - x''|,\end{aligned}$$

тому $\omega(t, f, [a, b]) \leqslant Mt$. □

*Зауваження* 8.4. Якщо

$$\omega(t, f, [a, b]) \leqslant Mt, \quad 0 \leqslant t \leqslant b - a,$$

тобто $f \in \mathrm{Lip}_M 1$, то $f$ — абсолютно-неперервна на $[a, b]$ і $|f'(x)| \leqslant M$ для майже всіх $x \in [a, b]$ по мірі Лебега.

*Доведення.* Абсолютна неперервність випливає з умови Lip1. Перевіримо нерівність. З абсолютної неперервності маємо, що $f$ має похідну майже скрізь, і для довільної $x \in [a, b]$, де похідна існує, маємо

$$|f'(x)| = \left|\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant \left|\frac{Mh}{h}\right| = M.$$

□

*Зауваження* 8.5. Якщо $\varphi$ — неспадна функція на $[0, \infty)$, а функція $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ — не зростає на $[0, \infty)$, то функція $\varphi$ — півадитивна.

*Доведення.* Нехай $t_1, t_2 > 0$, тоді

$$\varphi(t_1 + t_2) = \frac{t_1}{t_1 + t_2}\varphi(t_1 + t_2) + \frac{t_2}{t_1 + t_2}\varphi(t_1 + t_2) \leqslant \varphi(t_1) + \varphi(t_2).$$

□

**Вправа 22.** *Показати, що твердження, обернене до останнього зауваження, взагалі кажучи, є невірним.*

*Зауваження* 8.6. Взагалі кажучи, модуль неперервності $\omega(t, f, [a, b]) = \omega(t)$ не є функцією такою, що $\dfrac{\omega(t)}{t}$ не зростає. Але він задовольняє нерівність

$$\omega(\lambda t) \leqslant (\lambda + 1)\omega(t), \quad \lambda, t > 0, \tag{8.1}$$

яка є наслідком нерівності 1) леми 8.2.

## 9. Пряма теорема наближення многочленами.

Для зручності, покладемо $E_n(f) := E_n(f)_{C[-1,1]}$, та $\omega(t, f) := \omega(t, f, [-1, 1])$.

**Теорема 9.1** (пряма теорема наближення алгебраїчними многочленами)**.** *Якщо $f \in C[-1, 1]$, то має місце нерівність типу Джексона*

$$E_n(f) \leqslant c_1\omega(1/n, f), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.1}$$

*де $c_1$ — абсолютна стала.*

*Доведення.* Маючи намір використати теорему про розбиття одиниці, візьмемо $m = 6$ та позначимо $c_2 := c_2(6)$, де абсолютна стала $c_2(6)$ визначена в цій теоремі. За теоремою 7.1 маємо набір $\{P_j\}_{j=1}^n$ алгебраїчних многочленів степеня $< mn = 6n$ таких, що $\sum_{j=1}^n P_j(x) \equiv 1$ і

$$|P_j(x)| \leqslant \left(\min\left\{1, \frac{c_2|I_j|^5}{|x - x_j|^5}\right\}\right), \quad x \in [-1, 1]. \tag{9.2}$$

Нагадаємо, $x_j = \cos(j\pi/n)$, $I_j = [x_j, x_{j-1}]$, $|x_j| = x_{j-1} - x_j$. Розглянемо многочлен

$$Q_n(x) := \sum_{j=1}^{n} f(x_j) P_j(x), \quad x \in [-1, 1],$$

його степінь $< 6n$.

Зафіксуємо $x \in [-1, 1]$, та $i$ таке, що $x \in I_i$. Маємо

$$|f(x) - Q_n(x)| = \left| \sum_{j=1}^{n} (f(x) - f(x_j)) P_j(x) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \omega(|x - x_j|, f) |P_j(x)|$$

$$= \sum_{j=i-1}^{i+1} \omega(|x - x_j|, f) |P_j(x)| + \sum_{j=1, j \neq i \pm 1, i}^{n} \omega(|x - x_j|, f) |P_j(x)|. \tag{9.3}$$

Спочатку оцінимо першу суму. Для цього врахуємо, що

$$x - x_i \leqslant |I_i|, \quad x_{j-1} - x \leqslant |I_i|, \quad x - x_{i+1} \leqslant 4|I_i|, \quad |P_j(x)| \leqslant 1,$$

та отримаємо

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} \omega(|x - x_j|, f) |P_j(x)| \leqslant 2\omega(|I_i|, f) + \omega(4|I_i|, f) \leqslant 6\omega(|I_i|, f).$$

Щоб оцінити другу суму, використаємо нерівності

$$|P_j(x)| \leqslant \frac{c_2 |I_j|^5}{|x - x_j|^5} \leqslant \frac{c_3 |I_j|^5}{|x - x_j| |x_i - x_j|^4}, \quad x \in I_i,$$

$$\omega(|x - x_j|, f) = \omega\left( \frac{|x - x_j|}{|I_i|} |I_i|, f \right) \leqslant \left( \frac{|x - x_j|}{|I_i|} + 1 \right) \omega(|I_i|, f)$$
$$\leqslant 4 \frac{|x - x_j|}{|I_i|} \omega(|I_i|, f), \quad x \in I_i,$$

та отримаємо

$$\sum_{j=1, j \neq i-1, i}^{n} \omega(|x - x_j|, f) |P_j(x)| \leqslant 4c_3 \omega(|I_i|, f) \sum_{j=1, j \neq i-1, i, i+1}^{n} \frac{|I_j|^5}{|I_i| |x_i - x_j|^4}$$
$$=: 4c_3 \omega(|I_i|, f) \sum_{j=1, j \neq i-1, i, i+1}^{n} A_j.$$

Застосовуючи нерівності

$$|I_j|^2 \leqslant 4|I_i| |x_i - x_j|, \quad i \neq j,$$

та

$$|x_i - x_{j-1}| < 4|x_i - x_j|, \quad i \neq j - 1,$$

маємо, для $j \neq i-1, i, i+1$,

$$\begin{aligned} A_j = \frac{|I_j|^5}{|I_i||x_i - x_j|^4} &\leqslant \frac{4^2|I_i||I_j|}{|x_i - x_j|^2} \\ &\leqslant \frac{4^4|I_i||I_j|}{|x_i - x_j||x_i - x_{j-1}|} = 4^4|I_i| \int_{I_j} \frac{dx}{(x-x_i)^2}. \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1, j\neq i-1,i,i+1}^{n} A_j = \sum_{j=i+2}^{n} A_j + \sum_{j=1}^{i-2} A_j \\ &\leqslant 4^4|I_i| \int_{-1}^{x_{j+1}} \frac{dx}{(x-x_i)^2} + \leqslant 4^4|I_i| \int_{x_{i-2}}^{1} \frac{dx}{(x-x_i)^2} \\ &\leqslant 4^4|I_i| \int_{-\infty}^{x_{i+1}} \frac{dx}{(x-x_i)^2} + \leqslant 4^4|I_i| \int_{x_{i-2}}^{\infty} \frac{dx}{(x-x_i)^2} \\ &= 4^4|I_i| \left( \frac{1}{|I_i| + |I_{i+1}|} + \frac{1}{|I_i| + |I_{i-1}|} \right) \\ &< c_4. \end{aligned}$$

Ми скористались наступною нескладною вправою.

**Вправа 23.** *Довести, що*

$$|I_j|^2 \leqslant 4|I_i||x_i - x_j|.$$

Тепер, продовжуючи (9.3), маємо

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant c\omega(1/n, f) + c\omega(1/n, f) = c\omega(1/n, f).$$

Оскільки $x$ був довільним фіксованим, маємо

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant c\omega(|I_i|, f) \leqslant c\omega(1/n, f), \quad x \in [-1, 1]. \tag{9.4}$$

Многочлен $Q_n$ має степінь $< 6n$, а потрібно $n$.

**Вправа 24.** *Довести, що з* (9.4) *випливає твердження теореми 9.1*

Теорему доведено. □

## 10. Теореми Вейєрштраса, Стоуна, Мюнца, Мергеляна.

Теореми Вейєрштраса встановлюють лише *можливість* наближення. Наведемо кілька варіантів формулювання теореми Вейєрштраса.

**Варіант 1.** *Кожну неперервну на $[a, b]$ функцію можна як завгодно добре наблизити алгебраїчним многочленом.*

**Варіант 2.** *Якщо $f \in C[a, b]$, то $E_n(f)_{C[a,b]} \to 0$, $n \to \infty$.*

**Варіант 3.** *Множина $\mathcal{P}$ — всіх алгебраїчних многочленів (які розглядаються на $[a, b]$) є скрізь щільною в $C[a, b]$, тобто $C[a, b] = \overline{\mathcal{P}}$.*

*Зауваження* 10.1. Теорема Вейєрштраса випливає з основної теореми попереднього параграфу і неперервності в нулі модуля неперервності.

*Зауваження* 10.2. В курсі математичного аналізу теорема Вейєрштраса доводиться за допомогою многочленів Бернштейна:

$$B_n(x, f) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f\left(\frac{2j}{n} - 1\right) (1-x)^{n-j}(1+x)^j, \quad x \in [-1, 1].$$

**Вправа 25.** *Нехай $f \in C[-1, 1]$. Довести, що*

$$|f(x) - B_n(x, f)| \leqslant c\,\omega\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{n}}, f\right), \quad x \in [-1, 1],$$

*де $c$ — абсолютна стала.*

**Вправа 26.** *Довести, що якщо $f$ — монотонна на $[-1, 1]$, то $B_n(\cdot, f)$ — теж монотонний на $[-1, 1]$.*

**Вправа 27.** *Довести, що якщо $f$ — опукла на $[-1, 1]$, то $B_n(\cdot, f)$ — теж опуклий на $[-1, 1]$.*

**Вправа 28.** *Довести, що якщо $f \in C^{(r)}[-1, 1]$, $f^{(r)} \geqslant 0$, то $B_n(\cdot, f)^{(r)} \geqslant 0$.*

*Зауваження* 10.3. Властивості многочленів Бернштейна, показані у цих вправах, означають, що многочлени Бернштейна забезпечують *формозберігаюче наближення* (або англ. Shape Preserving Approximation).

**Теорема 10.1** (SPA)**.** *Кожну монотонну і неперервну на $[-1, 1]$ функцію можна як завгодно добре наблизити монотонним многочленом.*

Аналогічні твердження мають місце для опуклих функцій, і т.д.

Широким узагальненням теореми Вейєрштраса є теорема Стоуна.

**Означення 10.1.** Нехай $(X, \rho)$ — метричний простір. Множина $A$ неперервних на $X$ дійснозначних функцій називається алгеброю неперервних функцій, якщо $A$ — лінійний простір (сума та множення на числа залишають в $A$) та якщо $f, g \in A$, то $fg \in A$ (добуток).

**Означення 10.2.** Алгебра $A$ ніде не зникає, якщо для будь-якої точки $x \in X$ знайдеться $f \in A$ така, що $f(x) \neq 0$.

**Означення 10.3.** Алгебра $A$ розділяє точки $X$, якщо для довільних двох різних точок $x_1, x_2 \in X$ знайдеться $f \in A$ така, що $f(x_1) \neq f(x_2)$.

**Теорема 10.2** (Стоуна). *Нехай $(X, \rho)$ — компактний метричний простір. Алгебра $A \subset C(X)$ скрізь щільна в $C(X)$ тоді і тільки тоді, коли $A$ ніде не зникає на $X$, і $A$ розділяє точки $X$.*

*Приклад* 10.1. Теорема Стоуна не виконується для алгебри $A$ функцій, що приймають значення в $\mathbb{C}$ (над полем $\mathbb{C}$). Нехай $A$ — множина алгебраїчних многочленів з комплексними коефіцієнтами в $|z| \leqslant 1$. $A$ задовольняє умовам теореми Стоуна, але вона є алгеброю над $\mathbb{C}$ і ця алгебра не є скрізь щільною в $C(\{z : |z| \leqslant 1\})$, бо замиканням цієї алгебри є множина аналітичних функцій, а серед функцій з $C(\{z : |z| \leqslant 1\})$ є неаналітичні функції, наприклад $f(z) = |z|$.

*Зауваження* 10.4. Існує аналог теореми Стоуна для алгебри над $\mathbb{C}$.

*Приклад* 10.2. Нехай $X \subset \mathbb{R}^m$ — замкнена обмежена множина, $\mathcal{P}$ — множина всіх алгебраїчних многочленів, що розглядаються на $X$, тобто елементи $\mathcal{P}$ — многочлени

$$p(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j_1=0}^{l_1} \cdots \sum_{j_m=0}^{l_m} a_{j_1 \ldots j_m} x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{j_m}.$$

Ясно, що $\mathcal{P}$ — алгебра, що ніде не зникає та розділяє точки. Отже, ця алгебра задовольняє умови теореми Стоуна. Тому довільну неперервну на замкненій обмеженій множині можна наблизити алгебраїчним многочленом від $m$ змінних.

*Приклад* 10.3. З теореми Стоуна випливає теорема Вейєрштраса наближення $2\pi$ — періодичних функцій тригонометричними поліномами. Для $[0, 2\pi)$ точки $0$ та $2\pi$ ототожнюються і розглядається коло $e^{it}$ — замкнена, обмежена множина.

*Приклад* 10.4. На $[0, \pi]$ розглянемо множину тригонометричних поліномів тільки по синусах. Це — алгебра, але вона не розділяє точки множини.

*Зауваження* 10.5. Теорема Стоуна не охоплює всі множини, скрізь щільні в множині неперервних функцій. Приклади таких множин дає теорема Мюнца.

**Теорема 10.3** (Мюнца). *Нехай* $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \to \infty$. *Множина поліномів вигляду*

$$\sum_{j=0}^{n} c_j x^{\lambda_j}, \quad c_j \in \mathbb{R},$$

*є щільною в* $C[0,1]$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = \infty.$$

*Зауваження* 10.6. Аналог теореми Вейєрштраса для наближення функцій комплексної змінної доведений Мергеляном.

**Означення 10.4.** Нехай $M \subset \mathbb{C}$.

$$f \in A(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) & f \text{ — неперервна на } M,\ f : M \to \mathbb{C}, \\ 2) & f \text{ — аналітична у всіх внутрішніх точках } M. \end{cases}$$

**Теорема 10.4** (Мергеляна). *Будь-яку* $f \in A(M)$ *можна як завгодно добре наблизити на* $M$ *алгебраїчними многочленами тоді і тільки тоді, коли* $M$ *— замкнена і обмежана множина та* $\mathbb{C} \setminus M$ *— зв'язна множина.*

## 11. Многочлени Лагранжа. Розділені та скінченні різниці.

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\{x_0, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}$, і відомі значення деякої функції $f$ в цих точках, тобто $f(x_j)$.

### 11.1. Многочлен Лагранжа.

**Означення 11.1.** Многочленом Лагранжа $L(x, f, x_0, \dots, x_m) \equiv L(x, f)$ степеня $\leqslant m$, що інтерполює функцію $f$ в точках $x_0, \dots, x_m$ називають алгебраїчний многочлен степеня $\leqslant m$ такий, що $L(x_j, f) = f(x_j)$, $j = 0, \dots, m$.

*Приклад* 11.1. Для $m = 0$ $L(x, f, x_0) \equiv f(x_0)$, а для $m = 1$

$$L(x, f, x_0, x_1) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \tag{11.1}$$

**Означення 11.2.** При фіксованому $m$ фундаментальними многочленами Лагранжа називають многочлени

$$l_j(x) := \prod_{i=0, i\neq j}^{m} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Легко бачити, що

$$l_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

тому многочлен Лагранжа завжди існує і може бути зображений у вигляді

$$L(x, f, x_0, \ldots, x_m) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) l_j(x).$$

З основної теореми алгебри випливає, що многочлен Лагранжа єдиний. Якщо їх було б принаймні 2, то вони мусили б співпадати принаймні в $m+1$ точці, що неможливо, бо їх різниця — нетривіальний многочлен степеня $\leqslant m$ мав би $m+1$ нуль. Також отримуємо, що при $f = p_m$ — многочлен степеня $\leqslant m$ буде $L(x, p_m) \equiv p_m(x)$.

Неважко бачити, що многочлен Лагранжа лінійно залежить від інтерполюємої функції, тобто

$$L(x, f + g) = L(x, f) + L(x, g),$$
$$L(x, \alpha f) = \alpha L(x, f), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

*Зауваження* 11.1. Часто $l_j$ записують в іншій формі. Якщо $p(x) := (x - x_0) \ldots (x - x_m)$, то

$$l_j(x) = \frac{p(x)}{(x - x_j) p'(x_j)}, \quad x \neq x_j.$$

11.2. **Розділені різниці.** Розглянемо різницю $f(x) - L(x, f, x_0, \ldots, x_{m-1})$. Розділимо її на $(x - x_0) \ldots (x - x_{m-1})$ і порахуємо частку в точці $x_m$.

**Означення 11.3.** Розділеною різницею порядку $m$ функції $f$ у вузлах (точках) $x_0, \ldots, x_m$ називають вираз:

$$\begin{aligned} [x_0, \ldots, x_m; f] &= \frac{f(x_m) - L(x_m, f, x_0, \ldots, x_{m-1})}{(x_m - x_0) \ldots (x_m - x_{m-1})} \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1) \ldots (x_0 - x_m)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_0 - x_m)} \\ &\quad + \cdots + \frac{f(x_m)}{(x_m - x_0) \ldots (x_m - x_{m-1})}. \end{aligned}$$

**Вправа 29.** *Перевірити останню рівність.*

*Зауваження* 11.2. Розділена різниця симметрична відносно вузлів, тобто $[x_0, x_1; f] = [x_1, x_0; f]$, $[x_0, x_1, x_2; f] = [x_0, x_2, x_1; f] = \cdots = [x_2, x_1, x_0; f]$, і т.д.

Для повноти позначимо $[x_0; f] := f(x_0)$.

