М.О. Перестюк, О.М. Станжицький, О.В. Капустян

ЗАДАЧІ
оптимального керування

Навчальний посібник
для студентів університетів

КИЇВ
«ТВіМС»
2004

Розповсюдження та тиражування
без офіційного дозволу видавництва
заборонено

Підп. до друку 15.06.2004. Формат $60 \times 84/16$. Друк офс. Папір офс. №1.
Гарнітура Computer Modern LH. Друк. арк. $6,25$. Тираж 300 прим. Зам. 158
МП «ТВіМС» м. Київ, вул. Глушкова, 2.

Зміст

Вступ

Серед оптимізаційних задач, тобто задач на відшукання найбільших і найменших значень певних величин, окреме місце належить задачам оптимального керування. В 50-х роках минулого століття при розв'язуванні космічних задач інженери зіткнулися з задачею керування, що описується за допомогою системи диференціальних рівнянь. Для багатьох задач такого вигляду природно виникло бажання знайти таке керування, що мінімізує заданий критерій якості. З розвитком обчислювальної техніки з'явилася можливість обчислювати оптимальне керування, а також забезпечувати роботу системи в оптимальному режимі, і теорія знайшла широке застосування в багатьох областях. Наведемо приклади таких задач.

1. Задача про оптимальну швидкодію. *Візок рухається прямолінійно без тертя по горизонтальних рейках під дією зовнішньої сили, яку можна змінювати в заданих межах. Потрібно зупинити візок в заданому місці за найкоротший час.*

Формалізуємо дану задачу. Оскільки візок рухається по горизонтальних рейках, то положення візка в момент часу t характеризується однією координатою $X(t)$ (якщо одномірну систему координат прив'язати до горизонтальних рейок з додатнім напрямком, що співпадає з напрямком руху візка). Нехай маса візка рівна m, початкову координату будемо вважати нульовою (за рахунок вибору початку координат), тобто $X(0) = 0$, початкова швидкість v_0. Зовнішню силу (силу тяги) позначимо u. Згідно другого закону Ньютона будемо мати

$$m\ddot{X}(t) = u(t).$$

Це і є закон руху, що описується диференціальним рівнянням. Обмеження на величину тяги запишемо у вигляді $u_1 \le u(t) \le u_2$, де u_1, u_2 - задані числа (визначаються реальною задачею). З умов також маємо, що $\dot{X}(0) = v_0$, $X(T) = X_A$, $\dot{X}(T) = 0$ (оскільки візок зупинився), де X_A - координата точки зупинки візка, T- момент зупинки. Тоді формалізована задача має вигляд:

$$T \to \inf$$

$$m\ddot{X} = u, u \in [u_1, u_2], X(0) = 0, \dot{X}(0) = v_0, X(T) = X_A, \dot{X}(T) = 0.$$

2. Задача про найбільшу горизонтальну дальність польоту ракети з обмеженим прискоренням. *Знайти керування тягою двигунів ракети, що максимізує горизонтальну дальність її польоту за умови, що значення тяги не може перевищувати деяку задану величину і пропорційна швидкості витрати маси палива.*

Формалізуємо дану задачу. Нехай траєкторія польоту ракети лежить в одній вертикальній площині. Позначимо $x(t), y(t)$ – декартові координати ракети в вибраній системі, вважаючи, що початок координат співпадає з початковим положенням ракети в нульовий момент часу, вісь OY направлена протилежно силі тяжіння, OX – перпендикулярна OY і направлена в сторону польоту ракети, v_1, v_2 – компоненти проекції вектора швидкості на осі координат $(v_1(t) = \dot{x}(t), \quad v_2(t) = \dot{y}(t))$, $m(t)$ – маса ракети з паливом, $u_1(t), u_2(t)$ – компоненти одиничного вектора тяги $(u_1(t) = \cos\alpha(t), \quad u_2(t) = \sin\alpha(t)$, де $\alpha(t)$ – кут між вектором тяги і віссю $OX)$, $u_3(t)$ – швидкість зменшення маси ракети $(\dot{m}(t) = -u_3(t))$.

Положення ракети в момент t описується вектором станів, або фазовим вектором $(x(t), y(t), v_1(t), v_2(t), m(t))$. Керуючий процес – вектор тяги двигуна $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$. Число C – коефіцієнт пропорційності величини тяги. Тоді знову, згідно другого закону Ньютона, будемо мати закон руху ракети:

$$\dot{x} = v_1(t); \quad \dot{y} = v_2(t); \quad \frac{d}{dt}(m(t) \cdot v_1(t)) = Cu_3 \cdot u_1;$$

$$\frac{d}{dt}(m(t) \cdot v_2(t)) = Cu_3 \cdot u_2 - mg; \quad \dot{m} = -u_3.$$

Обмеження на керування мають вигляд: $u_1^2 + u_2^2 = 1,\ 0 \le u_3 \le u_3^{\max}$. В початковий момент часу ракета була в положенні $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_{10},\ \dot{y}(0) = v_{20},\ m(0) = m_0$, а в кінцевий (фіксований) момент часу повинні виконуватись умови $y(t_1) = y_1,\ m(t_1) = m_1$ таким чином, щоб функціонал $I = \int\limits_0^{t_1} v_1(t)\,dt = X(t_1)$ досяг максимального значення.