**Теорема 11.1** (формула Ньютона)**.** *Многочлен лагранжа степеня $m$ можна представити за формулою Ньютона*

(11.2)

$L(x, f, x_0, \ldots, x_m) = [x_0; f] + [x_0, x_1; f](x - x_0) + \cdots + [x_0, \ldots, x_{m-1}; f](x - x_0) \ldots (x - x_{m-1})$.

*Доведення.* Скористаємось методом математичної індукції. База $m = 1$ випливає з (11.1). Нехай (11.2) істино для $m - 1$. Доведемо (11.2) для $m$. Треба довести, що

$$L(x, f, x_0, \ldots, x_m) = L(x, f, x_0, \ldots, x_{m-1}) + [x_0, \ldots, x_m; f](x - x_0) \ldots (x - x_{m-1}).$$

В обох частинах рівності — многочлени степеня $\leqslant m$. Тому рівність досить перевірити в точках $x_j$, $j = 0, \ldots, m$ (в одній $m$-ій точці). Якщо $j \neq m$, то в точці $x_j$ ліва та права частини рівні внаслідок означення многочлена Лагранжа. Якщо $j = m$, то в точці $x_m$ шукана рівність є означенням розділеної різниці. □

**Наслідок 11.1.** *Нехай $f \in C[a, b]$ має $m$-ту похідну на $(a, b)$, $x_j \in [a, b]$, $j = 0, \ldots, m$. Тоді існує $\theta \in (a, b)$ така, що*

$$[x_0, \ldots, x_m, f] = \frac{f^{(m)}(\theta)}{m!}.$$

*Доведення.* Розглянемо $g(x) := f(x) - L(x, f, x_0, \ldots, x_m)$, $x \in [a, b]$. Функція $g$ має принаймні $m+1$ нуль на $[a, b]$, тому за теоремою Ролля $m$-та похідна $g$ має принаймні один нуль на $(a, b)$, тобто існує $\theta \in (a, b) : g^{(m)}(\theta) = 0$. Отже,

$$0 = g^{(m)}(\theta) = f^{(m)}(\theta) - L^{(m)}(\theta, f, x_0, \ldots, x_m) = f^{(m)}(\theta) - [x_0, \ldots, x_m; f]m!.$$

□

*Зауваження* 11.3. Якщо всі вузли спрямувати в одну точку, то многочлен Лагранжа перетвориться в многочлен Тейлора.

**Наслідок 11.2.** *Для кожного многочлена $p_{m-1}$ степеня $\leqslant m - 1$, виконується рівність*

$$[x_0, \ldots, x_m; p_{m-1}] = 0.$$

*Також* $[x_0, \ldots, x_m; x^m] = 1$.

**Лема 11.1.** *Має місце рівність*

$$\frac{[x_0,\ldots,x_{m-1};f]-[x_1,\ldots,x_m;f]}{x_0-x_m}=[x_0,\ldots,x_m;f]. \tag{11.3}$$

*Доведення.* Внаслідок єдиності інтерполяційного многочлена Лагранжа,

$$L(x,f,x_1,\ldots,x_{m-1},x_0,x_m)\equiv L(x,f,x_1,\ldots,x_{m-1},x_m,x_0).$$

Позначимо $p(x):=(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_{m-1})$. За формулою Ньютона,

$$\begin{aligned} L(x,f,x_1,\ldots,x_{m-1},&x_0,x_m)=L(x,f,x_1,\ldots,x_{m-1})\\ &+[x_1,\ldots,x_{m-1},x_0;f]p(x)+[x_1,\ldots,x_{m-1},x_0,x_m;f]p(x)(x-x_0) \end{aligned} \tag{11.4}$$

та

$$\begin{aligned} L(x,f,x_1,\ldots,x_{m-1},&x_m,x_o)=L(x,f,x_1,\ldots,x_{m-1})\\ &+[x_1,\ldots,x_{m-1},x_m;f]p(x)+[x_1,\ldots,x_{m-1},x_m,x_0;f]p(x)(x-x_m). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Віднімаючи (11.4) від (11.5) та враховуючи симетричність розділеної різниці, отримуємо

$$0=[x_0,\ldots,x_{m-1};f]p(x)-[x_1,\ldots,x_m;f]p(x)-(x_0-x_m)[x_0,\ldots,x_m;f]p(x).$$

Нарешті, ділимо останню рівність на $p(x)$. □

*Зауваження* 11.4. Рівність (11.3) часто використовують для означення розділених різниць.

**Лема 11.2** (про представлення розділеної різниці)**.** *Якщо функція $f$ є абсолютно неперервною на $[a,b]$ і $x_j\in[a,b]$, $j=0,\ldots,m$, то*

$$[x_0,\ldots,x_m;f]=\int_0^1[x_0,\ldots,x_{m-1};f_1]\,dt,$$

*де*

$$f_1(u):=f'(x_m+t(u-x_m)).$$

*Доведення.* Спочатку перевіримо справедливість леми для $m=1$. Оскільки функція $f$ є абсолютно неперервноюа на $[a,b]$, то, за теоремою Лебега, для $f$ істина формула Ньютона-Лейбніца

$$f(x_1)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}f'(x)\,dx.$$

Після заміни $x = x_1 + t(x_0 - x_1)$, маємо

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = \int_0^1 f'(x_1 + t(x_0 - x_1)\, dt$$
$$= \int_0^1 [x_0; f_1]\, dt$$

Тепер припустимо за індукцією, що лема справедлива для чила $m - 1 \geqslant 1$. Тоді, враховуючи (11.3), маємо

$$[x_0, \dots, x_m; f] = \frac{[x_1, \dots, x_m; f] - [x_0, x_2, \dots, x_m; f]}{x_1 - x_0}$$
$$= \int_0^1 \frac{[x_1, \dots, x_{m-1}; f_1] - [x_0, x_2, \dots, x_{m-1}; f_1]}{x_1 - x_0}\, dt = \int_0^1 [x_0, \dots, x_{m-1}; f_1]\, dt.$$

□

**Теорема 11.2** (про представлення розділеної різниці)**.** *Якщо $f$ має $(m-1)$-шу абсолютно неперервну похідну на $[a, b]$ і $x_j \in [a, b]$, $j = 0, \dots, m$, то розділена різниця подається у вигляді*

$$[x_0, \dots, x_m; f] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} f^{(m)}(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + \dots + t_m(x_m - x_{m-1}))\, dt_m \dots dt_1.$$

**Вправа 30.** *Довести цю теорему, використовуючи лему 11.1.*

11.3. **Розділені різниці та многочлени Лагранжа – Ерміта.** Скрізь надалі

$$f^{(0)} := f.$$

Нехай задані $(p + 1)$ різні точки $y_0, \dots, y_p$. Нехай в кожній точці $y_j$ задані не тільки значення функції $f$, тобто числа $f(y_j) = f^0(y_j)$, а і значення перших $q_i$ похідних. Тобто, нехай задані числа

$$f^{(i)}(y_j), \quad j = 0, \dots, p, \quad i = 0, \dots, q_j.$$

Позначимо

$$m := p + \sum_{j=0}^{p} q_j.$$

**Означення 11.4.** Інтерполяційним многочленом Лагранжа – Ерміта $L(x; f; (y_0, q_0), \dots, (y_p, q_p)) \equiv L(x, f)$ називають алгебраїчний многочлен степеня $\leqslant m$ такий, що

$$L^{(i)}(y_j, f) = f^{(i)}(y_j), \quad j = 0, \dots, p, \quad i = 0, \dots, q_j.$$

Зокрема, $L(x; f; (y_0, 0), \dots, (y_m, 0) \equiv L(x; f; y_0, \dots, y_m)$.

**Означення 11.5.** Узагальненою розділеною різницею порядку $m$ функції $f$ називається число

$$[(y_0, q_0), \ldots, (y_p, q_p); f] := \frac{1}{q_0! \cdot \cdots \cdot q_p!} \frac{\partial^{q_0+\cdots+q_p}}{\partial y_0^{q_0} \ldots \partial y_p^{q_p}} [y_0, \ldots, y_p; f].$$

Зокрема, $[(y_0, 0), \ldots, (y_m, 0); f] \equiv [y_0, \ldots, y_m; f]$.

**Теорема 11.3.** *Многочлен Лагранжа – Ерміта існує, єдиний і, при* $x \neq y_j$, $\quad j = 0, \ldots, p$, *має місце рівність*

$$[(y_0, q_0), \ldots, (y_p, q_p), (x, 0); f] = \frac{f(x) - L(x; f; (y_0, q_0), \ldots, (y_p, q_p))}{(x - y_0)^{q_0} \cdot \cdots \cdot (x - y_p)^{q_p}}.$$

**Вправа 31.** *Довести теорему.*

**Вправа 32.** *Довести, що для узагальнених розділених різниць справедливі аналоги всіх співвідношень, доведених вище для звичайних розділених різниць.*

11.4. **Скінченні різниці.** Нехай всі $m + 1$ точки є рівновіддаленими, тобто існує $h > 0$ таке, що $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, \ldots, m$. Позначимо

$$f(x_m) - L(x_m, f, x_0, \ldots, x_{m-1}) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x_0 + jh) =: \Delta_h^m(f, x_0).$$

**Означення 11.6.** Вираз $\Delta_h^m(f, x_0)$ називається $m$-тою різницею функції $f$ з кроком $h$ в точці $x_0$.

Позначимо: $\Delta_h^0(f, x_0) := f(x_0)$, $\Delta_0^m(f, x_0) := 0$.

**Лема 11.3.**

$$\Delta_h^m(f, x_0) = h^m m! [x_0, \ldots, x_m, f].$$

*Доведення.* За означенням розділеної різниці

$$[x_0, \ldots, x_m; f] = \frac{f(x_m) - L(x_m, f, x_0, \ldots, x_{m-1})}{(x_m - x_0) \ldots (x_m - x_{m-1})} = \frac{\Delta_h^m(f, x_0)}{h^m m!}.$$

□

**Наслідок 11.3.** *Властивості скінченних різниць випливають з властивостей розділених різниць.*

*Зауваження* 11.5. Властивості скінченних різниць можна довести і безпосередньо, використовуючи рівність

$$\Delta_h^{m+1}(f, x_0 + h) - \Delta_h^{m+1}(f, x_0) = \Delta_h^m(f, x_0).$$

## 12. Модулі гладкості (модулі неперервності порядку $k$).

Модуль неперервності порядку 1 — модуль неперервності функції.

**Означення 12.1.** Модулем неперервності порядку $k$ функції $f \in C[a,b]$ називається функція $\omega_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, визначена рівністю:

$$\omega_k(t, f, [a,b]) := \sup_{h\in[0,t]} \sup_{x\in[a,b-kh]} |\Delta_h^k(f,x)|,$$

для $t \in [0,(b-a)/k]$, і

$$\omega_k(t, f, [a,b]) := \omega_k((b-a)/k, f, [a,b]),$$

для $t > (b-a)/k$.

**Вправа 33.** *Знайти $k$-ті модулі неперервності функцій з вправи 20.*

**Лема 12.1.** *Модуль неперервності $\omega_k(t) = \omega_k(t, f, [a,b])$ порядку $k$ функції $f \in C[a,b]$ має властивості:*

1) $\omega_k(0) = 0$, $\omega_k(0+) = 0$;
2) $\omega_k$ *— неспадна функція на* $[0,\infty)$;
3) $\omega_k$ *— неперервна функція на* $[0,\infty)$;
4) $\omega_k(nt) \leqslant n^k \omega_k(t)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$.

*Доведення.* 1) $\omega_k(0) = 0$ випливає з означення, покажемо, що $\omega_k(0+) = 0$. Дійсно,

$$\begin{aligned}|\Delta_h^k(f,x)| &= |\Delta_h^{k-1}(f,x+h) - \Delta_h^{k-1}(f,x)| \\ &\leqslant \ldots \leqslant 2^{k-1}\omega_1(h, f, [a,b]),\end{aligned}$$

і за доведеною раніше властивісю першого модуля неперервності, отримуємо $\omega_k(0+) = 0$.

2) Випливає з означення.

4) Випливає з наступної формули, яку легко довести методом математичної індукції

$$\Delta_{nh}^k(f,x) = \sum_{j_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{j_k=0}^{n-1} \Delta_h^k(f, x + h(j_1 + \cdots + j_k)).$$

□

**Вправа 34.** *Довести властивість 3).*

*Зауваження* 12.1. Найважливішими інструментами для роботи з модулями неперервності порядку $k$ є нерівності Маршо та Уітні.

## 13. Нерівність Уітні (Whitney).

Нагадаємо, що якщо $f = p_{k-1}$ — многочлен степеня $\leqslant k-1$, то $\Delta_h^k(p_{k-1}, x) \equiv 0$.

Для заданої функції $f \in C[a,b]$ позначимо $p_{k-1}^*$ — многочлен найкращого наближення $f$ на $[a,b]$. Тоді

$$|\Delta_h^k(f,x)| = |\Delta_h^k(f - p_{k-1}^*, x)| = \left|\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j}\binom{k}{j}(f(x+jh) - p_{k-1}^*(x+jh))\right|$$
$$\leqslant E_{k-1}(f)_{C[a,b]} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} = 2^k E_{k-1}(f)_{C[a,b]},$$

тобто

$$\omega_k((b-a)/k, f, [a,b]) \leqslant 2^k E_{k-1}(f)_{C[a,b]}.$$

Уітні довів обернену нерівність.

**Теорема 13.1.** *Для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує стала $W(k)$ така, що для довільної $f \in C[a,b]$*

$$E_{k-1}(f)_{[a,b]} \leqslant W(k)\omega_k((b-a)/k, f, [a,b]).$$

*Зауваження* 13.1. Перевіримо цю нерівність для $k = 1$:

$$E_0(f)_{[a,b]} \leqslant \max_{x \in [a,b]} |f(x) - f(a)| \leqslant \omega(b-a, f, [a,b]).$$

*Зауваження* 13.2. Перевіримо цю нерівність для $k = 2$ на $[a,b] = [0,1]$.

Нехай $l$ — лінійна функція, яка інтерполює функцію $f$ в точках 0 та 1. Покладемо $g(x) := f(x) - l(x)$, $x \in [0,1]$. Тоді $E_1(f) \leqslant \|g\|_{[0,1]}$. Зауважимо, що $g(0) = g(1) = 0$. Позначимо $x^*$ — точка, в якій $|g(x^*)|$ набуває найбільшого значення на $[0,1]$. Будемо вважати, що $g(x^*) \geqslant 0$ та $0 \leqslant x^* \leqslant 1/2$. Тоді

$$2g(x^*) = (-g(0) + 2g(x^*) - g(2x^*)) + g(0) + g(2x^*) \leqslant \omega_2(x^*, g, [0,1]) + g(x^*),$$

звідки, з урахуванням того, що $g - f$ — лінійна,

$$g(x^*) \leqslant \omega_2(x^*, g, [0,1]) = \omega_2(x^*, f, [0,1]) \leqslant \omega_2(1/2, f, [0,1]).$$

**Лема 13.1.** *Нехай $f \in C[0,1]$, $F$ — первісна $f$, $x_j = jh$, $j = 0, \ldots, k$, $h = k^{-1}$. Тоді*

$$|F(x) - L(x, F, x_0, \ldots, x_k)| \leqslant c(k)\omega_k(1/k, f, [0,1]).$$

*Доведення.* Візьмемо $p(x) := (x-x_0)\dots(x-x_k)$, $x\in\mathbb{R}$. Тоді

$$\begin{aligned}
F(x)-L(x,F,x_0,\dots,x_k) &= F(x)-L(x,F,x_0,\dots,x_k)-F(x)(1-L(x,1,x_0,\dots,x_k))\\
&= p(x)\sum_{j=0}^{k}\frac{F(x)-F(x_j)}{(x-x_j)p'(x_j)}\\
&= p(x)\sum_{j=0}^{k}\int_0^1 f(x+(x_j-x)t)dt\cdot\frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!h^k}\\
&= \frac{p(x)}{k!h^k}\int_0^1\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(x(1-t)+x_jt)dt\\
&= \frac{p(x)}{k!h^k}\int_0^1\Delta_{ht}^k(f,x(1-t))dt,
\end{aligned}$$

звідки, при $c(k) := \dfrac{k^k}{k!}\,\|p\|_{C[0,1]}$,

$$|F(x)-L(x,F,x_0,\dots,x_k)| \leqslant c(k)\int_0^1\omega_k(t/k,f,[0,1])dt \leqslant c(k)\omega_k(1/k,f,[0,1]).$$

□

*Доведення теореми 13.1.* Нехай $F$, $L$ — такі, як в попередній лемі. Покладемо

$$G(x) := F(x)-L(x),\quad g(x) := G'(x),\quad x\in[0,1],$$
$$\omega_k(t,g,[0,1]) \equiv \omega_k(t,f,[0,1]) =: \omega(t),\quad t\in[0,1].$$

Маємо, що

$$\|G\|_{[0,1]} \leqslant c(k)\omega_k(1/k,f,[0,1]) =: c(k)\omega \tag{13.1}$$

Слід довести, що $E_{k-1}(f)\leqslant W(k)\omega$. Оскільки $E_{k-1}(f)\leqslant\|G'\|_{[0,1]}$, досить перевірити, що $\|G'\|_{[0,1]}\leqslant W(k)\omega$. Покажемо, що це випливає з (13.1).

Зафіксуємо $x\in[0,1]$, для визначеності вважаємо, що $x\in[0,1/2]$. Візьмемо $\delta := \dfrac{1}{2k}$, $x+\delta k\in[0,1]$, та

$$\int_0^1\Delta_{\delta t}^k(g,x)dt =: I.$$

Оскільки $0 \leqslant \delta t \leqslant 1/k$, то $|I| \leqslant \omega$. Маємо

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \int_0^1 g(x + j\delta t) dt \\ &= (-1)^k g(x) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{1}{j\delta} (G(x + j\delta) - G(x)) \\ &=: (-1)^k g(x) + A, \end{aligned}$$

причому

$$|A| \leqslant 2\omega \cdot c(k) \cdot 2k \cdot 2^k = c_*(k)\omega.$$

Отже, $E_{k-1}(f) \leqslant W(k)\omega$, де $W(k) = c_*(k) + 1$. □

**Наслідок 13.1.** *Нехай* $f \in C[a,b]$, $[x_0, x_0 + (k-1)h] \subset [a,b]$. *Тоді для функції*

$$g(x) := f(x) - L(x, f, x_0, \dots, x_0 + (k-1)h)$$

*має місце нерівність:*

$$|g(x)| \leqslant c(k)\omega_k(h, f, [a,b]) \left(1 + \frac{|x - x_0|}{h}\right)^{2k}.$$

*Зауваження* 13.3. Можна показати, що в останній нерівності $2k$ можна замінити на $k$.