Таким чином, формалізована задача має вигляд: серед всіх допустимих керувань, що задовольняють обмеження $u_1^2 + u_2^2 = 1$,

$0 \le u_3 \le u_3^{\max}$, знайти таке керування, рухаючись за яким по закону

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1(t) \\ \dot{y} = v_2(t) \\ \frac{d}{dt}\left(m(t) \cdot v_1(t)\right) = Cu_3 \cdot u_1 \\ \frac{d}{dt}\left(m(t) \cdot v_2(t)\right) = Cu_3 \cdot u_2 - mg \\ \dot{m} = -u_3 \end{cases}$$

з крайовими умовами $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_{10}$, $\dot{y}(0) = v_{20}$, $m(0) = m_0$, $y(t_1) = y_1$, $m(t_1) = m_1$, максимізувати функціонал

$$I = x(t_1) = \int_0^{t_1} v_1(t)\, dt \to \sup .$$

3. Задача про м'яку посадку космічного корабля на поверхню Місяця з мінімальними витратами пального. Для формулювання спрощеного варіанту цієї задачі введемо позначення: $m(t)$ – маса корабля, $h(t)$ – висота, $v(t)$ – вертикальна швидкість корабля над Місяцем (поблизу Місяця), а $u(t)$ – тяга двигуна корабля. Через M позначимо масу корабля без палива, h_0, v_0 – початкову висоту і вертикальну швидкість, F – початковий запас палива, через α – максимальну тягу, яку може розвинути двигун, через k – деяку сталу, а через g – гравітаційне прискорення Місяця.

Можна припустити, що g стала біля поверхні Місяця. Аналогічно попередній задачі, рівняння руху корабля мають наступний вигляд:

$$\dot{h} = v, \;\; \dot{v} = g + \frac{u}{m}, \;\; \dot{m} = -ku$$

(вісь координат ми направили в сторону, протилежну силі гравітації). В цій задачі сила тяги $u(t)$ двигуна корабля є керуванням, з обмеженням $0 \le u(t) \le \alpha$. Природно припустити, що початковий момент часу $t_0 = 0$, а кінцевий момент t_1 рівний моменту часу, в який корабель вперше досягає Місяця. Він буде знаходитися в процесі розв'язання задачі (спочатку невідомий). Крайові умови мають вигляд

$$h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad m(0) = M + F, \quad h(t_1) = 0, \quad v(t_1) = 0.$$

Дві останні умови – це умови м'якої посадки. Задача керування полягає в максимізації функціоналу $m(t_1) \to \sup$.

4. Модель Рамсея для односекторної економіки. Припускається, що темп росту виробництва $y(t)$ економіки і капітал $K(t)$ пов'язані за допомогою виробничої функції $y(t) = F(K(t))$. Норма споживання $c(t)$ пропорційна функції $G(K(t))$ капіталу з множником $u(t)$, тобто $c(t) = u(t)\,G(K(t))$ і $0 \le u(t) \le 1$. Тоді темп зміни капіталу рівний

$$\dot{K}(t) = F(K(t)) - u(t)\,G(K(t)). \tag{1.1}$$

Нехай $H(c)$ – функція корисності, яка представляє корисність системи при нормі споживання c. Критерій функціонування економічної системи задається інтегралом від функції корисності

$$\int_{t_0}^{t_1} H(u(t)\,G(K(t)))\,dt.$$

Задача полягає в знаходженні тієї частини $u(t)$, що використовується на споживання і при якій капітал, що задовольняє рівняння (1.1), змінюється від початкового значення $K(t_0) = K_0$ до бажаного значення $K(t_1) = K$, а інтеграл досягає максимуму.

5. Найпростіша задача варіаційного числення. Найпростішу задачу варіаційного числення можна переписати у вигляді задачі оптимального керування. А саме, введемо керування $\dot{x}(t) = u(t)$ і нову фазову змінну $y(t) = \int_{t_0}^{t} L(s, x(s), u(s))\,ds$. Тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = L(t, x, u) \end{cases}$$

з крайовими умовами $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_0) = 0$, керуванням $u \in \mathbb{R}^1$ і умовою мінімізації функціоналу

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\,dt = y(t_1) \to \inf.$$

Як видно з наведених прикладів функціонали, які досліджуються на екстремум, аналогічні функціоналам із класичного варіаційного числення, тобто є або функціоналами Лагранжа, або Больца, або Майєра. Одначе між задачами варіаційного числення і задачами оптимального керування є суттєва відмінність. В останніх керування приймає значення із замкнутої множини (приклади 1-4), тоді як в задачах варіаційного числення, керування (якщо його ввести), приймає значення з відкритої множини (приклад 5). Виявилося, що дана відмінність викликає принципові складності при розв'язуванні задач оптимального керування, методами класичного варіаційного числення дані задачі, взагалі кажучи, розв'язати не можливо. Останнє зумовило пошук нових методів їх розв'язання. На відміну від задач варіаційного числення, основні методи розв'язання яких були відомі ще в XVIII ст., задачі оптимального керування навчилися розв'язувати порівняно недавно, в 50-х роках минулого століття. На даний час є два отриманих майже одночасно методи розв'язання таких задач. Це принцип максимуму Понтрягіна, розроблений групою тоді ще радянських математиків під керівництвом Л.С. Понтрягіна, і метод динамічного програмування Р. Беллмана, отриманий групою американських математиків під керівництвом Р. Беллмана. Це два різних методи. Один з іншого, взагалі кажучи, не випливає. Якщо для керування детермінованими системами основним математичним апаратом є принцип максимуму Понтрягіна, то для стохастичних систем основним методом є метод динамічного програмування Беллмана. Розгляду цих двох методів і присвячений даний посібник.

Постановка задачі оптимального керування.

Основним елементом будь-якої задачі оптимального керування є керований об'єкт, еволюція якого в просторі $\mathbb{R}^n$ описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x, u), \tag{1.2}$$

де $t \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. При цьому вектор $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ називається вектором станів, або фазовим вектором. В систему (1.2) u

входить як параметр, який приймає свої значення в деякій замкненій підмножині $U \subset \mathbb{R}^m$.

Нехай V – множина кусково-неперервних функцій $u(t)$ зі значеннями в U, причому кожна функція $u(t)$ визначена на деякому інтервалі $[t_0, t_1]$, який може бути різним для різних елементів з V, в точках розриву функцію $u(t)$ будемо вважати неперервною зправа. Функцію $u(t)$, що належить V, назвемо керуванням. Відносно вектор-функції $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ будемо вважати, що вона задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші при всіх початкових даних, що будуть зустрічатися в задачі, як правило будемо вважати функцію f вимірною за сукупністю змінних і такою, що має неперервні похідні по x.