*Доведення наслідку 13.1.* Покладемо $\omega := \omega_k(h, f, [a,b])$, і розглянемо два випадки в залежності від розташування точки $x$.

Нехай $x \in [x_0, x_0 + (k-1)h]$. Позначимо $p^*$ — многочлен найкращого наближення $f$ степеня $\leqslant k-1$ на проміжку $[x_0, x_0 + (k-1)h]$. З нерівності Уітні

$$\|f - p^*\|_{C[x_0, x_0+(k-1)h]} \leqslant c\omega,$$

тому

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |(f(x) - p^*(x)) - L(x, f - p^*, x_0, \dots, x_0 + (k-1)h)| \\ &\leqslant c\omega + c\omega \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{i=0, i\neq j}^{k-1} \frac{|x - x_i|}{|x_j - x_i|} \leqslant c\omega \left(1 + k \frac{((k-1)h)^{k-1}}{h^{k-1}}\right) \\ &=: c^*\omega, \end{aligned}$$

звідки випливає шукана нерівність, бо $(1 + |x - x_0|/h)^{2k} \geqslant 1$.

Нехай $x \in [a,b] \setminus [x_0, x_0+(k-1)h]$, наприклад $x > x_0+(k-1)h$. Розглянемо проміжок $[x_0, x]$, візьмемо $\delta$ таке, щоб $x_0 + \delta(k-1) = x$. Розглянемо $L^* := L(\cdot, f, x_0+\delta, x_0+2\delta, \dots, x)$ — многочлен степеня $k-1$,

$$|g(x)| = |(f(x) - L(x, f, x_0, \dots, x)) - L(x, f - L^*, x_0, \dots, x_0 + (k-1)h)|.$$

Міркуючи як вище, маємо:

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leqslant \omega_k(|x-x_0|) + \omega_k(|x-x_0|)\frac{|x-x_0|^{k-1}}{h^{k-1}}k \\ &\leqslant \tilde{c}(k)\omega_k(|x-x_0|)\left(1 + \frac{|x-x_0|^{k-1}}{h^{k-1}}\right) \leqslant \tilde{c}(k)\frac{|x-x_0|^k}{h^k}\cdot\omega\cdot\left(1+\frac{|x-x_0|^{k-1}}{h^{k-1}}\right) \\ &\leqslant c(k)\omega_k(h, f, [a,b])\left(1+\frac{|x-x_0|}{h}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

□

*Зауваження* 13.4. При доведенні прямої теореми за допомогою метода розбиття одиниці для першого модуля неперернвості ми користувалися нерівністю:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant c\omega_1(h)\left(1 + \frac{|x-x_0|}{h}\right),$$

де $f(x_0) = L(x, f, x_0)$. Якщо цю нерівність замінити на нерівність з наслідку 13.1, то, повторюючи ті є міркування, можна довести пряму теорему з оцінкою через $\omega_k$.

**Теорема 13.2.** *Якщо $f \in C[-1,1]$, то*

$$E_n(f) \leqslant c(k)\omega_k(1/n, f, [-1,1]), \quad n \geqslant k-1.$$

**Теорема 13.3** (посилення теореми 13.2, Тіман ($k=1$), Дзядик ($k=2$), Брудний ($k>2$))**.** *Якщо $f \in C[-1,1]$, то для довільного $n \geqslant k-1$ існує алгебраїчний многочлен $p_n$ степеня $\leqslant n$ такий, що*

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant c(k)\omega_k\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}, f, [-1,1]\right).$$

**Вправа 35.** *Довести теореми 13.2 та 13.3.*

*Зауваження* 13.5. Теорема 13.3 встановлює “правильну” поточкову оцінку наближення многочленами, яка є ліпшою ближче до кінців відрізку; доведено відповідні обернені теореми. Для “правильної” рівномірної оцінки використовуються модулі гладкості Діціана-Тотіка, що по-різному вимірюють гладкість функції всередині та біля кінців відрізку; для рівномірної оцінки функції дозволяється бути менш гладкою біля кінців відрізку.

**Означення 13.1.** Для $r \in \mathbb{N}$ означимо $W^r$ — простір неперервних на $[-1,1]$ функцій $f$ таких, що мають $(r-1)$-шу абсолютно неперервну похідну на $[-1,1]$ і $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[-1,1]} < +\infty$.

**Лема 13.2.** *Якщо $f \in W^r$, то*

$$\omega_r(t, f, [-1,1]) \leqslant t^r \left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[-1,1]}, \quad t \geqslant 0.$$

**Лема 13.3.** *Якщо для деякої $f \in C[-1,1]$, і всіх $t \geqslant 0$ виконуеться нерівність*

$$\omega_r(t, f, [-1,1]) \leqslant t^r,$$

*то $f \in W^r$, і $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[-1,1]} \leqslant 1$.*

**Вправа 36.** *Довести леми 13.2, 13.3.*

Переформулюємо теорему 13.2 для $W^r$.

**Теорема 13.4.** *Якщо $f \in W^r$, то*

$$E_n(f) \leqslant c(r) \frac{\left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[-1,1]}}{n^r}, \quad n \geqslant r-1.$$

*Зауваження* 13.6. Оскільки $C^{(r)}[-1,1] \subset W^r$, то остання теорема виконується, якщо $W^r$ замінити на $C^{(r)}[-1,1]$, а норму $\left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[-1,1]}$ на $\left\|f^{(r)}\right\|_{C[-1,1]}$.

## 14. Тригонометричні поліноміальні ядра.

Найбільш відомими тригонометричними поліноміальними ядрами є ядра Діріхле, Фейєра, Джексона, Валле-Пусена, Бернштейна, Рогозинського, Пуасона і спряжене до Пуасона і т.д. (всі вони схожі на $\delta$-функцію).

### 14.1. **Ядро Діріхле.**

**Означення 14.1.** Ядром Діріхле називають тригонометричний поліном

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \cos(t) + \cdots + \cos(nt) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Вправа 37.** *Перевірити останню рівність.*

**Вправа 38.** *Довести, що для періодичної $f \in L_1[0, 2\pi]$ часткова сума ряду Фур'є $S_n(\cdot, f)$ виражається як*

$$S_n(t, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_n(x)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

14.2. **Ядра Фейєра.**

**Означення 14.2.** Ядро Фейєра — це середнє арифметичне перших ядер Діріхле

$$\begin{aligned} F_n(t) &:= \frac{D_0(t) + \cdots + D_{n-1}(t)}{n} \\ &= \frac{1}{2} + (1 - 1/n)\cos(t) + (1 - 2/n)\cos(2t) + \cdots + 1/n\cos((n-1)t) \\ &= \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2n \sin^2 \frac{t}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Вправа 39.** *Перевірити ці рівності.*

Фейер довів, що для $2\pi$-періодичної $f \in C[0, 2\pi]$ та

$$\sigma_n(t, f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - x) F_n(x)\, dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

завжди

$$\|f - \sigma_n(\cdot, f)\|_{C[0,2\pi]} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Нехай $0 < \alpha < 1$, $\omega_1(t, f, [0, 2\pi]) \leqslant t^\alpha$, $t \geqslant 0$. Тоді можна довести, що

$$\|f - \sigma_n(\cdot, f)\|_{C[0,2\pi]} \leqslant c(\alpha) \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geqslant 1.$$

Для $\alpha = 1$ це не виконується.

14.3. **Ядра Джексона.**

**Означення 14.3.** Ядро Джексона — тригонометричний поліном $J_n(t) := \dfrac{1}{\gamma_n} F_n^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, де $F_n$ — ядро Фейєра, і $\gamma_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n^2(t)\, dt$.

Джексон довів, що для

$$\mu_n(t, f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t - x) f(x)\, dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

якщо $\omega_1(t, f) \leqslant t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, то

$$\|f - \mu_n(\cdot, f)\|_{C[0,2\pi]} \leqslant c \frac{1}{n^\alpha}.$$

Якщо ж $\omega_2(t, f) \leqslant t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 2$, $t \geqslant 0$, то істинна така ж оцінка (довів Зігмунд).

Джексон також довів, що для $f \in C^{(r)}[0, 2\pi]$

$$\|f - \mu_n(\cdot, f)\|_{C^{(r)}[0,2\pi]} \leqslant c(r) \frac{\omega_1(1/n, f^{(r)})}{n^r}, \quad n \geqslant r - 1.$$

14.4. **Ядра Стєчкіна.** Стєчкін ввів узагальнені ядра Джексона.

**Означення 14.4.** Нехай $m \in \mathbb{N}$. Узагальнене ядро Джексона:

$$J_{n,m}(t) := \frac{1}{\gamma_{n,m}} F_n^{2m}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

де

$$\gamma_{n,m} := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n^{2m}(t)\, dt.$$

Розглянемо деякі властивості цих ядер.

**Властивість 1.** *$J_{n,m}$ — тригонометричний поліном порядку $2m(n-1)$.*

**Властивість 2.** *У $J_{n,m}$ пік гострий, спадання швидше, ніж для ядра Фейєра.*

**Властивість 3.**

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(t)\, dt = 1$$

**Властивість 4.** *Виконуються оцінки*

$$c_1(m) n^{2m-1} < \gamma_{n,m} < c_2(m) n^{2m-1}.$$

*Доведення.* Маємо

$$\gamma_{n,m} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F_n^{2m}(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/n} F_n^{2m}(t)\, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} F_n^{2m}(t)\, dt.$$

Враховуючи, що $\sin u \geqslant \frac{2}{\pi} u$, $u \in [0, \pi/2]$, та те, що $\frac{\sin nx}{\sin x}$ спадає при $x \in [0, \pi/2)$, отримуємо

$$\begin{aligned}
\gamma_{n,m} &> \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n)^{2m}} \int_0^{\pi/n} \left( \frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{4m} dt \\
&> \frac{c(m)}{n^{2m}} \int_0^{\pi/n} \left( \frac{\frac{nt}{\pi}}{t/2} \right)^{4m} dt = c^*(m) n^{2m-1},
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\gamma_{n,m} &\leqslant \frac{c(m)}{n^{2m}} n^{4m-1} + \frac{\tilde{c}(m)}{n^{2m}} \int_{\pi/n}^{\pi} \left( \frac{1}{\sin t/2} \right)^{4m} dt \\
&\leqslant c(m) n^{2m-1} + \frac{\tilde{c}(m)}{n^{2m}} \int_{\pi/n}^{\infty} \left( \frac{\pi}{n} \right)^{4m} dt = c_*(m) n^{2m-1}.
\end{aligned}$$

$\square$

**Властивість 5.** *Для кожного* $i = 0, \dots, 4m-2$

$$\int_{\pi/n}^{\pi} t^i J_{n,m}(t)\,dt \leqslant c(m)\frac{1}{n^i}.$$

**Вправа 40.** *Довести останню властивість, користуючись попередньою і так само, як попередню.*

## 15. Теорема Стєчкіна (Джексона – Зігмунда – Ахієзера – Стєчкіна)

**Теорема 15.1** (Стєчкіна)**.** *Нехай* $k \in \mathbb{N}$*. Якщо* $f$ *— $2\pi$-періодична, неперервна функція, то*

$$\widetilde{E}_n(f) \leqslant c(k)\omega_k(1/n, f), \quad n \geqslant 1.$$

*Зауваження* 15.1. При $k = 1$ це теорема Джексона, при $k = 2$, $\omega_2(t, f) \leqslant t$, $t \geqslant 0$, це теорема Зігмунда, при $k = 2$ це теорема Ахієзера, при $k > 2$ це теорема Стєчкіна.

Для $f \in C^{(r)}[0, 2\pi]$ маємо

$$\omega_{r+1}(t, f) \leqslant c(r)t^r\omega_1(t, f^{(r)}), \quad t \geqslant 0.$$

Тому, як наслідок теореми Стєчкіна маємо

**Теорема 15.2** (друга нерівність Джексона)**.** *Якщо* $f \in C^{(r)}[0, 2\pi]$*, то*

$$\widetilde{E}_n(f) \leqslant c(r)\frac{1}{n^r}\omega_1(1/n, f^{(r)}), \quad n \geqslant 1.$$

**Наслідок 15.1.** *Якщо* $f \in W^r$*, то* $\omega_r(t, f) \leqslant t^r \left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[0,2\pi]}$*, тому*

$$\widetilde{E}_n(f) \leqslant \frac{c(r)}{n^r}\left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty[0,2\pi]}, \quad n \geqslant 1.$$

**Лема 15.1.** *При* $m = k$ *існує тригонометричний поліном* $T_n$ *порядку* $2m(n-1)$ *такий, що*

$$\|f - T_n\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c(k)\omega_k(\pi/n, f), \quad n \geqslant 1.$$

*Доведення.* Візьмемо

$$(-1)^k S(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_{-t}^k(f, x)J_{n,m}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доведемо, що $S = f - T_n$, і $\|S\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c(k)\omega_k(\pi/n, f)$. Маємо

$$\begin{aligned}
|S(x)| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega_k(|t|, f) J_{n,m}(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \omega_k(|t|, f) J_{n,m}(t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi/n} \omega_k(|t|, f) J_{n,m}(t)dt\,dt + \int_{\pi/n}^{\pi} \omega_k(|t|, f) J_{n,m}(t)dt\,dt\right) \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\omega_k(\pi/n, f)\int_{0}^{\pi} J_{n,m}(t)dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\left(\frac{|t|}{\pi/n} + 1\right)^k \omega_k(\pi/n, f) J_{n,m}(t)\,dt \\
&\leqslant \omega_k(\pi/n, f) + n^k\frac{2^{k+1}}{\pi^{k+1}}\omega_k(\pi/n, f)\int_{\pi/n}^{\pi} t^k J_{n,m}(t)\,dt \\
&\leqslant \omega_k(\pi/n, f)(1 + (2/\pi)^{k+1}c),
\end{aligned}$$

де $c = c(m)$ — стала з властивості 5 $J_{n,m}$.

Маємо

$$(-1)^k\Delta_{-t}^k(f, x) = f(x) - \binom{k}{1}f(x-t) + \cdots + (-1)^k f(x-kt),$$

візьмемо $(-1)^k S(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Залишається показати, що $g$ — тригонометричний поліном відповідного порядку, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-jt) J_{n,m}(t)\,dt, \quad j \neq 0,$$

є тригонометричним поліномом порядку $2m(n-1)$. Оскільки $J_{n,m}$ — парний тригонометричний поліном і є сумою косинусів, то досить показати, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-jt)\cos(lt)dt$$

— тригонометричний поліном потрібного степеня. □

**Вправа 41.** *Нехай $f$ — $2\pi$-періодична, неперервна функція, $j, l \in \mathbb{N}$. Довести, що*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-jt)\cos(lt)dt$$

*— тригонометричний поліном потрібного степеня $\leqslant l$.*

**Вправа 42.** *Довести, що з леми 15.1 випливає теорема Стечкіна.*

*Зауваження* 15.2. При $k = 1$ в нерівності Джексона

$$\widetilde{E}_n(f) \leqslant c\omega_1(\pi/n, f), \quad n \geqslant 1,$$

Корнєйчук довів, що $c = 1$.

## 16. Нерівність Бернштейна.

**Теорема 16.1** (нерівність Бернштейна)**.** *Якщо тригонометричний поліном $T_n$ порядку $\leqslant n$, то*

$$\|T_n'\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant n\,\|T_n\|_{C(\mathbb{R})}\,.$$

*Зауваження* 16.1. Нерівність Бернштейна для $\cos nx$, $\sin nx$ очевидна.

*Доведення теореми 16.1.* Припустимо, від супротивного, що існує $T_n$ і $\varepsilon > 0$ такі, що

$$\|T_n'\|_{C(\mathbb{R})} > (n+\varepsilon)\,\|T_n\|_{C(\mathbb{R})}\,,$$

тобто для $t_n := \frac{T_n}{\|T_n\|_{C(\mathbb{R})}}(1-\varepsilon)$ маємо $\|t_n\| = 1-\varepsilon$, і $\|t_n'\| > (n+\varepsilon)(1-\varepsilon) > n$. Нехай $\alpha_0$ така точка, що $|t_n'(\alpha_0)| = \|t_n'\|_{C(\mathbb{R})}$, будемо вважати, що $t_n'(\alpha_0) > 0$. Замість $t_n$ розглянемо зсунутий поліном $\tau_n(\alpha) = t_n(\alpha - \beta_0)$, при цьому норма полінома і норма його похідної не змінюється. Підберемо $\beta_0$ так, щоб точка $\alpha_0^*$ в якій похідна $\tau_n'$ набуває найбільшого значення була такою, що $\tau_n(\alpha_0^*) = \cos(n\alpha_0^*)$ (скажімо ще й так, що $(\cos(n\alpha_0^*))' > 0$). Отже, $\tau_n'(\alpha_0^*) > n$, $\cos(n\alpha_0^*)' \leqslant n$. Нехай $\alpha > \alpha_0$. Тоді, враховуючи формулу Лагранжа, маємо $(\tau_n(\alpha) - \cos(n\alpha)) - (\tau_n(\alpha_0^*) - \cos(n\alpha_0^*)) = (\alpha - \alpha_0)(\tau_n'(\theta) - \cos(n\theta)) > 0$, $\alpha_0^* < \theta < \alpha$. Тому справа від $\alpha_0^*$ функція $\tau_n$ вища за $\cos(n\cdot)$, а зліва нижче. Оскільки $\|\tau_n\|_{C(\mathbb{R})} < 1$, то графік $\tau_n$ перетне кожну арку функції $\cos(n\cdot)$, причому одну з цих арок тричі. У $\cos(n\cdot)$ всього $2n$ арок, тому $\tau_n(\cdot) - \cos(n\cdot)$ на $[-\pi, \pi]$ матиме $2n+2$ нулів, тобто тригонометричний поліном порядку $n$ матиме $2n+2$ нулів, що можливо лише тоді, коли $\tau_n(x) - \cos(nx) \equiv 0$, що неможливо, бо $\|\tau_n\|_{C(\mathbb{R})} \neq \|\cos(n\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = 1$. □

*Зауваження* 16.2. Має місце аналог цієї нерівності і в $L_p$, $1 \leqslant p < \infty$. Якщо тригонометричний поліном $T_n$ порядку $\leqslant n$, то

$$\|T_n'\|_{L_p[0,2\pi]} \leqslant n\,\|T_n\|_{L_p[0,2\pi]}\,.$$

## 17. Обернена теорема Бернштейна-Валле-Пуссена.

*Зауваження* 17.1. Нагадаємо нерівність Джексона-Стєчкіна:

$$\widetilde{E}_n(f) \leqslant c\omega_k(1/n, f), \quad n \geqslant 1,$$

де $f$ — $2\pi$-періодична неперервна функція. Протилежна нерівність невірна, але для найважливіших порядків модуля неперервності вона є вірною.

**Теорема 17.1** (обернена теорема Бернштейна-Валле-Пуссена)**.** *Нехай* $0 < \alpha < k$, $f$ *—* $2\pi$*-періодична неперервна функція, для якої*

$$\widetilde{E}_n(f) \leqslant \frac{c}{n^\alpha}, \quad n \geqslant 1.$$

*Тоді*

$$\omega_k(t, f) \leqslant c(k, \alpha) t^\alpha, \quad t \geqslant 0.$$

**Вправа 43.** *Довести цю теорему.*

*Доведення теореми 17.1 для* $k = 1$. Розвинемо функцію $f$ в телескопічну суму Бернштейна, тобто

$$f = T_0 + (T_1 - T_0) + \sum_{j=1}^{\infty} (T_{2^j} - T_{2^{j-1}}),$$

де $T_k$ — поліном найкращого наближення функції $f$ порядку $k$. Частинна сума $S_l = T_0 + (T_1 - T_0) + \sum_{j=1}^{l} (T_{2^j} - T_{2^{j-1}}) = T_{2^l}$, звідки

$$\|f - S_l\|_{C(\mathbb{R})} = \|f - T_{2^l}\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{2^{\alpha l}} \to 0, \quad l \to \infty.$$

Тому телескопічний ряд Бернштейна справді рівномірно збігається до $f$.

Нехай $h > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Треба довести, що $|f(x+h) - f(x)| \leqslant c(k, \alpha) h^\alpha$. Виберемо $j_0$ так, щоб $\frac{1}{2^{j_0+1}} \leqslant h < \frac{1}{2^{j_0}}$ і розіб'ємо суму на дві: $\sum_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{j_0} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty}$. Оцінимо другу суму.

$$\begin{aligned} \|T_{2^j} - T_{2^{j-1}}\| &\leqslant \|T_{2^j} - f\| + \|T_{2^{j-1}} - f\| = \widetilde{E}_{2^j}(f) + \widetilde{E}_{2^{j-1}}(f) \\ &\leqslant 2\widetilde{E}_{2^{j-1}}(f) \leqslant \frac{2}{2^{\alpha(j-1)}}, \end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=j_0+1}^{\infty} T_{2^j} - T_{2^{j-1}} \right\| \leqslant \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \|T_{2^j} - T_{2^{j-1}}\| &\leqslant 2 \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha j - 1}} \\ &= \frac{2}{2^{\alpha j_0}} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-\alpha}} = \frac{c(\alpha)}{2^{(j_0+1)\alpha}} \\ &\leqslant c(\alpha) h^\alpha. \end{aligned}$$

Тому, з використанням формули Лагранжа та нерівності Бернштейна, отримуємо

$$\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)| &\leqslant |(T_1(x+h)-T_0(x+h))-(T_1(x)-T_0(x))| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{j_0} |(T_{2^j}(x+h)-T_{2^{j-1}}(x+h))-(T_{2^j}(x)-T_{2^{j-1}}(x))| + 2ch^\alpha \\
&\leqslant h\sum_{j=0}^{j_0} \|T'_{2^j}-T'_{2^{j-1}}\| + 2ch^\alpha \leqslant h\sum_{j=0}^{j_0} 2^j \|T_{2^j}-T_{2^{j-1}}\| + 2ch^\alpha \\
&\leqslant h\sum_{j=0}^{j_0} 2^j \frac{2}{2^{\alpha(j-1)}} + 2ch^\alpha = ch\sum_{j=0}^{j_0} 2^{(1-\alpha)j} + 2ch^\alpha \\
&= ch\frac{2^{(1-\alpha)(j_0+1)}-1}{2^{1-\alpha}-1} + 2ch^\alpha \leqslant ch2^{(1-\alpha)(j_0+1)} + 2ch^\alpha \\
&= ch\frac{1}{h^{1-\alpha}} + 2ch^\alpha = ch^\alpha.
\end{aligned}$$

□

## 18. Нерівність Бернштейна для алгебраїчних многочленів. Нерівність Маркова.

**Теорема 18.1** (нерівність Бернштейна для алгебраїчних многочленів)**.** *Для кожного алгебраїчного многочлена $P_n$ степеня $\leqslant n$ виконується нерівність*

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|P_n\|_{C[-1,1]}, \quad x\in(-1,1).$$

**Вправа 44.** *Довести, що ця нерівність випливає з нерівності Бернштейна за допомогою заміни $x=\cos t$.*

**Теорема 18.2** (нерівність Маркова)**.** *Для кожного алгебраїчного многочлена $P_n$ степеня $\leqslant n$ виконується нерівність*

$$\|P_n'\|_{C[-1,1]} \leqslant n^2 \|P_n\|_{C[-1,1]}.$$

*Доведення.* Якщо $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant n$, то необхдіна нерівність випливає з нерівості Бернштейна для алгебраїчних поліномів. Тому вважаємо, що $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} > n$.

Розглянемо графік многочлена Чебишова степеня $n$ на $[-1,1]$. Легко перевірити, що $x$ міститься або справа від найправішого екстремума многочлена Чебишова, або зліва від найлівішого. Припустимо, що справа, і нехай існує многочлен $P_n$ степеня

$\leqslant n$ такий, що $\|P_n\|_{C[-1,1]} < 1$ і $P_n'(x) > n^2$. Для розглянутого многочлена Чебишова $T_n$ маємо $\|T_n'\|_{C[-1,1]} \leqslant n^2$.

Якщо $P_n'(x) > 0$, то порівняємо графік $P_n$ з графіком $T_n$, інакше — з графіком $-T_n$.

Якщо $P_n(x) \geqslant T_n(x)$, то зсунемо вліво графік $T_n$ так, щоб він пройшов через точку $(x, P_n(x))$. Нехай $\widetilde{T}_n$ — зсунутий графік. Многочлен $T_n$ має $n$ арок на $[-1,1]$, тому многочлен $P_n$ на $[-1,1]$ перетне $n-1$ арку многочлена $\widetilde{T}_n$. Врахуємо, що $|P_n'(x)| > n^2$ зобов'язує $P_n$ перетнути найправішу арку $\widetilde{T}_n$ щонайменше 3 рази, отже $P_n$ і $\widetilde{T}_n$ мають $n+1$ точку перетину, що неможливо.

Якщо $P_n(x) < T_n(x)$, то, зсуваючи $T_n$ вправо до перетину в $(x, P_n(x))$, і повторюючи міркування теж прийдемо до протиріччя. □

## 19. Нерівність Дзядика.

Нерівність Бернштейна для тригонометричних поліномів дала можливість довести обернені теореми наближення функцій тригонометричними поліномами. Відносно наближення алгебраїчними многочленами на відрізку природньо було чекати, що успіх при доведенні обернених теорем забезпечить нерівність Бернштейна-Маркова:

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{c}{\rho_n(x)} \|P_n\|_{C[-1,1]}, \quad x \in [-1,1],$$

де $\rho_n(x) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}$. Але її не досить. Досить більш загальної нерівності Дзядика.

Сформулюємо нерівність Дзядика. Нехай $s \in \mathbb{R}$, $P_n$ — многочлен степеня $\leqslant n$. Якщо

$$|P_n(x)| \leqslant \rho_n^s(x), \quad x \in [-1,1],$$

то

$$|P_n'(x)| \leqslant c(s)\rho_n^{s-1}(x), \quad x \in [-1,1].$$

*Зауваження* 19.1. Нерівність Бернштейна-Маркова є частинним випадком нерівності Дзядика для $s = 0$.

Перепишемо нерівність Дзядика у вигляді:

$$\left\|\frac{P_n'}{\rho_n^{s-1}}\right\|_{C[-1,1]} \leqslant c(s) \left\|\frac{P_n}{\rho_n^s}\right\|_{C[-1,1]}.$$

Є кілька доведень цієї нерівності, всі досить складні, зокрема за допомогою аналітичних функцій, конформних відображень, що дозволяє поширити цю нерівність на довільний компакт в комплексній площині.

Якщо $[-1,1]$ замінити на $\partial M$ — межу компакту $M \subset \mathbb{C}$ із зв'язним доповненням, то нерівність Дзядика теж має місце, але $c(s)$ слід замінити на $c(s, \partial M)$, а $\rho_n(z)$ — відстань від $z \in \partial M$ до лінії рівня множини $M$. Уточнимо, що таке лінія рівня. За теоремою Рімана існує конформне відображення $\Phi$, що відображає завнішність $M$ на зовнішність одиничного круга. Нехай $\Psi$ — обернене відображення. Розглянемо образ кола з радіусом $1+\frac{1}{n}$ при відображенні $\Psi$, який позначимо $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$. Цей образ є кривою, яку називають лінією рівня множини $M$.

Якщо повернутись до відрізка: коло за допомогою функції Жуковського $\frac{1}{2}(w+1/w)$ перетворюється в деякий еліпс. Відстань від точки $x$ на відрізку до еліпса буде $\rho_n(x)$ з точністю до сталої.

Доведемо нерівність Дзядика як наслідок нерівності Бернштейна-Маркова.

**Лема 19.1.** *Нехай $y \in [-1,1]$, $m \in \mathbb{N}$, $P_n$ — многочлен степеня $\leqslant n$. Якщо*

$$|P_n(x)| \leqslant (|x-y| + \rho_n(y))^m, \quad x \in [-1,1],$$

*то*

$$|P_n'(y)| \leqslant c(m)\rho_n^{m-1}(y).$$

*Доведення.* Як завжди, $x_j := \cos(j\pi/n)$, $j = 0, \dots, n$, $I_j := [x_j, x_{j-1}]$, $|I_j| := x_j - x_{j-1}$, $\tilde{x}_j := \cos((j-1/2)\pi/n)$ — нуль многочлена Чебишова, що лежить в $I_j$. Розглянемо многочлен степеня $(n-1)$:

$$t_j(x) := \begin{cases} \frac{T_n(x)}{x-\tilde{x}_j}|I_j|, & x \neq \tilde{x}_j; \\ T_n'(\tilde{x}_j)|I_j|, & x = \tilde{x}_j. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\frac{4}{3} < t_j(x) < 4, \quad x \in I_j. \tag{19.1}$$

Розглянемо новий многочлен:

$$q_n(x) := \frac{y-\tilde{x}_\nu}{T_n(y)} \cdot \frac{T_n(x)}{x-\tilde{x}_\nu},$$

де $\nu$ — номер відрізка: $y \in I_\nu$ ($y$ — фіксоване, $T_n(y) \neq 0$).

З (19.1) маємо:

$$|q_n(x)| \leqslant \frac{23\rho_n(y)}{|x-y|+\rho_n(y)}.$$

Лема буде вірна, якщо ми доведемо, що

$$|P_n(x)| \leqslant (|x-y|+\rho_n(y))^m \cdot \frac{1}{\rho_n^m(y)}, \quad x \in [-1,1].$$

Розглянемо многочлен $Q_n := P_n q_n^m$. Візьмемо похідну в точці $y$:

$$P_n'(y) = P_n'(y) \cdot q_n^m(y) = Q_n'(y) - P_n(y)(q_n^m(y))'.$$

Оскільки $\|Q\|_{C[-1,1]} \leqslant 23^m$, то за нерівністю Бернштейна-Маркова

$$|Q_n'(y)| \leqslant \frac{c}{\rho_n(y)}.$$

Оскільки $|P_n(y)| \leqslant 1$, $\|q_n^m\|_{C[-1,1]} \leqslant 23^m$, то за нерівністю Бернштейна-Маркова

$$|(q_n^m(y))'| \leqslant \frac{c}{\rho_n(y)}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} |P_n'(y)| &\leqslant |Q_n'(y)| + |P_n(y)| \cdot |(q_n^m(y))'| \\ &\leqslant \frac{c(m)}{\rho_n(y)} + 1 \cdot \frac{c(m)}{\rho_n(y)} = \frac{c(m)}{\rho_n(y)}. \end{aligned}$$

□

**Вправа 45.** *Довести, що з леми 19.1 випливає нерівність Дзядика для $s > 0$.*

## 20. Наближення раціональними функціями. Теорема Ньюмана.

Розглянемо на $[-1,1]$ $f(x) = |x|$. З прямої теореми маємо, що $E_n(f) \leqslant c/n$, $n \in \mathbb{N}$, $c$ — абсолютна стала. Бернштейн довів, що $nE_n(f) \to c^*$, $n \to \infty$, $c^* \approx 0.2801694990\ldots$. Зокрема, $E_n(f) \geqslant c_1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Тобто $|x|$ можна наблизити з точністю $1/n$ і не краще. Доведемо таку оцінку.

*Твердження* 20.1. $E_n(|x|)_{C[-1,1]} \geqslant \dfrac{1}{16n}$, $n \in \mathbb{N}$.

*Доведення.* Нехай існує многочлен $p_n$ степеня $\leqslant n$ такий, що

$$||x| - |p_n(x)|| < \frac{1}{16n}, \quad x \in [-1,1].$$

Тоді $p_n^*(x) := \frac{1}{2}(p_n(x) + p_n(-x))$, $x \in [-1,1]$, — парний, і

$$||x| - p_n^*(x)| = \frac{1}{2}|(|x| - p_n(x)) + (|-x| - p_n(-x))| < \frac{1}{16n}, \quad x \in [-1,1].$$

Покладемо $\hat{p}_n(x) := p_n^*(x) - p_n^*(0)$, $x \in [-1, 1]$. Тоді

$$(20.1) \qquad ||x| - \hat{p}_n(x)| < \frac{1}{8n}, \quad x \in [-1, 1].$$

Оскільки $\hat{p}_n(0) = 0$ і $\hat{p}_n$ — парний, то

$$\tilde{p}_{n-1}(x) := \begin{cases} \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{x} \hat{p}_n(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

— непарний алгебраїчний многочлен степеня $\leqslant n - 1$.

Для всіх $x \in [-1, 1]$, $x \neq 0$, оцінка (20.1) дає

$$|\tilde{p}_{n-1}(x)| = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{|x|} |(\hat{p}_n(x) - |x|) + |x|| < \frac{1}{9nx} + \frac{8}{9},$$

зокрема

$$|\tilde{p}_{n-1}(x)| < \frac{1}{9n \sin(\frac{\pi}{2n})} + \frac{8}{9} < 1,$$

при $\sin(\frac{\pi}{2n}) \leqslant x \leqslant 1$, використавши оцінки

$$\frac{\pi}{2} x \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \leqslant x, \quad x \in [0, \pi/2].$$

Тепер порівняємо з многочленом Чебишова $T_m$, де $m$ — непарне. Покладемо $m = n$, якщо $n$ — непарне, і $m = n + 1$, якщо $n$ — парне. Для визначеності розглянемо випадок, коли $m = n$, тобто $n$ — непарне. Позначимо $x_j = \cos(j\pi/n)$ — точки альтернансу $T_n$, і помітимо, що

$$x_- := x_{(n+1)/2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right), \quad x_+ := x_{(n-1)/2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Зазначимо, що

$$|\tilde{p}_{n-1}(x)| < 1, \quad x \in [-1, 1] \setminus [x_-, x_+].$$

Тому, зважаючи на непарність многочленів,

$$|\tilde{p}_{n-1}(x)| \leqslant |T_n(x)|, \quad x \in [x_-, x_+].$$

Візьмемо $x_0 := \sin\left(\frac{\pi}{6n}\right)$, $|T_n(x_0)| = \frac{1}{2}$. Маємо

$$|\hat{p}_n(x_0)| = \frac{9}{8} x_0 |\tilde{p}_n(x_0)| \leqslant \frac{9}{8} x_0 |T_n(x_0)| = \frac{9}{16} x_0,$$

тому

$$\begin{aligned} ||x_0| - \hat{p}_n(x_0)| \geqslant |x_0| - |\hat{p}_n(x_0)| \geqslant \frac{7}{16} x_0 = \frac{7}{16} \sin\left(\frac{\pi}{6n}\right) \\ \geqslant \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{3n} > \frac{6}{16 \cdot 3n} = \frac{1}{8n}, \end{aligned}$$

протиріччя з (20.1). $\square$

Теорія наближення раціональними функціями розпочалася з результату Ньюмана про наближення функції $|x|$, яка, як виявилось, може бути наближеня раціональними фунціями значно краще, ніж многочленами.

**Означення 20.1.** Для $f \in C[-1,1]$ позначимо

$$\rho_n(f) := \inf_{r_n} \|f - r_n\|_{C[-1,1]},$$

де інфімум береться по всім $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, де $p_n$, $q_n$ — многочлени степеня $\leqslant n$, а $q_n$ не має нулів на $[-1,1]$.