Таким чином, підставляючи замість u в (1.2) функції з V, будемо отримувати різні системи диференціальних рівнянь, а відтак, і різні закони еволюції об'єкту. Таким чином, через функцію $u(t)$ ми можемо керувати еволюцією.

Задача оптимізації – знайти таке керування, при якому виконуються деякі обмеження і мінімізується певний функціонал. Вигляд обмежень і функціоналів визначається умовами реальних задач.

Загальна постановка, яку ми будемо розглядати, наступна. В просторі $KC^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times KC(\Delta, U) \times \mathbb{R}^2$ розглядається задача:

$$B_0(x(t), u(t), t_0, t_1) \to \inf, \tag{1.3}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1.4}$$

$$u(t) \in V, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{1.5}$$

$$B_i(x(t), u(t), t_0, t_1) \le 0, \quad i = 1, \dots, m_0, \tag{1.6}$$

$$B_i(x(t), u(t), t_0, t_1) = 0, \quad i = m_0 + 1, \dots, m, \tag{1.7}$$

де $B_i(x(t), u(t), t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_i(t, x, u)\, dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$, $i = 0, 1, \dots, m$. Тут Δ – заданий скінчений відрізок, $t_0, t_1 \in \Delta$.

Означення 1.1. *Четвірка $\{x(t), u(t), t_0, t_1\}$ називається допустимим керованим процесом, якщо виконуються умови (1.4)-(1.7).*

Означення 1.2. *Допустимий керований процес $\{x(t), u(t), t_0, t_1\}$ називається оптимальним (локально), якщо*

$\exists\ \varepsilon > 0$ *таке, що для довільного допустимого керованого процесу* $\left\{\widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t), \widetilde{t_0}, \widetilde{t_1}\right\}$ *такого, що* $\left|t_k - \widetilde{t}_k\right| < \varepsilon, \quad k = 0, 1$ і $|x(t) - \widetilde{x}(t)| < \varepsilon$ *для всіх* $t \in [t_0, t_1] \cap \left[\widetilde{t_0}, \widetilde{t_1}\right]$ *виконується нерівність*

$$B_0\left(\widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t), \widetilde{t_0}, \widetilde{t_1}\right) \geq B_0\left(x(t), u(t), t_0, t_1\right).$$

Зауваження. Функціонали, розглянуті в задачі (1.3)-(1.7), є функціоналами типу Больца, тому по аналогії з варіаційним численням, таку задачу будемо називати задачею Больца. Якщо ж функціонали будуть містити лише інтегральні, або лише термінальні члени, то задачу відповідно назвемо задачею Лагранжа або Майєра. Але, на відміну від задач варіаційного числення, будь-яку задачу (1.3)-(1.7) можна звести до задачі Майєра шляхом розширення фазового простору. Дійсно, якщо до фазових координат $(x_1, \ldots, x_n)$ додати ще координати $x_0^i, (i = 0, ..., m)$, закон зміни яких має вигляд $\dot{x}_0^i = \varphi_i(t, x, u)$, то B_i будуть мати вигляд $B_i = x_0^i(t_1) + \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$, тобто стануть функціоналами типу Майєра. При цьому система диференціальних рівнянь розшириться і з'являться додатково обмеження $x_0^i(t_0) = 0, \quad i = 0, \ldots, m$.

Отож надалі, якщо не буде конкретно обумовлено, задачу оптимального керування будемо вважати задачею Майєра.

Розділ 1.
МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

§ 1.1. Принцип оптимальності Беллмана

Розглядається наступна задача оптимального керування

$$\begin{gathered}\varphi\left(T_1, x\left(T_1\right)\right) \to \inf, \\ \dot{x} = f\left(t, x\left(t\right), u\left(t\right)\right), T_0 \le t \le T_1, \\ x\left(T_0\right) = x_0, \left(T_1, x\left(T_1\right)\right) \in M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \\ u\left(t\right) \in U \subset \mathbb{R}^m, \forall t \in \left[T_0, T_1\right],\end{gathered} \tag{1.8}$$

де T_0 – фіксований момент часу, T_1 – нефіксований, що визначається моментом першого попадання точки $\left(T_1, x\left(T_1\right)\right)$ в замкнену множину M.

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб серед усіх допустимих керувань, які переводять точку з положення $\left(T_0, x_0\right)$ в множину M, знайти таке, при якому мінімізується функціонал φ.

Позначимо через $\Im_{s,y}$ множину допустимих керувань, що переводять систему з положення (s, y) в множину M.

Означення 1.3. *Функцію* $B\left(s, y\right) = \inf\limits_{u \in \Im_{s,y}} \varphi\left(T_1, x\left(T_1\right)\right)$ *називають функцією Беллмана задачі (1.8).*

Якщо $\Im_{s,y} = \varnothing$ то будемо вважати, що $B\left(s, y\right) = \infty$.

Виявляється, що знання функції Беллмана дозволяє розв'язати задачу (1.1). Звичайно, знайти її в явному вигляді досить складно, але можна встановити деякі її властивості, що дозволяє при певних умовах записати рівняння для її визначення.

Теорема 1.1 ***(властивості функції Беллмана).***

1. *Функція Беллмана задовольняє крайову умову*

$$B\left(s, y\right) = \varphi\left(s, y\right) \quad \text{при } \left(s, y\right) \in M.$$

2. *Якщо* $u\left(t\right) \in \Im_{T_0, x_0}$, *а* $x\left(t\right)$ *– інтегральна крива, яка відповідає даному керуванню, то функція Беллмана вздовж неї* $B\left(t, x\left(t\right)\right)$ *є неспадною на* $\left[T_0, T_1\right]$.