**Теорема 20.1** (Ньюман, 1964)**.** *Виконуються нерівності:*

$$e^{-\pi\sqrt{n+1}} \leqslant \rho_n(|x|) \leqslant 3e^{-\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 5.$$

Ми доведемо лише оцінку згори, слідуючи доведенню Ньюмана.

*Доведення.* Для натурального $n$ покладемо $a := e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$, і

$$N(x) := N_n(x) := \prod_{k=1}^{n-1}(x + a^k), \quad x \in \mathbb{R},$$

так званий многочлен Ньюмана.

**Лема 20.1.** *Для* $n \geqslant 5$

$$\left|\frac{N(-x)}{N(x)}\right| \leqslant e^{-\sqrt{n}}, \quad x \in [e^{-\sqrt{n}}, 1].$$

*Доведення.* Спочатку доведемо, що

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1 - a^j}{1 + a^j} \leqslant e^{-\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 5. \tag{20.2}$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(t) := (1 + t)e^{-2t} - (1 - t), \quad t \in [0, \infty).$$

Для неї $\varphi(0) = 0$ і $\varphi'(t) > 0$, $t > 0$. Тому

$$\frac{1 - t}{1 + t} \leqslant e^{-2t}, \quad t \geqslant 0.$$

Але

$$2(a - a^n) \geqslant 2(e^{-\frac{1}{\sqrt{5}}} - e^{-\sqrt{5}}) > 1, \quad n \geqslant 5.$$

Також, для $t \geqslant 0$, $1 - e^{-t} \leqslant t$, тому $(1-a)^{-1} \geqslant \sqrt{n}$. Отже,

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1-a^j}{1+a^j} \leqslant \exp\left\{-2\sum_{j=1}^{n-1} a^j\right\} = \exp\left\{-2\frac{a-a^n}{1-a}\right\} \leqslant \exp\{-\sqrt{n}\},$$

отримуємо (20.2).

Тепер для деякого $j$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $a^{j+1} \leqslant x \leqslant a^j$. Тоді

$$\begin{aligned}\left|\frac{N(-x)}{N(x)}\right| &= \prod_{k=1}^{j} \frac{a^k - x}{a^k + x} \prod_{k=j+1}^{n} \frac{x - a^k}{x + a^k} \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{j} \frac{a^k - a^n}{a^k + a^n} \prod_{k=j+1}^{n} \frac{a^j - a^k}{a^j + a^k} \\ &\leqslant \prod_{m=n-j}^{n-1} \frac{1-a^m}{1+a^m} \prod_{m=1}^{n-j-1} \frac{1-a^m}{1+a^m} \\ &= \prod_{m=1}^{n-1} \frac{1-a^m}{1+a^m} \leqslant e^{-\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

□

Шукану раціональну функцію візьмемо у вигляді

$$r_n(x) := x\,\frac{N(x) - N(-x)}{N(x) + N(-x)}, \quad x \in [-1, 1].$$

Зазначимо, що $|x|$ і $r_n$ — залежать парним чином від $x$, тому перевіримо оцінку на наближення лише при невід'ємних $x$.

Якщо $x \in [0, a^n] = [0, e^{-\sqrt{n}}]$, то $N(x) \geqslant N(-x) \geqslant 0$, тому $0 \leqslant x - r_n(x) \leqslant x \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.

Якщо $x \in (e^{-\sqrt{n}}, 1]$, то за лемою 20.1

$$\begin{aligned}|x - r_n(x)| &\leqslant 2x\left|\frac{N(-x)}{N(x) + N(-x)}\right| \leqslant 2\left[\left|\frac{N(x)}{N(-x)}\right| - 1\right]^{-1} \\ &\leqslant \frac{2}{e^{\sqrt{n}} - 1} \leqslant 3e^{-\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

□

В'ячеславов (1975) показав, що

$$c_1 e^{-\pi\sqrt{n}} \leqslant \rho_n(|x|) \leqslant c_2 e^{-\pi\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1.$$

Тобто, маємо

$$\lim_{n\to\infty} (\rho_n(|x|))^{1/\sqrt{n}} = e^{-\pi}.$$

Потім, базуючись на результатах комп'ютерних обчислень, проведених до $n = 80$, Руттан і Карпентер (1991) висловлюють гіпотезу, що

$$\lim_{n\to\infty} e^{\pi\sqrt{n}}\rho_n(|x|) = 8.$$

Це вдалось довести Шталю в 1992 році, використовуючи логарифмічні потенціали та оцінки деяких еліптичних інтегралів.

## 21. Сплайни.

Сплайни — кусково-многочленні функції. Сплайни швидше обчислюються, ніж многочлени. На практиці найчастіше застосовуються кубічні сплайни.

Нехай задано $n+1$ точка $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ на $[a, b]$ або нескінченне число точок $x_j$, $j \in \mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}$, $x_j < x_{j+1}$ і $\lim\limits_{j\to\pm\infty} x_j = \pm\infty$.

**Означення 21.1.** Сплайном порядку $r$ дефекту $m$ ($1 \leqslant m \leqslant r$) називається функція $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ (або $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) така, що $s \in C^{(r-m)}[a, b]$ ($C^{(r-m)(\mathbb{R})}$) і на кожному з проміжків $(x_j, x_{j+1})$ ця функція є алгебраїчним многочленом степеня $\leqslant r$. Точки $x_j$ називають вузлами сплайну.

*Зауваження* 21.1. Якщо в означенні взяти $m = 0$, то з умови гладкості отримуємо, що $s$ буде звичайним многочленом степеня $\leqslant r$. Тому сплайни дефекту $< 1$ не розглядаються — це многочлени. Сплайни дефекту $m = r + 1$ розглядаються — це кусково-многочленні функції, які не обов'язково неперервні.

**Означення 21.2.** При $m = 1$ відповідний сплайн називається сплайном мінімального дефекту, а при $m = r + 1$ — сплайном максимального дефекту.

*Зауваження* 21.2. В значній частині літератури під "сплайном" розуміють сплайн мінімального дефекту. Зокрема, під виразом "кубічний сплайн" розуміють кубічний сплайн мінімального дефекту (тобто 2-чі неперервно дифферинційовну функцію).

*Зауваження* 21.3. Важливу множину сплайнів складають інтерполяційні сплайни, тобто ті, що задовольняють $s(x_j) = f(x_j)$, для всіх $j$, де $f$ — деяка функція.

*Приклад* 21.1. Інтерполяційна кусково-стала та інтерполяційна кусково-лінійна функції.

Нехай $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, та $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Для побудови інтерполяційного кубічного сплайну мінімального дефекту на кожному з $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, n-1$, розглянемо кубічний многочлен $a_jx^3 + b_jx^2 + c_jx + d_j$. Всього слід визначити $4n$ невідомих коефіцієнтів. Підрахуємо кількість умов на ці коефіцієнти: $s \in C^{(2)}$ дає по 3 умови в кожному внутрішньому вузлі ($s(x_j-) = s(x_j+)$, $s'(x_j-) = s'(x_j+)$, $s''(x_j-) = s''(x_j+)$, $j = 1, \dots, n-1$), а інтерполяція дає по одній умові в кожному вузлі ($s(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, \dots, n$). Всього отримали $3(n-1)+(n+1) = 4n-2$ умов, які, зазначимо, є лінійними рівняннями на шукані коефіцієнти. Дві умови, яких не вистачає, накладаються на кінцях. Наприклад, за наявності інформації про поведінку $f$ біля кінців, $s'(a) = k_a$ і $s'(b) = k_b$, де $k_a, k_b \in \mathbb{R}$.

Для квадратичного сплайну матимемо $2(n-1) + (n+1) = 3n-1$ умов на $3n$ невідомих коефіцієнтів. Тому залишається довизначити одну умову — це зумовлює несиметричність її вибору, бо маємо два кінці відрізку. Отже, для інтерполяції у вузлах сплайни непарного степеня є більш зручними. Для сплайнів парного степеня можна влаштувати інтерполяцію не в вузлах розбиття, а в певних точках між ними, тоді кількість необхідних додаткових умов стане парною.

## 22. Ідеальний сплайн Ейлера. Нерівність Колмогорова про похідні.

**Означення 22.1.** Ідеальним сплайном Ейлера степеня $r$, $r = 0, 1, \dots$ називають $2\pi$-періодичний сплайн мінімального дефекту $\varepsilon_r$ на $\mathbb{R}$ з вузлами $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, такий, що

1) $\varepsilon_r^{(r)} = \operatorname{sign} \sin x, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_r(x) dx = 0.$

*Зауваження* 22.1. Зазначимо, що наведені співвідношення задають $\varepsilon_r$ єдиним чином. $\varepsilon_0$ та $\varepsilon_1$ — кусково-стала та кусково-лінійна функції відповідно. При $r \geqslant 2$ сплайн $\varepsilon_r(x)$ схожий на $\sin(x + \frac{r\pi}{2})$.

*Зауваження* 22.2. Надалі в цьому параграфі $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$. Ясно, що для $f \in C(\mathbb{R})$ маємо $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \|f\|_{C(\mathbb{R})}$.

Розглянемо властивості сплайнів Ейлера.

**Властивість 1.** *Розкладаючи в ряд Фур'є, отримуємо:*

$$\varepsilon_0(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \quad \varepsilon_1(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

*Далі, оскільки* $\varepsilon_1 \in \mathrm{Lip}1$, *ряд для* $\varepsilon_1$ *збіжний рівномірно і можна почленно інтегрувати. Отже, маємо*

$$\varepsilon_r(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x + \frac{k\pi}{2})}{(2k+1)^{r+1}}.$$

**Властивість 2.** *Числа* $K_r := \|\varepsilon_r\|$ *називають сталими Фавара. Зауважимо, що* $K_0 = 1$, $K_1 = \frac{\pi}{2}$, *і при парному* $r : \|\varepsilon_r\| = |\varepsilon_r(0)| = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{r+1}}$, *а при непарному* $r : \|\varepsilon_r\| = |\varepsilon_r(\frac{\pi}{2})| = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{r+1}}$.

**Властивість 3.** *Нескладно перевірити нерівності:*

$$1 = K_0 < K_2 < \cdots < \frac{4}{\pi} < \cdots < K_3 < K_1 = \frac{\pi}{2}.$$

**Властивість 4.** *Ідеальний сплайн Ейлера для непарного* $r$ *приймає по черзі найбільше та найменше по модулю значення в точках* $k\pi$, *при чому воно рівне нормі, а для парного* $r$ *— в точках* $k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Надалі частину графіка функції $\varepsilon_r$, що лежить між сусідніми екстремумами будемо називати аркою.

Нагадаємо, що через $W^r(\mathbb{R}) = W^r_\infty(\mathbb{R})$ позначається простір функцій, що мають $(r-1)$-шу похідну, яка є абсолютно неперервною на кожному відрізку, і $\left\|f^{(r)}\right\| < +\infty$.

**Теорема 22.1** (нерівність Колмогорова)**.** *Якщо* $f \in W^r(\mathbb{R})$, *то для довільного* $j = 0, \dots, r$ *має місце нерівність*

$$\left\|f^{(j)}\right\| \leqslant \frac{K_{r-j}}{K_r^{1-\frac{j}{r}}}\|f\|^{1-\frac{j}{r}}\left\|f^{(r)}\right\|^{\frac{j}{r}}. \tag{22.1}$$

*Зауваження* 22.3. Ця нерівність є точною, оскільки рівність виконується для ідеального сплайну Ейлера. Дійсно, при $f = \varepsilon_r$, $f^{(j)} = \varepsilon_{r-j}$,

$$\|\varepsilon_{r-j}\| = \frac{K_{r-j}}{K_r^{1-\frac{j}{r}}}\|\varepsilon_r\|^{1-\frac{j}{r}}.$$

Для інших функцій будемо доводити порівнянням з ідеальними сплайнами Ейлера.

**Лема 22.1.** *Якщо* $f \in W^r(\mathbb{R})$, $\left\|f^{(r)}\right\| < 1$, $\|f\| < K_r$, *то* $\|f'\| \leqslant K_{r-1}$.

*Доведення.* Розглянемо три випадки.

*Основний випадок.* Припустимо, що існує $n \in \mathbb{N}$: $f$ — періодична з періодом $2\pi n$. Будемо міркувати так само, як при доведенні нерівності Бернштейна. Припустимо від супротивного, що існує $x_0$: $|f'(x_0)| > K_{r-1}$. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $f'(x_0) > K_{r-1}$. Розглянемо зсув нашої функції $g(\cdot) := f(\cdot - a)$ такий, що $g(t_0) = \varepsilon_r(t_0)$, $\varepsilon_r'(t_0) > 0$, де $t_0 = x_0 + a$. Розглянемо арку функції $\varepsilon_r$, що містить точку $t_0$. Оскільки $g'(t_0) > K_{r-1} \geqslant \varepsilon_r'(t_0)$, та $\|g\| < K_r = \|\varepsilon_r\|$, то графік $g$ перетинає цю арку принаймні в трьох точках. Нехай $A$ — $x$-координата лівого кінця арки. Зважаючи на те, що $\|g\| < K_r = \|\varepsilon_r\|$, маємо, що на періоді $(A, A + 2\pi n]$ графік $g$ принаймні раз перетне кожну арку $\varepsilon_r$, причому одну з них принаймні тричі. Отже, на періоді $(A, A + 2\pi n]$ різниця $\varepsilon_r - g$ має $\geqslant 2n + 2$ нулів. З періодичності та теореми Ролля отримуємо, що похідна різниці має теж $\geqslant 2n + 2$ нулів на періоді. Тому $\varepsilon_r^{(r-1)} - g^{(r-1)}$ має $\geqslant 2n + 2$ нулів на періоді. Значить існує проміжок довжини $\pi$, де $\geqslant 2$ нулі цієї різниці, і $\varepsilon_r^{(r-1)}$ є лінійною. Нехай $t_1 < t_2$ — такі нулі. Тоді

$$\begin{aligned}
|t_1 - t_2| &= |\varepsilon_r^{(r-1)}(t_1) - \varepsilon_r^{(r-1)}(t_2)| = |g^{(r-1)}(t_1) - g^{(r-1)}(t_2)| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} g^{(r)}(x)\, dx \right| \leqslant (t_2 - t_1) \left\| g^{(r)} \right\| < t_2 - t_1,
\end{aligned}$$

бо $\left\| g^{(r)} \right\| = \left\| f^{(r)} \right\| < 1$, протиріччя.

$f$ — *фінітна*, тобто існує $d > 0$: $f(x) = 0$, $x \notin [-d, d]$. Тоді існує $n \in \mathbb{N}$: $2\pi n > 4d$. Для $x \in [-2d, 2d + 2\pi n]$ покладемо $g(x) := f(x)$, і продовжимо $g$ так, щоб вона була $2\pi n$-періодичною. Таким чином цей випадок зведено до основного.

$f$ — *довільна.* Цей випадок зводиться до двох попередніх за допомогою леми "про корито".

**Лема 22.2.** *Для довільних $a > 0$, $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{N}$ існує $d > 0$ і функція $s$ такі, що*

1) $s(x) = 1, \quad x \in [-a, a]$;
2) $s(x) = 0, \quad x \notin [-d, d]$;
3) $\|s\| \leqslant 1$;
4) $\left\| s^{(j)} \right\| \leqslant \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, r$.

**Вправа 46.** *Довести лему 22.2, та завершити доведення останнього випадку леми 22.1.*

□

*Доведення теореми.* З леми 22.1 маємо: якщо $\|f\| = \|\varepsilon_r\| = K_r$ і $\left\|f^{(r)}\right\| = \left\|\varepsilon_r^{(r)}\right\| = K_0 = 1$, то $\|f'\| \leqslant \|\varepsilon_r'\|$. Дійсно, для $g_\varepsilon = \dfrac{f}{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, отримуємо $\|g_\varepsilon\| = \dfrac{1}{1+\varepsilon} \|f\| < \|\varepsilon_r\|$, і $\left\|g_\varepsilon^{(r)}\right\| = \dfrac{1}{1+\varepsilon} \left\|f^{(r)}\right\| < \left\|\varepsilon_r^{(r)}\right\|$, тому $\|f'\| = (1+\varepsilon) \|g_\varepsilon'\| \leqslant (1+\varepsilon) \|\varepsilon_r'\|$, внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ маємо $\|f'\| \leqslant \|\varepsilon_r'\|$. Враховуючи те, що $\|\varepsilon_r'\| = \dfrac{K_{r-1}}{K_r^{1-\frac{1}{r}}} \|\varepsilon_r\|^{1-\frac{1}{r}} \|\varepsilon_0\|^{\frac{1}{r}}$, нерівність Колмогорова доведена для $j = 1$ при $\|f\| = K_r$ і $\left\|f^{(r)}\right\| = K_0$. Зведемо загальний випадок $j = 1$ до нашого. Для довільної $f$ виберемо $a$ і $b$ так, щоб функція $g(x) = af(bx)$, $x \in \mathbb{R}$, задовольняла $\|g\| = a\|f\| = K_r$ і $\left\|g^{(r)}\right\| = ab^r \left\|f^{(r)}\right\| = K_0$. При $f \not\equiv 0$ і $f^{(r)} \not\equiv 0$ такі $a, b$ існують, інакше нерівність є тривіальною. Для $g$ застосовуємо вже доведене:

$$
\begin{aligned}
\|f'\| = \frac{\|g'\|}{ab} &\leqslant \frac{1}{ab}\frac{K_{r-1}}{K_r^{1-\frac{1}{r}}} \|g\|^{1-\frac{1}{r}} \left\|g^{(r)}\right\|^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{1}{ab}\frac{K_{r-1}}{K_r^{1-\frac{1}{r}}} a^{1-\frac{1}{r}} \|f\|^{1-\frac{1}{r}} a^{\frac{1}{r}} b \left\|f^{(r)}\right\|^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{K_{r-1}}{K_r^{1-\frac{1}{r}}} \|f\|^{1-\frac{1}{r}} \left\|f^{(r)}\right\|^{\frac{1}{r}} .
\end{aligned}
$$

Отже, для $j = 1$ нерівність доведена. Для $1 < j \leqslant r$ доводимо по індукції. Припустимо, для $1 < j < r$ та для $r - 1$ доведено, доведемо для $j + 1$:

$$
\begin{aligned}
\left\|f^{(j+1)}\right\| &\leqslant \frac{K_{r-j-1}}{K_{r-j}^{1-\frac{1}{r-j}}} \left\|f^{(j)}\right\|^{1-\frac{1}{r-j}} \left\|f^{(r)}\right\|^{\frac{1}{r-j}} \\
&\leqslant \frac{K_{r-j-1}}{K_{r-j}^{1-\frac{1}{r-j}}} \left(\frac{K_{r-j}}{K_r^{1-\frac{j}{r}}} \|f\|^{1-\frac{j}{r}} \left\|f^{(r)}\right\|^{\frac{j}{r}}\right)^{1-\frac{1}{r-j}} \left\|f^{(r)}\right\|^{\frac{1}{r-j}} \\
&= \frac{K_{r-j-1}}{K_r^{1-\frac{j+1}{r}}} \|f\|^{1-\frac{j+1}{r}} \left\|f^{(r)}\right\|^{\frac{j+1}{r}} .
\end{aligned}
$$

□

*Зауваження* 22.4. При $r = 2$ нерівність Колмогорова є нерівністю Ландау. Також вивчається більш загальна нерівність вигляду

$$\left\|f^{(j)}\right\|_p \leqslant c(j, r, p, q, s) \|f\|_q^{1-\frac{j}{r}} \left\|f^{(r)}\right\|_s^{\frac{j}{r}} , \tag{22.2}$$

шукаються точні значення сталої $c(j, r, p, q, s)$. Це — мультиплікативна нерівність Колмогорова, також вивчають адитивну (коли норми додаються), що дозволяє отримати аналог і для функцій на відрізку. Нерівність Колмогорова має місце і на півосі.

На наступне зауваження увагу авторів звернув З. Дітціан.

*Зауваження* 22.5. Довівши (22.1), тобто нерівність Колмогорова для $p = q = s = \infty$, легко отримати її для довільних $p = q = s \in [1, \infty)$, причому з тією ж сталою. Вперше це помітив Стейн (у 1957). Міркування виявляютьмя корисними і в інших ситуаціях (див., наприклад, зауваження 16.2), наведемо їх схематично. Нехай $f \in W_p^r(\mathbb{R})$. Для довільної $g \in L_{p'}(\mathbb{R})$, $1/p + 1/p' = 1$, згортка $F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)g(t)\,dt$ належить $W_\infty^r(\mathbb{R})$ і має похідні $F^{(j)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(j)}(x+t)g(t)\,dt$, $j = 1, \ldots, r$. Зафіксуємо $j$, $0 < j < r$. Існує $g$ така, що $\|g\|_{p'} = 1$ і $F^{(j)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(j)}(t)g(t)\,dt = \left\|f^{(j)}\right\|_p$. За (22.1) маємо $|F^{(j)}(0)| \leqslant \left\|F^{(j)}\right\|_\infty \leqslant \dfrac{K_{r-j}}{K_r^{1-\frac{j}{r}}} \|F\|_\infty^{1-\frac{j}{r}} \left\|F^{(j)}\right\|_\infty^{\frac{j}{r}}$. За нерівністю Гелдера, $\|F\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'} = \|f\|_p$, і таким же чином $\left\|F^{(r)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(r)}\right\|_p$, тому отримуємо (22.2) для $p = q = s \in [1, \infty)$, з $c = \dfrac{K_{r-j}}{K_r^{1-\frac{j}{r}}}$. Зазначимо, що ця стала є точною для $p = q = s = 1$ і $p = q = s = \infty$.

## 23. Тотожність Поповічіу.

Припустимо, що деяка функція $f$ задана в точках $y_0 < y_1 < \cdots < y_N$. Тоді, очевидно $f(y_N) - f(y_0) = \sum_{j=0}^{N-1} (f(y_{j+1}) - f(y_j))$, що можна переписати як

$$[y_0, y_N; f] = \sum_{j=0}^{N-1} (y_{j+1} - y_j)[y_j, y_{j+1}; (y_N - y_0)^{-1}].$$

Отримана рівність — тотожність Поповічіу для $m = 1$.

Нехай задано набори точок $y_0 < y_1 < \cdots < y_N$ і $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$, причому кожна із точок $x_j$ співпадає з деякою $y_i$, тобто другий набір є підмножиною першого.

**Теорема 23.1** (тотожність Поповічіу)**.** *Має місце рівність:*

$$[x_0, \ldots, x_m; f] = \sum_{j=0}^{N-m} (y_{j+m} - y_j)[y_j, \ldots, y_{j+m}; f][x_0, \ldots, x_m; \prod_{j,m}],$$

*де* $\prod_{j,m}(\cdot) := \prod_{s=j+1}^{j+m-1} (\cdot - y_s)_+$.

*Доведення.* Індукція по $m$. Для $m = 1$ доведено. Припустимо, що доведено для $m-1$ і доведемо для $m$. Для всіх $i = 0, \ldots, m$ позначимо

$$F_m(x_i) := \sum_{j=0}^{N-m} (y_{j+m} - y_j)[y_j, \ldots, y_{j+m}; f] \prod_{j,m}(x_i).$$

За припущенням,

$$[x_0, \ldots, x_{m-1}; F_{m-1}] = [x_0, \ldots, x_{m-1}; f]. \tag{23.1}$$

Доведемо, що для деякого многочлену $P_{m-1}$ степеня $\leqslant m-1$ при всіх $s=0,\dots,n$

$$F_m(x_s) = F_{m-1}(x_s) + P_{m-1}(x_s). \tag{23.2}$$

Справді,

$$\begin{aligned}
F_m(x_s) = \sum_{j=0}^{N-m}&([y_{j+1},\dots,y_{j+m};f]-[y_j,\dots,y_{j+m-1};f])\prod_{j,m}(x_s)\\
&= -[y_0,\dots,y_{m-1};f]\prod_{0,m}(x_s)+\sum_{j=1}^{N-m}[y_j,\dots,y_{j+m-1};f](\prod_{j-1,m}(x_s)-\prod_{j,m}(x_s))\\
&\qquad + [y_{N-m+1},\dots,y_N;f]\prod_{N-m,m}(x_s)\\
&= P_{m-1}(x_s)+\sum_{j=1}^{N-m}[y_j,\dots,y_{j+m-1};f](\prod_{j-1,m}(x_s)-\prod_{j,m}(x_s))+0.
\end{aligned}$$

Розглянемо останню дужку:

$$\begin{aligned}
\prod_{j-1,m}(x_s)-\prod_{j,m}(x_s) &= (x_s-x_j)_+\cdots(x_s-x_{j+m-2})_+ - (x_s-x_{j+1})_+\cdots(x_s-x_{j+m-1})_+\\
&= ((x_s-x_j)_+ - (x_s-x_{j+m-1})_+)\cdot(x_s-x_{j+1})_+\cdots(x_s-x_{j+m-1})_+\\
&= (x_{j+m-1}-x_j)\prod_{j,m-1}(x_s),
\end{aligned}$$

перевірили (23.2). Тепер, враховуючи (23.1) і (23.2), маємо

$$\begin{aligned}
[x_0,\dots,x_m;f] &= \frac{[x_0,\dots,x_{m-1};f]-[x_1,\dots,x_m;f]}{x_0-x_m}\\
&= \frac{[x_0,\dots,x_{m-1};F_{m-1}]-[x_1,\dots,x_m;F_{m-1}]}{x_0-x_m}\\
&= [x_0,\dots,x_m;F_{m-1}] = [x_0,\dots,x_m;F_{m-1}-P_{m-1}]\\
&= [x_0,\dots,x_m;F_m].
\end{aligned}$$

□

## 24. Базиси сплайнів.

**Теорема 24.1** (про зображення сплайну). *Кожен сплайн $S$ мінімального дефекту степеня $r$ з вузлами $a=t_0<t_1<\dots<t_N=b$ можна зобразити у вигляді*

$$S(x) = P_r(x) + \frac{1}{r!}\sum_{j=1}^{N-1}(S^{(r)}(t_j+)-S^{(r)}(t_j-))(x-t_j)_+^r, \tag{24.1}$$

*де*

$$P_r(x) = S(a) + \frac{S'(0)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{S^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r.$$

*Доведення.* Позначимо праву частину (24.1) через $V(x)$. Зауважимо, що $V - S \in C^{(r-1)}[a,b]$, і при $x \in (t_\nu, t_{\nu+1})$ маємо $S^{(r)}(x) = S^{(r)}(t_\nu+)$ і

$$V^{(r)}(x) - S^{(r)}(x) = S^{(r)}(a) + \frac{1}{r!}\sum_{j=1}^{\nu} r!(S^{(r)}(t_j+) - S^{(r)(t_j-)}) - S^{(r)}(t_\nu+) = 0,$$

тобто $V^{(r)}(x) - S^{(r)}(x) = 0$, при $x \in [a,b] \setminus \{t_0, \dots, t_N\}$. Отже, $V^{(r)} \equiv S^{(r)}$, тому $V - S =: Q_{r-1}$ — многочлен степеня $\leqslant r-1$, причому в точці $a$ він разом з усіма похідними обертається в нуль, тому $Q_{r-1} = 0$, $V = S$, що і вимагалось. □

*Зауваження* 24.1. Для нескінченної послідовності вузлів $\{t_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, $t_j \to \pm\infty$, $j \to \pm\infty$ теж має місце представлення (24.1), з $P_r = 0$ і $\sum_{j=-\infty}^{\infty}$ замість $\sum_{j=1}^{N-1}$. Доведення аналогічне.

**Означення 24.1.** Нехай $T = \{t_j\}_{j=0}^{N}$. Через $S_r(T)$ позначимо множину всіх сплайнів степеня $r$ мінімального дефекту з вузлами в точках $t_j$.

**Теорема 24.2** (про базис сплайнів мінімального дефекту)**.** *Множина $S_r(T)$ є лінійним простором розмірності $N + r$, з базисом:*

$$(x-t_1)_+^r, \dots, (x-t_{N-1})_+^r, 1, (x-a), \dots, (x-a)^r.$$

*Доведення.* Враховуючи представлення (24.1) досить довести, що ця система функцій є лінійно-незалежною. Нехай існують $c_1, \dots, c_{N+r}$ такі, що

$$\varphi(x) := \sum_{j=1}^{N-1} c_j(x-t_j)_+^r + \sum_{j=0}^{r} c_{N+j}(x-a)^j = 0, \quad x \in [a,b].$$

Тоді $\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(r)}(a) = 0$ дає $c_r = \dots = c_{N+r} = 0$. Далі послідовно $\varphi(t_2) = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = 0$, $\varphi(t_3) = 0 \ \Rightarrow \ c_2 = 0$, і так далі. □

*Зауваження* 24.2. Нехай $T = \{t_j\}_{j=0}^{N}$. Позначимо $\bar{k} = (k_1, \dots, k_{N-1})$, де $k_j$ — цілі числа $1 \leqslant k_j \leqslant r$. Через $S_r(T, \bar{k})$ позначимо множину сплайнів степеня $r$ з вузлами в точках $t_j$ таких, що при кожному $j = 1, \dots, N-1$ в околі точки $t_j$ маємо $S \in C^{(r-k_j)}$ (для сплайнів мінімального дефекту всі $k_j$ рівні 1). Тоді для кожного $S \in S_r(T, \bar{k})$ має місце зображення

$$S(x) = P_r(x) + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{k_i} \frac{1}{(r-i)!}(S^{(r-i)}(t_j+) - S^{(r-i)}(t_j-))(x-t_j)_+^{r-i}$$

з тим же $P_r$, що в (24.1). Відповідно розмірність простору $S(T,\bar{k})$ дорівнює $r+1+k_1+\dots+k_{N-1}$. Аналогічне зображення справедливе і для випадку $T=\{t_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$.

## 25. $B$-сплайни.

Нехай $T=\{t_j\}_{j=0}^{N}$ — деяке розбиття, також розглянемо додаткові вузли $t_{-r}<\dots<t_{-1}<t_0$ і $t_N<t_{N+1}<\dots<t_{N+r}$.

**Означення 25.1.** При $j=-r,\dots,N-1$ функція $B_j(x):=(t_{j+r+1}-t_j)[t_j,\dots,t_{j+r+1};\varphi_x]$, де $\varphi_x(t):=(t-x)_+^r$, називається $B$-сплайном степеня $r$. (на честь Carl de Boor)

**Теорема 25.1.** *$B$-сплайни $B_{-r}$, …, $B_{N-1}$ утворюють базис в просторі $S_r(T)$. (див. також теорему 24.2)*

*Доведення.* Досить показати, що кожну функцію з базису теореми 24.2 можна зобразити як лінійну комбінацію $B$-сплайнів. Спочатку доведемо, що для кожного $\nu=0,\dots,N+r$

$$(t_\nu-x)_+^r=\sum_{j=-r}^{N-1}B_j(x)(t_\nu-t_{j+1})_+\cdots(t_\nu-t_{j+r})_+,\quad x\in[t_0,t_N]. \tag{25.1}$$

Дійсно, за тотожністю Поповічіу маємо:

$$\begin{aligned}\frac{(t_\nu-x)_+^r}{(t_\nu-t_{-r})\cdots(t_\nu-t_0)}&=[t_{-r},\dots,t_0,t_\nu;\varphi_x]\\&=\sum_{j=-r}^{N-1}(t_{j+r+1}-t_j)[t_j,\dots,t_{j+r+1};\varphi_x][t_{-r},\dots,t_0,t_\nu;\prod_{j,r+1}]\\&=\sum_{j=-r}^{N-1}(t_{j+r+1}-t_j)[t_j,\dots,t_{j+r+1};\varphi_x]\frac{(t_\nu-t_{j+1})_+\cdots(t_\nu-t_{j+r})_+}{(t_\nu-t_{-r})\cdots(t_\nu-t_0)},\end{aligned}$$

оскільки $\varphi_x=0$ в точках $t_{-r}$, …, $t_0$. Також має місце наступний аналог (25.1):

$$(t-x)^r=\sum_{j=-r}^{N-1}B_j(x)(t-t_{j+1})\cdots(t-t_{j+r}),\quad x\in[t_0,t_N]. \tag{25.2}$$

Справді, права і ліва частини цієї рівності є многочленами степеня $r$ відносно $t$. Крім того, з (25.1) випливає, що ці многочлени співпадають при $t=t_N,\dots,t_{N+r}$, отже і при всіх $t$.

Внаслідок (25.2) маємо, що всі многочлени степеня $\leqslant r$ виражаються через лінійну комбінацію $B$-сплайнів на $[t_0,t_N]$. Тому для застосування теореми 24.2 залишається скористатись (25.1), та тим, що $(x-t_j)_+^r=(t_j-x)_+^r$ при парному $r$, та $(x-t_j)_+^r=(t_j-x)_+^r+(t_j-x)^r$ при непарному $r$. □

Розглянемо окремі властивості $B$-сплайнів.

**Властивість 1.** $\operatorname{supp} B_j \subset [t_j, t_{j+r+1}]$, $j = -r, \dots, N-1$.

*Доведення.* Якщо $x > t_{j+r+1}$, то $\varphi_x(t) = (t-x)_+^r = 0$, при $t \in [t_j, t_{j+r+1}]$, а якщо $x < t_r$, то $\varphi_x(t) = (t-x)_+^r = (t-x)^r$, при $t \in [t_j, t_{j+r+1}]$. В обох випадках $\varphi_x$ є многочленом степеня $\leqslant r$ на $[t_j, t_{j+r+1}]$, тому $B_j(x) = (t_{j+r+1} - t_j)[t_j, \dots, t_{j+r+1}; \varphi_x] = 0$. □

**Властивість 2.** $\displaystyle\sum_{j=-r}^{N-1} B_j(x) = 1$, $x \in [t_0, t_N]$.

*Доведення.* Досить $r$ разів продиференціювати (25.2) по $t$. □

**Властивість 3.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} B_j(x)\,dx = \frac{t_{j+r+1} - t_j}{r+1}$, $j = -r, \dots, N-1$.

*Доведення.* Справді, для $\nu = j, \dots, j+r+1$ маємо

$$\int_{t_j}^{t_{j+r+1}} (t_\nu - x)_+^r\,dx = \frac{1}{r+1}(t_\nu - t_j)^{r+1}.$$

Далі, оскільки $[t_j, \dots, t_{j+r+1}; (\cdot - t_j)^{r+1}] = \dfrac{1}{(r+1)!}((\cdot - t_j)^{r+1})^{(r+1)}|_\theta = 1$, отримуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_j(x)\,dx = \int_{t_j}^{t_{j+r+1}} B_j(x)\,dx = \frac{t_{j+r+1} - t_j}{r+1}[t_j, \dots, t_{j+r+1}; (\cdot - t_j)^{r+1}] = \frac{t_{j+r+1} - t_j}{r+1}.$$

□

*Зауваження* 25.1. Враховуючи властивість 3, $B$-сплайни іноді нормують іншим чином, розглядають $M_j(x) := \dfrac{(r+1)B_j(x)}{t_{j+r+1} - t_j}$, тоді $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} M_j(x)\,dx = 1$, що має певний ймовірнісний зміст.