3. *Функція Беллмана вздовж оптимальної траєкторії стала.*

Доведення. Розглянемо довільні точки τ_1 і τ_2 такі, що $T_0 \le \tau_1 < \tau_2 \le T_1$. Для $\forall t \in [T_0, T_1]$ $\quad \Im_{t,x(t)} \ne \varnothing$. Побудуємо допустиме керування $\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), \tau_1 \le t \le \tau_2 \\ \widehat{u}(t), \tau_2 \le t \le \widetilde{T}_1 \end{cases}$, де $\widehat{u}(t) \in \Im_{\tau_2, x(\tau_2)}$. Тоді $B(\tau_1, x(\tau_1)) \le \varphi\left(\widetilde{T}_1, x\left(\widetilde{T}_1\right)\right)$ для довільного $\widehat{u}(t) \in \Im_{\tau_2, x(\tau_2)}$. Тому $B(\tau_1, x(\tau_1)) \le \inf\limits_{u \in \Im_{\tau_2, x(\tau_2)}} \varphi(T_1, x(T_1)) = B(\tau_2, x(\tau_2))$.

Тепер нехай $u^*(t) \in \Im_{T_0, x_0}$ – оптимальна на $[T_0, T_1^*]$, а $x^*(t)$ – відповідна інтегральна крива. Тоді $B(T_0, x_0) = \varphi(T_1^*, x^*(T_1^*))$.

З іншого боку, в силу властивостей 1) і 2), маємо $B(T_0, x_0) \le B(t, x^*(t)) \le B(T_1^*, x^*(T_1^*)) = \varphi(T_1^*, x^*(T_1^*))$. ■

Відзначимо, що дані властивості функції Беллмана є необхідними умовами оптимальності. Виникає питання, чи є вони і достатніми. Наступна теорема говорить, що відповідь на це питання позитивна.

<u>Теорема 1.2</u> (Беллмана).

Для того, щоб керування $u^*(t) \in \Im_{T_0, x_0}$ і відповідна інтегральна крива $x^*(t)$ були оптимальними, необхідно і достатньо існування функції $z(s, y) : \mathbb{R}^{n+1} \to \bar{\mathbb{R}}^1$ такої, що задовольняє умови:

1) $z(s, y) = \varphi(s, y)$ при $(s, y) \in M$;

2) *якщо* $u(t) \in \Im_{T_0, x_0}$, а $x(t)$ – *відповідна інтегральна крива, то* $z(t, x(t))$ *неспадна на* $[T_0, T_1]$;

3) $z(t, x^*(t)) = \mathrm{const}$ $\quad$ на $[T_0, T_1^*]$.

Доведення. Необхідність теореми очевидна. Доведемо достатність. В силу умов маємо, що, $z(T_0, x_0) \le \varphi(T_1, x(T_1))$ для довільного керування $u(t) \in \Im_{T_0, x_0}$. Для керування $u^*(t)$ справедлива рівність $z(T_0, x_0) = \varphi(T_1^*, x^*(T_1^*))$, що й доводить теорему. ■

<u>Наслідок 1.1</u> (принцип оптимальності Беллмана). *Якщо u^* – оптимальне керування з $\Im_{T_0, x_0}$, а x^* – відповідна інтегральна крива, то звуження керування u^* на $[t, T_1^*]$ є оптимальним керуванням будь-якої задачі керування з початковими даними $(t, x^*(t))$, де $T_0 \le t \le T_1$.*

Природно виникає питання, як перевірити, що деяка функція є неспадною вздовж кожної траєкторії із заданої множини траєкторій? Чи можна цю перевірку звести до перевірки меншого числа умов? Крім того виникає питання побудови класу функцій $z(s,y)$, якому належить функція Беллмана. Наступні результати дадуть відповідь на ці питання.

Спочатку припустимо, що функція Беллмана $B(t,x) \in C^1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ (в подальшому ми цю умову послабимо). Якщо $u(s) \in \Im_{t,x}$ (t,x – довільні точки), а $x(s)$ – відповідна траєкторія системи, то в силу властивостей функції Беллмана $B(s,x(s))$є неспадною, а оскільки $x(s)$ є кусково-гладкою, то

$$\frac{d}{ds}B(s,x(s)) \geq 0 \tag{1.9}$$

(в точках розриву похідної $\dot{x}(s)$ береться її правостороння похідна $\dot{x}(s) = f(s,x(s),u(s+)))$. З (1.9) отримуємо, що для $\forall s$

$$\frac{d}{ds}B(s,x(s)) = \frac{\partial B(s,x(s))}{\partial s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B(s,x(s))}{\partial x_i} f_i(s,x(s),u(s)) \geq 0.$$

При $s = t$ з останньої формули отримаємо, що

$$\frac{\partial B(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B(t,x)}{\partial x_i} f_i(s,x,u) \geq 0 \tag{1.10}$$

А оскільки на оптимальному керуванні функція Беллмана стала, то

$$\frac{d}{ds}B(s,x^*(s)) = 0. \tag{1.11}$$

З (1.10) і (1.11) випливає, що якщо в $\Im_{t,x}$ існує оптимальне керування, то функція $B(t,x)$ задовольняє нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних

$$\min_{u\in U}\left\{B_t + \sum_{i=1}^{n} B_{x_i} f_i(t,x,u)\right\} = 0, \tag{1.12}$$

причому мінімум в (1.12) досягається на правосторонній границі $u^*(t+)$ оптимального керування в момент часу t.

Рівняння (1.12) називається рівнянням Беллмана методу динамічного програмування.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1.3 ***(достатня умова оптимальності у формі методу динамічного програмування).***

Якщо $B(t,x) \in C^1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ *є розв'язком рівняння Беллмана таким, що* $B(s,y) = \varphi(s,y)$ *при* $(s,y) \in M$, *а* $u^*(t) \in \Im_{T_0,x_0}, x^*(t)$ *– відповідна траєкторія така, що*

$$B_t(t,x^*(t)) + \sum_{i=1}^{n} B_{x_i} f_i(t,x^*(t),u^*(t)) = 0,$$

то $u^*(t)$ *– оптимальне керування.*

Доведення даної теореми легко отримується з теореми Беллмана.