**Властивість 4.** $B_j(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, $j = -r, \dots, N-1$.

*Доведення.* Дійсно, $(\varphi_x = \varphi_x(t) = (t-x)_+^r)$

$$\begin{aligned} B_j(x) = [t_j, \dots, t_{j+r+1}; \varphi_x] &= \frac{[t_{j+1}, \dots, t_{j+r+1}; \varphi_x] - [t_j, \dots, t_{j+r}; \varphi_x]}{t_{j+r+1} - t_j} \\ &= \frac{1}{t_{j+r+1} - t_j} \int_0^1 \dots \int_0^{u_{r-1}} (\varphi_x^{(r)}(t_{j+1} + (t_{j+2} - t_{j+1})u_1 + \dots + (t_{j+r+1} - t_{j+r})u_r) \\ &\qquad - \varphi_x^{(r)}(t_j + (t_{j+1} - t_j)u_1 + \dots + (t_{j+r} - t_{j+r-1})u_r))\,du_r \dots du_1 \geqslant 0, \end{aligned}$$

оскільки $\varphi_x^{(r)}(t) = r!(t-x)_+^0$ — неспадна функція. □

**Властивість 5.** *B-сплайни є базисом з найменшим носієм, тобто якщо носій сплайну $s \in S_r(T)$ містить менше, ніж $r+2$ вузлів розбиття $T$, то $s \equiv 0$.*

*Доведення.* Випадок $r = 3$. Припустимо, $\operatorname{supp} s \subset [t_0, t_3]$. За теоремою Ролля, $s''$ має хоча б два нулі $\theta_1 < \theta_2$ в $(t_0, t_3)$. Але $s''$ є неперервним кусково-лінійним сплайном. Якщо $\theta_1 \in (t_0, t_1]$, то $s''(x) = 0$, $x \in [t_0, t_1]$, і тоді $\operatorname{supp} s \subset [t_1, t_2]$ і далі аналогічно існує нуль $s''$ наприклад в $[t_1, t_2]$, тоді $\operatorname{supp} s \subset [t_2, t_3]$ і тому $s \equiv 0$. Аналогічно розглядається випадок $\theta_2 \in [t_2, t_3)$. Отже, можемо вважати, що $\theta_1, \theta_2 \in [t_1, t_2]$. Тому $s''(x) = 0$, $x \in [t_1, t_2]$, і з неперервності та лінійності $s''$ на $[t_0, t_1]$ та $[t_2, t_3]$, отримуємо $s'' \equiv 0$ і $s \equiv 0$. □

## 26. Оцінки наближення періодичними сплайнами.

**Означення 26.1.** Періодичним сплайном (з рівновіддаленими вузлами) степеня $r$ мінімального дефекту називається $2\pi$-періодична функція $S_{r,n} \subset C^{(r-1)}(\mathbb{R})$ така, що $S_{r,n}$ є алгебраїчним многочленом степеня $\leqslant r$ на кожному з проміжків $[j\pi/n, (j+1)\pi/n]$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

**Означення 26.2.** Періодичний сплайн $S_{r,n}$ називають інтерполяційним для $2\pi$-періодичної неперервної функції $f$, якщо

$$\begin{cases} f(j\frac{\pi}{n}) = S_{r,n}(j\frac{\pi}{n}), \quad j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, & \text{якщо } r \text{ — непарне,} \\ f((j+\frac{1}{2})\frac{\pi}{n}) = S_{r,n}((j+\frac{1}{2})\frac{\pi}{n}), \quad j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, & \text{якщо } r \text{ — парне.} \end{cases}$$

**Теорема 26.1** (Тихомірова)**.** *Якщо $2\pi$-періодична $f \in W^r(\mathbb{R})$, то для інтерполяціяного періодичного сплайну $S_{r-1,n}$ має місце нерівність:*

$$\|f - S_{r-1,n}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{K_r}{n^r} \left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})},$$

*де $K_r$ — стала Фавара.*

*Доведення.* Для $r = 1$ твердження очевидне. Заміна $g(x) = f(x/n)$, $x \in \mathbb{R}$, дозволяє звести теорему до наступного: для кожної $2\pi n$-періодичної $g \in W^{(r)}(\mathbb{R})$ такої, що $\left\|g^{(r)}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1$, інтерполяційний $2\pi n$-періодичний сплайн $\sigma_{r-1,n}$ степеня $\leqslant r-1$ мінімального дефекту з вузлами $j\pi$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ (інтерполяційність в сенсі попереднього означення — для непарного $r$ в вузлах, для парного — посередині між вузлами) задовольняє

$$\|g - \sigma_{r-1,n}\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant K_r. \tag{26.1}$$

Будемо використовувати ідеальні сплайни Ейлера $\varepsilon_r$, нагадаємо, $\|\varepsilon_r\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = K_r$. Розглянемо випадок $r$ — непарне, інший випадок аналогічний. Маємо $g(j\pi) = \sigma_{r-1,n}(j\pi)$, $\varepsilon_r(j\pi) = 0$, $j = 0, \pm1, \pm2, \dots$, і якщо (26.1) не виконується, то $\|g - \sigma_{r-1,n}\|_{C(\mathbb{R})} > K_r = \|\varepsilon_r\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$, тому існує $x^* \in \mathbb{R}$, $x^* \neq j\pi$, $j = 0, \pm1, \pm2, \dots$ і $\lambda$, $|\lambda| < 1$ такі, що $y := \varepsilon_r - \lambda(g - \sigma_{r-1,n})$ обертається в нуль в точці $x^*$. Отже, $y$ на періоді $(a, a + 2\pi n]$ має $\geqslant 2n+1$ нуль. Тому $y^{(r-2)}$ теж має на $(a, a+2\pi n]$ хоча б $2n+1$ нулів, крім того, є неперервною. При $x \in (j\pi, (j+1)\pi)$ обчислюємо $y^{(r)}(x) = \varepsilon_r^{(r)}(x) - \lambda g^{(r)}(x) = \pm1 - \lambda g^{(r)}(x)$ — має сталий знак. Отже, на кожному проміжку $(j\pi, (j+1)\pi)$ функція $y^{(r)}$ або строго додатня, або строго від'ємна, тому $y^{r-2}$ відповідно або строго опукла, або строго угнута, в залежності від парності $j$. Отримуємо протиріччя завдяки наступній лемі (доведення самостійно, по індукції).

**Лема 26.1.** *Нехай $F \in C[0, 2\pi n]$ така, що $F(0) = F(2\pi n)$, та $(-1)^j F$ строго опукла вниз на $(j\pi, (j+1)\pi)$, $j = 0, \dots, n-1$. Тоді $F$ має $\leqslant 2n$ нулів на $(0, 2\pi n]$.*

В нашому випадку $F = g^{(r-2)}$ має $\geqslant 2n+1$ нуль. $\square$

*Зауваження* 26.1. Субботін довів: якщо $2\pi$-періодична $f \in C(\mathbb{R})$, то для інтерполяційного $2\pi$-періодичного сплайну $S_{r-1,n}$ (у сенсі означення 26.2) виконується оцінка

$$\|f - S_{r-1,n}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant c(r)\omega_r(1/n, f). \tag{26.2}$$

Більше того, якщо $f \in C^{(k)}$, $k = 1, \dots, r-1$, то для всіх $j = 0, \dots, k$

$$\left\| f^{(j)} - S_{r-1,n}^{(j)} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{c(r)}{n^j}\omega_{r-j}(1/n, f^{(j)}), \tag{26.3}$$

тобто маємо оцінку з одночасним наближенням похідних. З (26.2) безпосередньо випливає теорема Тихомірова, але з неточною сталою. Користуючись теоремою Тихомірова та певними додатковими міркуваннями ми доведемо (26.2) в параграфі 29.

**Вправа 47.** *Довести, що для довільного періодичного сплайну з n рівновіддаленими вузлами $S_{r-1,n}$ степеня $r-1$ мінімального дефекту виконуються нерівності:*

$$\left\| S_{r-1,n}^{(r)} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{n^r}{K_r} \max_{j \in \mathbb{Z}} |S_{r-1,n}(j\pi/n)| \leqslant \frac{n^r}{K_r} \|S_{r-1,n}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}.$$

## 27. Поперечники.

Нехай $A, B$ — підмножини нормованого простору $X$. Величина

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_X$$

означає *відхилення* $A$ від $B$, тобто як елементи множини $A$ можна наблизити елементами множини $B$. Найчастіше ми наближуємо скінченновимірними просторами, тому доцільно задати питання: як підібрати скінченновимірний підпростір $X_n = B$ для фіксованої множини $A$, щоб мінімізувати відхилення?

**Означення 27.1.** Нехай $X$ — нормований простір, $K \subset X$. Поперечником по Колмогорову порядку $n$ називають величину

$$d_n(K, X) := \inf_{\substack{X_n \subset X \\ \dim X_n \leqslant n}} \sup_{x \in K} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X ,$$

де найлівіший інфімум береться по всім лінійним піпросторам $X_n \subset X$ розмірності $\leqslant n$.

Найбільш поширеною задачею теорії поперечників є відшукання поперечників соболевських класів. Для простору Соболєва $\widetilde{W}^r$ періодичних функцій відповідний соболевський клас — одинична куля $\widetilde{B}^r$ в напівнормі простору $\widetilde{W}^r$, тобто

$$\widetilde{B}^r := \{f \in \widetilde{W}^r : \left\|f^{(r)}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1\}.$$

В більшості випадків знайти точне значення поперечника важко, але можна знайти з точністю до сталих, зокрема, шукають асимптотичну поведінку при $n \to \infty$. Для $\widetilde{B}^r$ знайдено точне значення поперечника.

**Теорема 27.1** (Тихоміров)**.**

$$d_{2n}(\widetilde{B}^r, \widetilde{L}_\infty) = K_r n^{-r}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

*Доведення.* Оцінка зверху негайно випливає з теореми Тихомірова про наближення періодичним інтерполяційним сплайном $S_{r-1,n}$. Доведемо оцінку знизу. Легко перевірити, що оскільки $\widetilde{C}$ щільний в $\widetilde{L}_\infty$, то підпростір $X_{2n}$ можна брати з $\widetilde{C}$. Нехай $X_{2n} \subset \widetilde{C}$ є лінійною оболонкою функцій $f_1, f_2, \ldots, f_{2n}$. Виберемо $\tau \in [0, \pi/n]$ так, щоб

$$D(\tau) := \det[f_j(k\pi/n + \tau)]_{j,k=1}^{2n} = 0.$$

Це можливо вналідок неперервності та того, що матриця для $D(\pi/n)$ отримується з матриці для $D(0)$ циклічною перестановкою стовбчиків, отже $D(\pi/n) = -D(0)$. Визначимо функціонал $l : \widetilde{C} \to \mathbb{R}$

$$l(f) := \sum_{j=1}^{2n} c_j f(j\pi/n + \tau),$$

де $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, 2n$, виберемо з умов

$$l(f_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2n, \quad |c_1| + \cdots + |c_{2n}| = \|l\| = 1.$$

Нехай $S$ — періодичний сплайн степеня $r-1$ з $n$ рівновіддаленими вузлами, в яких $S(j\pi/n) = K_r n^{-r} \operatorname{sign} c_j$, $j = 1, \ldots, 2n$. Покладемо $f_0(t) := S(t - \tau) \in \widetilde{B}^r$, згідно з вправою 47. Для довільної $g \in X_{2n}$ маємо

$$\|f_0 - g\|_{\widetilde{C}} \geqslant |l(f_0 - g)| = |l(f_0)| = \frac{K_r}{n^r},$$

що й потрібно було довести. □

*Зауваження* 27.1. Гарно досліджено порядки поперечників для соболевських класів, в різних інтегральних метриках. Також розглядаються варіації означення поперечника, що накладають певні обмеження на процес наближення, наприклад: лінійність методу наближення, збереження властивостей наближуваних функцій та ін.

## 28. Екстремальні властивості сплайнів. Єдиність.

Почнемо з кубічних сплайнів. Нехай $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ — фіксоване розбиття. Щоб задати інтерполяційний кубічний сплайн $S$ мінімального дефекту ($S \in C^{(2)}[a,b]$) на цьому розбитті, необхідно визначити дві крайові умови (окрім інтерполяційних та гладкісних).

**Означення 28.1.** Пара крайових умов називається допустимою, якщо для будь-яких двох сплайнів $S_1, S_2$, що її задовольняють має місце рівність

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} (S_1'' - S_2'')S''\,dx = (S_1'(b) - S_2'(b))S_2''(b) - (S_1'(a) - S_2'(a))S_2''(a) = 0,$$

де $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, N$.

Найбільш вживаними крайовими умовами є наступні три:

1) $S'(a) = S'(b)$ і $S''(a) = S''(b)$ (періодичність);
2) $S'(a) = A$, $S'(b) = B$;
3) $S''(a) = S''(b) = 0$.

**Лема 28.1.** *Нехай функція $f \in W^2_{L_2[a,b]}$ і кубічний сплайн мінімального дефекту $S$ з вузлами $x_0, \ldots, x_N$ задовольняють одну і ту ж пару допустимих крайових умов, і $S(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, \ldots, N$. Тоді*

$$\|f''\|^2_{L_2[a,b]} = \|S''\|^2_{L_2[a,b]} + \|f'' - S''\|^2_{L_2[a,b]}\,.$$

*Доведення.* Потрібна рівність очевидно рівносильна ортогональності $f''$ і $f''-S''$ на $I := [a,b]$, тобто досить перевірити, що

$$\int_I (f''-S'')S''\,dx = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} (f''-S'')S''\,dx = 0,$$

де $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, N$. Використовуючи інтегрування частинами, допустимість крайових умов та інтерполяційність, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{I_j} (f''-S'')\,dx &= (f'-S')S''\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{I_j} (f'-S')S'''\,dx \\ &= (f'-S')S''\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} - (f-S)S'''\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} + \int_{I_j} (f-S)S^{(IV)}\,dx \\ &= (f'-S')S''\Big|_{x_{j-1}}^{x_j},\end{aligned}$$

звідки

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} (f''-S'')S'' = (f'(b)-S'(b))S''(b) - (f'(a)-S'(a))S''(a) = 0,$$

що й потрібно було довести. □

**Наслідок 28.1** (теорема Holiday). *З усіх функцій $f \in W^2_{L_2[a,b]}$ таких, що $f(x_j) = y_j$, $j = 0, \ldots, N$, для деякого заданого набору $y_0, \ldots, y_N$, і які задовольняють деяку пару допустимих крайових умов (наприклад одну з 1)–3)) інтерполяційний кубічний сплайн мінімального дефекту мінімізує величину $\|f''\|_{L_2[a,b]}$.*

**Наслідок 28.2** (єдиність). *Інтерполяційний кубічний сплайн мінімального дефекту, що задовольняє одну з крайових умов 1)–3) є єдиним.*

*Доведення.* Нехай їх два: $S_1$ та $S_2$. Тоді з леми отримуємо $\|S_1''-S_2''\|_{L_2[a,b]} = 0$. Оскільки $S_1''-S_2''$ є кусково-лінійною, то $S_1'' \equiv S_2''$, а тому $S_1 - S_2$ є лінійною функцією. Але з інтерполяційності $S_1 - S_2$ обертається в нуль у всіх вузлах, отже хоча б в двух точках, і тому $S_1 \equiv S_2$. □

*Зауваження* 28.1. Всі твердження, розглянуті в цьому параграфі, мають місце і для сплайнів мінімального дефекту степеня $2m-1$, доведення аналогічні. Відповідні умови набувають вигляду:

1)′ $S'(a) = S'(b)$, $S''(a) = S''(b)$, …, $S^{(2m-2)}(a) = S^{(2m-2)}(b)$;

2)′ $S'(a) = A_1$, $S'(b) = B_1$, …, $S^{(m-1)}(a) = A_{m-1}$, $S^{(m-1)}(b) = B_{m-1}$.

Відповідно, виконується співвідношення

$$\left\|f^{(m)}\right\|_{L_2[a,b]}^2 = \left\|S^{(m)}\right\|_{L_2[a,b]}^2 + \left\|f^{(m)} - S^{(m)}\right\|_{L_2[a,b]}^2.$$

## 29. $K$-функціонали та приклади застосування.

Одним із засобів вимірювати гладкість фунції, окрім модулів гладкості, є $K$-функціонали, введені Петре.

**Означення 29.1.** Нехай $X_1 \subset X_0$ — неперервно вкладені банахові простори. Для $f \in X_0$ $K$-функціонал визначається як

$$K(f,t;X_0,X_1) := \inf_{g \in X_1} (\|f-g\|_{X_0} + t\,\|g\|_{X_1}), \quad t \geqslant 0. \tag{29.1}$$

Тобто вимірюється наскільки "гарно" функцію $f$ із більш "складного" простору $X_0$ можна замінити функцією $g$ із більш "простого" простору $X_1$. Ми обмежимося найпростішими випадками $X_0 = C(I)$, $X_1 = W_\infty^r(I)$ для відрізку $I$, та $X_0 = \widetilde{C}$, $X_1 = \widetilde{W}_\infty^r$ для періодичних на $\mathbb{R}$ функцій. Для таких просторів зручно розглядати модифікацію (29.1), де замість $\|g\|_{X_1} = \|g\|_{W^r}$ береться напівнорма $|g|_{W^r} = \left\|g^{(r)}\right\|_{L_\infty}$, а саме

$$K(f,t;C,W^r) := \inf_{g \in W^r} (\|f-g\|_C + t\left\|g^{(r)}\right\|_{L_\infty}).$$

$K$-функціонали та модулі гладкості мають багато подібних властивостей. Крім того, є безпосередній зв'язок між $K$-функціоналами та модулями гладкості, що є корисним в певних ситуаціях.