Приклад. *Знайти оптимальне керування через функцію Беллмана і записати рівняння Беллмана у вигляді, що не включає явно керування.*

$$\begin{aligned}
&T \to \inf \\
&\ddot{x} = u, \quad |u| \le 1 \\
&x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0
\end{aligned}$$

Розв'язок. Перейдемо від рівняння другого порядку до системи двох рівнянь, при цьому задача перепишеться у вигляді:

$$\begin{cases}
T \to \inf \\
\dot{x} = y \\
\dot{y} = u, \ |u| \le 1 \\
x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad x(T) = y(T) = 0
\end{cases}$$

Функція Беллмана буде залежати від трьох змінних $B(t,x,y)$.

Запишемо рівняння Беллмана: $\min\limits_{|u|\le 1}\left\{\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x}y + \frac{\partial B}{\partial y}u\right\} = 0$. Перших два доданки від u не залежать, тому маємо

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x}y + \min_{|u|\le 1}\frac{\partial B}{\partial y}u = 0.$$

Мінімум залежить від знаку $\frac{\partial B}{\partial y}$ (він досягається при $u = -1$, якщо $\frac{\partial B}{\partial y} < 0$ і при $u = 1$, якщо $\frac{\partial B}{\partial y} > 0$), тому рівняння набуде вигляду $\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x}y - \left|\frac{\partial B}{\partial y}\right| = 0$. Це і є рівняння Беллмана у формі, що явно не включає керування, а оптимальне керування через функцію Беллмана зображується у вигляді

$$u^* = \begin{cases} 1, & \frac{\partial B}{\partial y} \le 0 \\ -1, & \frac{\partial B}{\partial y} > 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши рівняння Беллмана, ми будемо мати явний вигляд функції Беллмана, а відтак вкажемо області в просторі $\mathbb{R}^3$ для яких виконуються нерівності для $\frac{\partial B}{\partial y}$, звідки для кожної точки простору $\mathbb{R}^3$ ми вкажемо оптимальне керування в цій точці, тобто отримаємо функцію

$$u^* = u^*\left(t, x, y\right) \tag{1.13}$$

– оптимальне керування у формі оберненого зв'язку (синтезу). Підставивши її в керовану систему і розв'язавши її, отримаємо, врахувавши крайові умови, оптимальну траєкторію $x^* = x^*\left(t\right)$, $y^* = y^*\left(t\right)$ і оптимальне керування, як функцію від t: $u^* = u^*\left(t, x^*\left(t\right), y^*\left(t\right)\right)$ – програмне оптимальне керування.

При цьому мінімальне значення функціоналу визначається з умов: $x^*\left(T\right) = 0, y^*\left(T\right) = 0$.

Відповідь: $u^* = \begin{cases} 1, \frac{\partial B}{\partial y} \le 0 \\ -1, \frac{\partial B}{\partial y} > 0 \end{cases}$ – оптимальне керування, де $B\left(t, x, y\right)$ – розв'язок рівняння Беллмана

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x}y - \left|\frac{\partial B}{\partial y}\right| = 0. \tag{1.14}$$

Зауваження. Як бачимо основна складність таких задач полягає у розв'язанні рівняння Беллмана. У розглянутому прикладі рівняння Белмана є нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних. Такі рівняння, взагалі кажучи, не розв'язуються. Однак, коли фазовий простір одномірний або задача має спеціальний вигляд, рівняння Беллмана інколи розв'язується. Тому деякі спеціальні класи задач можна в явному вигляді розв'язати методом динамічного програмування Беллмана.

§1.2. Рівняння Беллмана задачі оптимальної швидкодії

Нехай траєкторія руху керованого об'єкта в просторі $\mathbb{R}^n$ описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f\,(t, x, u)$$

де $t \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m$, з виконанням для них умов загальної постановки задачі оптимального керування .

Задача оптимальної швидкодії полягає в тому, щоб визначити керування $u\,(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, яке переводить керований об'єкт з початкового положення x_0 в момент часу t_0 в положення x_1 за найменший час. Тобто розглядається наступна задача оптимального керування:

$$\begin{aligned} & T - t_0 \to \inf, \\ & \dot{x} = f\,(t, x, u)\,, \\ & x\,(t_0) = x_0, x\,(T) = x_1, \\ & u \in U \subset \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{1.15}$$

В припущенні гладкості функції Беллмана, виведемо рівняння Беллмана для даної задачі.

Для такої задачі рівняння Беллмана (1.12) можна дещо спростити враховуючи те, що функція Беллмана в даному випадку означає мінімальний час переходу системи з положення (t_0, x_0) в точку (T, x_1). Позначимо через $B_1(x(\tau))$ – мінімальний час переходу системи з положення $x(\tau)$ (в якому вона знаходилася в момент τ) в положення x_1. Тоді система, що знаходилась спочатку в положенні (t_0, x_0), затратила час τ, щоб попасти в $(\tau, x(\tau))$, а далі затратила час $B_1(x(\tau))$, щоб попасти в положення x_1. Отже сумарний мінімальний час переходу з x_0 в x_1 рівний $\tau + B_1(x(\tau))$. Таким чином, функція Беллмана задачі (1.15) має вигляд $B\,(t, x) = t + B_1\,(x) - t_0$, а рівняння Беллмана (1.12) набуває вигляду

$$\min_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} B_{x_i} f_i\,(t, x, u) = -1. \tag{1.16}$$

В одновимірному випадку, коли диференціальне рівняння лінійне, задачу (1.15) можна розв'язати, що ілюструє наступний приклад.

Приклад. *Розв'язати задачу оптимальної швидкодії на прямій:*

$$
\begin{aligned}
&T \to \inf,\\
&\dot{x} = ax + u, \quad a > 0,\\
&x(0) = x_0, \quad x(T) = 0,\\
&|u| \le 1.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Розв'язок. Складемо рівняння Беллмана $\min\limits_{|u|\le 1}\left[B'(x)(ax+u)\right] = -1$ з початковою умовою $B(0) = 0$. Дане рівняння переписується у вигляді $axB'(x) - |B'(x)| = -1$. Оптимальне керування визначається співвідношенням $u^* = \begin{cases} 1, & B'(x) < 0 \\ -1, & B'(x) > 0 \end{cases}$.

Оскільки функція Беллмана $B(x)$ – це мінімальний час переходу з точки x в точку 0, то функція $B(x) > 0$, $x \ne 0$. Очевидно, що вона монотонно зростає при $x > 0$ і спадає при $x < 0$. Отже, $B'(x) > 0$ при $x > 0$ і $B'(x) < 0$ при $x < 0$. Тому рівняння Беллмана можна записати у вигляді

$$B'(x)[ax-1] = -1, x > 0; \quad B'(x)[ax+1] = -1, x < 0.$$

Звідки $B(x)$, з урахуванням початкової умови, має вигляд

$$B(x) = -\frac{1}{a}\ln(1 - a|x|), \quad |x| < \frac{1}{a} \tag{1.18}$$

Оптимальне керування має вигляд $u^*(t,x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$.
Оптимальну траєкторію визначаємо з рівняння $\dot{x} = ax - \operatorname{sign} x, x(0) = x_0$, а мінімальне значення функціоналу визначимо або з умови $x^*(T) = 0$, або безпосередньо з означення функції Беллмана: $B(x_0) = -\frac{1}{a}\ln(1 - a|x_0|)$.

Зауваження. Як видно з (1.18), задача (1.17) розв'язується методом функції Беллмана не для всіх x_0. Останнє пов'язане з тим, що гладкої функції Беллмана для задачі оптимального керування може і не існувати.

§1.3. Задача аналітичного конструювання лінійного регулятора

Наступна задача оптимального керування має важливе практичне значення, оскільки використовується в техніці при розв'язанні багатьох задач конструювання. Вона має вигляд

$$
\begin{aligned}
&J = (Dx\,(T_1)\,, x\,(T_1)) + \int\limits_{T_0}^{T_1} [(F\,(t)\,x, x) + (E\,(t)\,u, u)]\,dt \to \inf \\
&\dot{x} = A\,(t)\,x + B\,(t)\,u.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Кінці відрізка T_0 і T_1 фіксовані, лівий кінець закріплений $x\,(T_0) = x_0$, правий кінець вільний $x\,(T_1) \in \mathbb{R}^n$, обмежень на керування немає – $u \in \mathbb{R}^m$.

Матриці D і $F(t)$ – $n \times n$-мірні, симетричні, невід'ємно визначені, $E(t)$ – $m \times m$-мірна, симетрична, додатно визначена матриця, $A(t)$ – $n \times n$-мірна матриця, $B(t)$ – $n \times m$-мірна матриця. Будемо вважати, що компоненти цих матриць – неперервні на $[T_0, T_1]$ функції.

Така задача характерна тим, що рівняння Беллмана для неї зводиться до матричного рівняння Ріккаті.

Розв'яжемо цю задачу. Функціонал, який мінімізується, є функціоналом Больца. Зведемо його до функціоналу Майєра. Для цього введемо ще одну фазову змінну x_0 наступним чином

$$
\begin{aligned}
&x_0 = x_0(t) = \int\limits_{T_0}^{t} ((F(s)x(s), x(s)) + (E(s)u(s), u(s)))\,ds, \\
&x_0(T_0) = 0.
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Тоді розширений фазовий вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, а функціонал набуває вигляду

$$J = (Dx(T_1), x(T_1)) + x_0(T_1) =: \varphi(\bar{x}(T_1)).$$

Будемо шукати функцію Беллмана даної задачі у вигляді

$$B(t, \bar{x}) = x_0 - (S(t)x, x), \tag{1.21}$$

де $S(t)$ – диференційовна на $[T_0, T_1]$, $n\times n$-мірна, симетрична матриця і така, що $S(T_1) = -D$. Для такої функції $B(t, \bar{x})$ рівняння Беллмана (1.12) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}&\min_{u\in\mathbb{R}^m}\{-(\dot{S}(t)x, x) + (F(t)x, x) + (E(t)u, u)-\\&-((S(t) + S^T(t))x, A(t)x + B(t)u)\} = 0\,.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Похідна Фреше по змінній u виразу в дужках дорівнює $2E(t)u - 2B^T(t)S(t)x$, отже, мінімум в (1.22) досягається при

$$u = E^{-1}(t)B^T(t)S(t)x, \tag{1.23}$$

де матриця $S(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases}\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t) + S(t)B(t)E^{-1}(t)B^T(t)S(t) = F(t);\\ S(T_1) = -D.\end{cases} \tag{1.24}$$

Оскільки при транспонуванні (1.24) отримаємо ту саму задачу для $S^T(t)$, то, в силу єдиності розв'язку задачі Коші для (1.24), остаточно маємо теорему.

Теорема 1.4. *Якщо існує розв'язок задачі Коші (1.24), що визначений на проміжку* $[T_0, T_1]$, *то задача (1.19) має розв'язок, причому оптимальне керування у формі оберненого зв'язку задається формулою (1.23). При цьому функція Беллмана* $B(t, \bar{x}) \in C^1$ *і задається формулою (1.21).*

Рівняння (1.24) є матричним рівнянням Ріккаті. Отже, рівняння Беллмана в задачі (1.19) ми звели до системи звичайних диференціальних рівнянь Ріккаті.