**Теорема 29.1.** *Нехай $C = C(I)$, $W^r = W_\infty^r(I)$ для відрізку $I$, або $C = \widetilde{C}$, $W^r = \widetilde{W}_\infty^r$ для періодичних на $\mathbb{R}$ функцій. Тоді для кожної $f \in C$ маємо*

$$c_1 K(f,t^r;C,W^r) \leqslant \omega_r(t,f) \leqslant c_2 K(f,t^r;C,W^r), \tag{29.2}$$

*де $c_1$ та $c_2$ — сталі, що залежать від $r$.*

*Доведення.* Доведення наведемо лише для періодичного випадку. Права нерівність в (29.2) є простим наслідком властивостей модуля гладкості, бо для довільної $g \in W^r$ маємо

$$\omega_r(t,g) \leqslant \omega_r(t,f-g) + \omega_r(t,g) \leqslant 2^r\,\|f-g\|_C + t^r\left\|g^{(r)}\right\|_{L_\infty} \leqslant 2^r K(f,t^r;C,W^r).$$

Для доведення лівої нерівності скористаємося модифікацією середніх Стєклова, покладемо

$$g_r(x) := \frac{1}{t^r}\int_0^t \dots \int_0^t \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1}\binom{r}{j} f(x + j(t_1 + \dots + t_r)/r)\,dt_1 \dots dt_r. \tag{29.3}$$

Тоді

$$|f(x)-g_r(x)| = \left|\frac{1}{t^r}\int_0^t \dots \int_0^t \Delta^r_{(t_1+\dots+t_r)/r}(f,x)\,dt_1\dots\,dt_r\right| \leqslant \omega_r(t,f).$$

Вираз в (29.3) є лінійною комбінацією виразів

$$\begin{aligned} g_{r,\nu}(x) :&= \frac{1}{t^r}\int_0^t \dots \int_0^t f(x+\nu(t_1+\dots+t_r))\,dt_1\dots\,dt_r \\ &= \frac{1}{t^r}\int_{\frac{x}{r\nu}}^{\frac{x}{r\nu}+t} \dots \int_{\frac{x}{r\nu}}^{\frac{x}{r\nu}+t} f(\nu(t_1+\dots+t_r))\,dt_1\dots\,dt_r, \end{aligned}$$

для $\nu = j/r$, $j = 1,\dots,r$. Дифференціюючи, отримуємо

$$\begin{aligned} f'_{r,\nu}(x) = r\frac{1}{t^r}\frac{1}{t\nu}\int_{\frac{x}{r\nu}}^{\frac{x}{r\nu}+t} \dots \int_{\frac{x}{r\nu}}^{\frac{x}{r\nu}+t} \Big(& f\big(\nu\big(\frac{x}{r\nu}+t+t_1+\dots+t_{r-1}\big)\big) \\ &- f\big(\nu\big(\frac{x}{r\nu}+t_1+\dots+t_{r-1}\big)\big)\Big)\,dt_1\dots\,dt_{r-1} \\ = \frac{1}{t\nu}(g_{r-1,\nu}(x+t\nu)-g_{r-1,\nu}(x)),& \end{aligned}$$

що вірно і для $r=1$, якщо покласти $g_{0,\nu}(x) := f(x)$. Тому, повторюючи дифференціювання за отриманою формулою, маємо

$$|g^{(r)}_{r,\nu}(x)| = \left|\frac{1}{(t\nu)^r}\Delta^r_{t\nu}(f,x)\right| \leqslant \frac{c(r)}{t^r}\omega_r(t,f).$$

Отже, можна взяти $g := g_r$. □

Розглянемо приклади застосування еквівалентоності (29.2). Через $c(r)$ позначатимемо різні сталі, що залежать від $r$.

**Приклад 1.** Нерівність Уітні. Нехай $f \in C(I)$, $I = [0,1]$. Згідно з (29.2), $t := 1$, існує $g \in W^r_\infty(I)$ така, що

$$\|f-g\|_{C(I)} + \left\|g^{(r)}\right\|_{L_\infty(I)} \leqslant c(r)\omega_r(1,f) \leqslant c(r)\omega_r(1/r,f).$$

Нехай $P_{r-1}$ — многочлен Тейлора степеня $r-1$ для $g$ в точці 0. Використовуючи формулу Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа, маємо

$$|g(x)-P_{r-1}(x)| \leqslant \frac{1}{r!}\left\|g^{(r)}\right\|_{L_\infty(I)}, \quad x \in I.$$

Отже,

$$\|f-P_{r-1}\|_{C(I)} \leqslant \|f-g\|_{C(I)} + \|g-P_{r-1}\|_{C(I)} \leqslant c(r)\omega_r(1/r,f).$$

**Приклад 2.** Оцінка Субботіна (26.2) наближення інтерполяційними сплайнами в термінах модуля гладкості. $K$-фунціонал дозволяє звести задачу до використання теореми Тихомірова. Через $S_{r-1,n}f$ позначимо інтерполяціний сплайн степеня $r-1$ для функції $f$, див. означення 26.2. Покладемо $t := \frac{\pi}{2n}$, тоді існує $g \in \widetilde{W}^r$ така, що

$$\|f-g\|_{\widetilde{C}} + t^r \left\|g^{(r)}\right\|_{\widetilde{L}_\infty} \leqslant c(r)\omega_r(t,f) \leqslant c(r)\omega_r(1/n,f). \tag{29.4}$$

Маємо

$$\|f-S_{r-1,n}f\|_{\widetilde{C}} \leqslant \|f-g\|_{\widetilde{C}} + \|S_{r-1,n}(f-g)\|_{\widetilde{C}} + \|g-S_{r-1,n}g\|_{\widetilde{C}}\,.$$

Якщо довести, що

$$\|S_{r-1,n}(f-g)\|_{\widetilde{C}} \leqslant c(r)\,\|f-g\|_{\widetilde{C}}\,, \tag{29.5}$$

то за теоремою Тихомірова для $g$ та (29.4), матимемо

$$\begin{aligned}\|f-S_{r-1,n}f\|_{\widetilde{C}} &\leqslant c(r)\omega_r(1/n,f) + \|g-S_{r-1,n}g\|_{\widetilde{C}}\\ &\leqslant c(r)\omega_r(1/n,f) + \frac{K_r}{n^r}\left\|g^{(r)}\right\|_{\widetilde{L}}\\ &\leqslant c(r)\omega_r(1/n,f).\end{aligned}$$

Залишається показати (29.5). Візьмемо $h := f-g$. Допоміжна функція $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\sigma(x) := \begin{cases} e^{(x^2-1)^{-1}}, & x \in (-1,1),\\ 0, & x \notin (-1,1),\end{cases}$$

задовольняє $\left\|\sigma^{(r)}\right\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant c(r)$ і $\|\sigma\|_{C(\mathbb{R})} = 1$, $\sigma(0)=1$. Оскільки $S_{r-1,n}$ задається лише значеннями в вузлах $\frac{j\pi}{n}$, $j=0,\ldots,2n-1$, то поклавши

$$\tilde{h}(x) := \sum_{j=0}^{2n-1} h(j\pi/n)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma(xt^{-1}-2k\pi), \quad x\in\mathbb{R},$$

(нагадаємо, $t=\frac{\pi}{2n}$) отримаємо $S_{r-1,n}\tilde{h} = S_{r-1,n}h$, причому $\tilde{h}\in\widetilde{W}^r$, $\left\|\tilde{h}\right\|_{\widetilde{C}} \leqslant \|h\|_{\widetilde{C}}$ і $\left\|\tilde{h}^{(r)}\right\|_{\widetilde{C}} \leqslant c(r)t^{-r}\,\|h\|_{\widetilde{C}} = c(r)n^r\,\|h\|_{\widetilde{C}}$. Враховуючи це, за теоремою Тихомірова

$$\begin{aligned}\|S_{r-1,n}h\|_{\widetilde{C}} = \left\|S_{r-1,n}\tilde{h}\right\|_{\widetilde{C}} &\leqslant \left\|\tilde{h}-S_{r-1,n}\tilde{h}\right\|_{\widetilde{C}} + \left\|\tilde{h}\right\|_{\widetilde{C}}\\ &\leqslant \frac{K_r}{n^r}\left\|\tilde{h}^{(r)}\right\|_{\widetilde{C}} + \|h\|_{\widetilde{C}}\\ &\leqslant c(r)\,\|h\|_{\widetilde{C}}\,,\end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

## 30. Нейронні мережі.

З огляду на існуючу літературу важко дати однозначно означення, що таке нейронна мережа. Взагалі, нейронні мережі — це певні моделі обчислень, що насправді досить віддалені від біологічної мотивації. Нейронні мережі мають певні спільні характеристики. Задається певна інформація на вході $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ та деякий процес, що призводить до обчислення результату $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Цей процес являє собою деяку функцію $y = G(x)$, яка може бути дуже складною. Більше того, ми не можемо обчислити точно цю невідому функцію $G$, але вибираємо "кандидата" — функцію $F(x) = F(x, w)$ з певної параметризованої множини функцій, користуючись наявною інформацією про $G$, що має допомогти вибрати відповідні параметри $w$. Головною перевагою нейронних мереж є те, що при фіксованих параметрах $w$ функція $F(x, w)$, як правило, швидко обчислюється за допомогою певної послідовності простих дій. При цьому $F$ може (наближено) моделювати дуже складну функціональну залежність $G$. Недолік (і основна задача) полягає у тому, що вибрати належні параметри $w$ може бути дуже складно. Відповідна задача оптимізації вибору $w$ розв'язується за допомогою певних "правил тренування", що наближено знаходять $w$, користуючись наявними прикладами значень $G$. Нейронні мережі застосовуються в задачах класифікації та розпізнавання зображень, прогнозування цін на біржах та ін., коли відома значна кількість інформації для "тренування". Практична задача полягає у знаходженні ефективних алгоритмів для вибору параметрів $w$. Теоритично досліджуються межі застосування і апроксимаційні можливості відповідних моделей.

Ми розглянемо одну з найпростіших моделей, так звану $MLP$ (multilayer feedforward perceptron) модель. Вона складається зі скінченного числа шарів (layers), які утворені скінченною кількістю найпростіших обчислювальних елементів, або нейронів (neurons). Кожен нейрон кожного шару з'єднаний з усіма нейронами наступного шару, тобто результат роботи нейрона попереднього шару відомий всім нейронам наступного шару. Кожен нейрон наступного шару отримує результати роботи всіх нейронів попереднього шару як вхідну інформацію. Виділяють перший (вхідний, input) шар, останній (вихідний, output) шар, а всі інші проміжні шари називають прихованими (hidden). Правила дії нейронів наступні. Нейрони вхідного шару отримують вхідну інформацію $x_{0,j}$ і передають її нейронам наступного шару $x_{1,j} = x_{0,j}$. В $i$-ому прихованому шарі $k$-ий нейрон отримує всю інформацію $x_{i,j}$ з попереднього шару, обчислює зважену суму $\sum_j w_{i,j,k} x_{i,j}$ з деякими вагами $w_{i,j,k}$. Результат зсувається на

$\theta_{i,k}$ і підставляється в фіксовану фунцію (активаційна функція) $\sigma$. Так утворюється результат роботи цього нейрона, що передається наступному шару

$$x_{i+1,k} = \sigma\left(\sum_j w_{i,j,k} x_{i,j} - \theta_{i,k}\right).$$

На вихідному шарі зсув та активаційна функція не застосовуються, обчислюється лише зважена сума. Нейронна мережа з $m$ нейронами на вихідному шарі може розглядатись як $m$ нейронних мереж з одним нейроном у вихідному шарі, тому ми розглядатимемо лише таку ситуацію. Крім того, обмежимося одним прихованим шаром, що складається з $r$ нейронів. Тоді дія нашої моделі на вхідні дані $x = (x_1, \ldots, x_n)$ виражатиметься формулою

$$y = \sum_{i=1}^{r} c_i \sigma\left(\sum_{j=1}^{n} w_{i,j} x_j - \theta_i\right),$$

де $w_{i,j}$ та $c_i$ — ваги прихованого та вихідного шарів відповідно, $\theta_i$ — зсуви.

Найбільш поширеними активаційними функціями є наступні:

1) функція Хевісайда $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$
2) логістичний сігмоїд (logistic sigmoid) $\sigma(t) = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$,
3) кусково-лінійна функція вигляду $\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant -1, \\ (t+1)/2, & -1 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant t, \end{cases}$
4) гаусовий сігмоїд $\sigma(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du$,
5) сігмоїд арктангенса $\sigma(t) = \dfrac{1}{\pi} \arctan t + \dfrac{1}{2}$.

Термін сігмоїдальна функція застосовують до функцій $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що $\lim\limits_{t\to-\infty} \sigma(t) = 0$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = 1$, іноді додають умову неспадності $\sigma$.

Розглянемо питання щільності $MLP$ моделі з одним прихованим шаром. Позначимо

$$M_n(\sigma) := \bigcup_{r\in\mathbb{N}} M_{n,r}(\sigma), \quad M_{n,r}(\sigma) := \Big\{ \sum_{i=1}^{r} c_i \sigma\left(\sum_{j=1}^{n} w_{i,j} x_j - \theta_i\right) : c_i, \theta_i, w_{i,j} \in \mathbb{R} \Big\},$$

множини всіх реалізацій (функцій) такої моделі. Множину $G$ назвемо щільною в $C(\mathbb{R}^n)$, якщо для кожного компакту $K \subset \mathbb{R}^n$, будь-яких $\varepsilon > 0$, $f \in C(K)$, існує

$g \in G$ така, що $\|f - g\|_{C(K)} < \varepsilon$. Виявляється, що $M_n(\sigma)$ є щільною в $C(\mathbb{R}^n)$ за досить слабких умов на $\sigma$.

**Теорема 30.1.** *Нехай $\sigma \in C(\mathbb{R})$. Для того, щоб $M_n(\sigma)$ була щільною в $C(\mathbb{R}^n)$ необхідно і достатньо, щоб $\sigma$ не була многочленом.*

Необхідність очевидна — якщо $\sigma$ є многочленом степеня $k$, то кожний елемент $M_n(\sigma)$ є многочленом степеня $\leqslant k$, а множина многочленів фіксованого степеня не є щільною в $C(\mathbb{R}^n)$.

Для доведення достатності нам знадобляться так звані плоскі хвилі (plane waves) або хребетні функції (ridge functions), що дозволять звести задачу щільності $M_n(\sigma)$ до одновимірної задачі щільності $M_1(\sigma)$. Плоскі хвилі — це функції вигляду

$$g(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n), \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

де $g$ — функція з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Введемо позначення для функцій, що є сумами плоских хвиль

$$R_n := \bigcup_{r \in \mathbb{N}} R_{n,r}, \quad R_{n,r} := \Big\{ \sum_{i=1}^{r} g_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) : a_{i,j} \in \mathbb{R}, g_i \in C(\mathbb{R}) \Big\}.$$

Ясно, що $R_n \supset M_n(\sigma)$ для довільної неперервної $\sigma$.

**Вправа 48.** *Довести, що $R_n$ щільна в $C(\mathbb{R}^n)$. (Скористатись наприклад тим, що многочлени утворюють щільну множину, а кожен многочлен від $n$ змінних зобразити як суму плоских хвиль, утворених многочленами від однієї змінної.)*

Це дозволяє звести задачу до одновимірної.

**Вправа 49.** *Довести, що $M_n(\sigma)$ щільна в $C(\mathbb{R}^n)$, якщо $M_1(\sigma)$ щільна в $C(\mathbb{R})$.*

*Доведення теореми 30.1.* Згідно з попередньою вправою, досить довести, що якщо $\sigma \in C(\mathbb{R})$ — не многочлен, то $M_1(\sigma)$ щільна в $C(\mathbb{R})$. Припустимо, що $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$. Знадобиться наступний факт, що є гарною олімпіадною задачею.

**Вправа 50.** *Якщо $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$ і для кожного $x \in \mathbb{R}$ існує $k = k(x) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таке, що $\sigma^{(k)}(x) = 0$, то $\sigma$ — многочлен.*

Отже, маємо протилежне — існує точка $\theta^* \in \mathbb{R}$ така, що $\sigma^{(k)}(-\theta^*) \neq 0$, для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для кожного $h \neq 0$ маємо, що

$$\frac{\sigma((\lambda + h)t - \theta^*) - \sigma(\lambda t - \theta^*)}{h}$$

належить $M_1(\sigma)$, і тому, зважаючи на гладкість $\sigma$ отримуємо, що

$$\frac{d}{d\lambda}\sigma(\lambda t - \theta^*)\Big|_{\lambda=0} = t\sigma'(-\theta^*)$$

лежить в замиканні $M_1(\sigma)$. Аналогічним міркуванням

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\sigma(\lambda t - \theta^*)\Big|_{\lambda=0} = t^k\sigma^{(k)}(-\theta^*)$$

лежить в замиканні $M_1(\sigma)$, для будь-якого $k$. Оскільки всі похідні $\sigma$ в точці $-\theta^*$ ненульові, то замикання $M_1(\sigma)$ містить всі многочлени, а отже, і неперервні функції. Випадок $\sigma \in C(\mathbb{R})$ зводиться до щойно доведеного випадку $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$ використанням згорток з належними гладкими функціями.

$\square$

## Література

[1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и её приложения // Москва: Мир, 1972.

[2] Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А., Неравенства для производных и их приложения // Наукова думка, Киев, 2003.

[3] DeVore, R. A., Lorentz G. G., Constructive Approximation // Springer Verlag, Berlin, 1993.

[4] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами // М.: Наука, 1977.

[5] Dzyadyk V. K., Shevchuk I. A., Theory of uniform approximation of functions by polynomials // Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008.

[6] Ditzian Z. and Totik V., Moduli of smoothness // Springer Verlag, New York, 1987.

[7] Корнейчук Н. П., Точные константы в теории приближения // Москва "Наука", 1987.

[8] Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А., Экстремальные свойства полиномов и сплайнов // Киев, Наукова думка, 1992.

[9] Lorentz G. G., Bernstein Polynomials // Univ. of Toronto Press, Toronto, 1953.

[10] DeVore R. A., Lorentz G. G., Constructive approximation. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 303 // Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[11] Lorentz, G. G., M. v. Golitschek, Y. Makovoz, Constructive Approximation // Springer Verlag, Berlin, 1996.

[12] Petrushev P. P., Popov V. A. Rational Approximation of real function // Cambridge University Press, 1987.

[13] Pinkus A., Approximation theory of the MLP model in neural networks // Acta Numerica (1999), 143–195.

[14] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного // ФИЗМАТГИЗ, 1960.

[15] Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, 3 тома // М.; Л.; Изд-во АН СССР, 1948.

[16] Шевчук И. А., Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций // Наукова думка, Киев, 1992.

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01033, Україна (prymak@gmail.com, shevchuk@univ.kiev.ua).