Для знаходження оптимальної траєкторії отримується задача Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = \big(A(t) + B(t)E^{-1}(t)B^T(t)S(t)\big)\,x(t);\\ x(T_0) = x_0.\end{cases} \tag{1.25}$$

Приклад. *Розв'язати задачу оптимального керування:*

$$\begin{cases} J = \int\limits_0^1 u^2(t)dt + x^2(1) \to \inf, \\ \dot{x}(t) = u(t),\ t \in [0,1], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Розв'язок. Дана задача – типу (1.19) з $D = 1$, $F = 0$, $E = 1$, $A = 0$, $B = 1$.

Задача (1.24) для (1.26) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{S}(t) + S^2(t) = 0 \\ S(1) = -1 \end{cases},$$

тому

$$S(t) = \frac{1}{t-2}$$

і оптимальне керування у формі оберненого зв'язку задачі (1.26) набирає вигляду

$$u^*(t, x^*(t)) = \frac{x^*(t)}{t-2},$$

де оптимальне керування $x^*(t)$ визначається як розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t-2} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Тоді

$$x^*(t) = -\frac{x_0}{2}(t-2)$$

і програмне оптимальне керування задачі (1.26) має вигляд

$$u^*(t) = -\frac{x_0}{2}$$

При цьому мінімальне значення функціоналу дорівнює

$$J_* = \frac{x_0^2}{2}$$

Зауваження. Відмова від невід'ємної визначеності матриць в (1.19) може призвести до того, що рівняння Ріккаті може і не мати розв'язків на $[T_0, T_1]$.

Приклад. $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-x^2(t) + u^2(t)\right) dt \to \inf$, $\dot{x}(t) = u(t)$, $x(0) = 0$.

Тут

$$D = 0,\ F = -1,\ E = 1,\ A = 0,\ B = 1.$$

Рівняння Ріккаті має вигляд:

$$\dot{S}(t) + S^2(t) = -1$$

і його розв'язок

$$S(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

не визначений в нулі.

Виявляється, що задача про лінійний регулятор в постановці (1.19) завжди має розв'язок. А саме, має місце теорема.

Теорема 1.5. *Якщо матриці D і $F(t)$ невід'ємно визначені, а матриця $E(t)$ додатно визначена, то існує розв'язок рівняння Ріккаті (1.24), визначений на $(-\infty, T_1]$, що задовольняє умову $S(T_1) = -D$.*

Доведення. Згідно відомих теорем з диференціальних рівнянь (наприклад, Пеано) рівняння (1.24) з умовою $S(T_1) = -D$ має розв'язок на інтервалі $\tau < t < T_1$, де τ – момент виходу $S(t)$ в нескінченність (тобто $S(t)$ необмежена в $\mathbb{R}^{n^2}$). Теорема буде доведена, якщо ми покажемо, що $S(t)$ визначена на довільному $[\tau, T_1]$, буде лежати в обмеженій множині з $\mathbb{R}^{n^2}$.

Маємо, що $B(t, \bar{x})$ – мінімальне значення функціоналу з початковою умовою $\bar{x}$ на довільному інтервалі $[T_0, T_1]$, де $S(t)$ існує. Якщо $x_0 = 0$, то

$$B(t, \bar{x}) = (-S(t)x, x). \tag{1.27}$$

Ця функція дає інфімум в задачі (1.19). Із невід'ємної визначеності D, $F(t)$, $E(t)$ випливає, що нижня границя для (1.27) рівна нулю. При $u \equiv 0$ значення критерію для (1.19) дає верхню границю функціоналу, а значить, і верхню границю для квадратичної форми. Отже, $S(t)$ обмежена на кожному скінченому інтервалі. Теорема доведена. ■

§1.4. Про диференційовність функції Беллмана

У попередньому параграфі сформульовані достатні умови оптимальності. Однак, при отриманні цих результатів ми припускали існування гладкого розв'язку $B(t, x)$ рівняння динамічного програмування. Нажаль, ця умова на B досить жорстка. Як буде показано нижче, наприклад, для задачі оптимальної швидкодії на площині, вона не виконується.

Раніше ми вже згадували про керування з оберненим зв'язком, або у формі оберненого зв'язку. Зараз дамо його строге означення. Позначимо $Q = \left\{(s, y) \subset \mathbb{R}^{n+1} : F_{sy} \neq 0\right\}$. Таку множину назвемо множиною досягнення.

Означення 1.4. *Скажемо, що функція $u = u(t, x)$ з $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в U є керуванням з оберненим зв'язком, якщо для кожної точки $(s, y) \in Q$ існує єдиний розв'язок диференціального рівняння*

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)) \tag{1.28}$$

на інтервалі $s \leq t \leq T_1(s, y)$ з початковою умовою $x(s, s, y) = y$, причому $(t, x(t, s, y)) \in Q$ при $s \leq t \leq T_1(s, y)$ і $(T_1(s, y), x(T_1(s, y), s, y)) \in M$.

Якщо керування $u^*(t, x)$ – оптимальне, то $B(s, y) = \varphi(T_1(s, y), x^*(T_1(s, y), s, y))$ тому, якщо φ гладка функція, то питання про диференційовність функції Беллмана зводиться до питання про диференційовність кінцевого моменту часу T_1 і кінцевого стану $x(T_1)$ як функцій від початкових значень траєкторії. Отже, має місце теорема.

Теорема 1.6. *Якщо існує оптимальне керування у формі оберненого зв'язку $u^*(t, x)$ і $T_1(s, y)$ і $x(T_1(s, y), s, y)$ – кінцевий момент часу і кінцевий стан для траєкторії рівняння*

$$\dot{x} = f(t, x, u^*(t, x))$$

з початковими значеннями (s, y), *то функція Беллмана диференційовна в кожній точці, в якій* $T_1(s, y)$ *і* $x(T_1(s, y), s, y)$ *є диференційовними функціями від* (s, y).

Якщо $u^*(t, x)$ є неперервною функцією, то в силу відомих теорем про диференційовність розв'язків диференціальних рівнянь за початковими даними $T_1(s, y)$ і $x(T_1(s, y), s, y)$ будуть гладкими функціями, а отже, і функція Беллмана – гладка.

Одначе в багатьох прикладних задачах оптимальне керування з оберненим зв'язком може мати розриви (наприклад, в задачі швидкодії). Тоді класичні теореми про залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметрів не діють, а тому цей випадок потребує детального окремого розгляду.

Ідея дослідження в цьому випадку полягає в тому, що припускається існування розбиття множини Q із означення на скінчену кількість гладких підмножин і точки розриву керування $u(t, x)$ є граничними точками цих підмножин. При виконанні певних умов, розв'язки рівняння (1.28) для майже всіх початкових даних з околу точки x_0 будуть визначенні на кожній з таких підмножин і їх можна неперервно продовжити від підмножини до підмножини до тих пір, поки вони не досягнуть множини M. При цьому розв'язки перетинаються з множиною розривів керування не більше ніж у скінченій кількості точок. Із сказаного вище випливає, що функція Беллмана є майже всюди диференційовною і рівняння Беллмана можна розуміти як таке, що справедливе майже всюди відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ясно, що реалізація вказаної вище ідеї накладає досить жорсткі вимоги на постановку задачі оптимального керування, які багато прикладних задач не дозволяють. Однак, інша ідея розв'язування оптимізаційних задач, що ґрунтується на інших принципах, не пов'язаних з функцією $B(t, x)$, дозволяє розв'язувати такі задачі навіть при недиференційовності функції Беллмана. Такий підхід і становить суть принципу максимуму Понтрягіна, до розгляду якого ми й перейдемо в наступному параграфі.

Задачі до розділу 1.

Виразити оптимальне керування через функцію Беллмана та записати рівняння Беллмана у вигляді, що не залежить від керування.

1. $T \to \inf,\ \ddot{x} = u,\ |u| \leq 2,$
$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad x(T) = x'(T) = 0.$

2. $T \to \inf, \quad \ddot{x} = u, \quad \int\limits_0^T u^2(t)dt = 1,$
$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad x(T) = x'(T) = 0.$

3. $J = \frac{1}{2}\int\limits_0^T u^2\,(t)\,dt + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf, \quad \dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = x_0.$

4. $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))dt \to \inf, \quad |u| \leq 1,$
$\dot{x}_1 = x_1 u + x_2, \quad \dot{x}_2 = u^2, \quad x_1(t_0) = x_0, \quad x_2(t_0) = x_1.$

5. $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))dt \to \inf, |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1,$
$\dot{x}_1 = x_1 u + x_2, \quad \dot{x}_2 = u^2, \quad x_1(t_0) = x_0, \quad x_2(t_0) = x_1.$

6. $J = -\int\limits_{t_0}^{t_1} ((x(t) - c)^2 + u^2(t))dt \to \sup,$
$\dot{x} = ax + bu, \quad x\,(t_0) = x_0, \quad x\,(t_1) = x_1.$

7. $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))dt \to \inf, \quad \dot{x}_1 = x_1 u, \quad \dot{x}_2 = u^2,$
$x_1(t_1) + x_2(t_0) = 0, \quad x_1(t_0) = x_0.$

Розв'язати задачі оптимального керування.

8. $J = \int\limits_0^T (u^2(t)dt + \lambda x^2(T))dt \to \inf, \quad \lambda > 0, \quad \dot{x} = u,\ x(0) = x_0.$

9. $J = \int\limits_1^2 \left(tx^2(t) + \frac{u^2(t)}{t}\right)dt \to \inf, \quad \dot{x} = u,\ x(1) = x_0.$

10. $J = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (x(t)\,\mathrm{tg}(t) + u(t)\,\mathrm{ctg}(t))dt \to \inf, \quad \dot{x} = u,\ x(\frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}.$

11. $J = \int\limits_0^{\pi} (u^2\,(t)\,dt + \dot{x}^2(\pi))dt \to \inf, \quad \ddot{x} - x = u,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$

12. $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(t)dt \to \inf, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0,\, \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = 1.$

13. $J = \int\limits_0^1 \left[x^2(t) + u^2(t)\right]dt \to \inf, \quad \dot{x} = x + u,\, x(1) = 1.$

14. Нехай для задачі (1.8) $f(t,x,u) = f(x,u)$, $\varphi(t,x) = \varphi(x)$ і $M = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}^1,\ x \in \overline{M} \subset \mathbb{R}^n\}$. Показати, що в цьому випадку функція $B(t,x)$ стала по t, а отже, може бути записана у вигляді $B(x)$.

15. У найпростішій задачі варіаційного числення розглянемо мінімум функціоналу, як функцію від початкових значень $s = t_0$, $y = x_0$. Нехай правий кінець (t_1, x_1) закріплений і $\aleph_{sy}$ – клас кусково гладких функцій $x(t)$, визначених на $[s, t_1]$, що задовольняють умови $x(s) = y$, $x(t_1) = x_1$. Нехай $B(s,y) = \inf\limits_{\aleph_{s,y}} \int\limits_s^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t))dt.$ Показати, що рівняння динамічного програмування має вигляд

$$B_s(s,y) + \min_u \{L(y,u) + uB_y(s,y)\} = 0, \qquad (a)$$

і для оптимальної траєкторії $x(t)$ із $\aleph_{sy}$ маємо

$$B_s(t, x(t)) + L(x(t), \dot{x}(t)) + \dot{x}(t)B_y(t, x(t)) = 0, \qquad (b)$$

Показати, що якщо $B \in C^2$, то з (a) і (b) випливає, що $x(t)$ задовольняє рівняння Ейлера $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = L_x$.

16. Нехай $\dot{x} = u$, $U = \{|u| \leq 1\}$, а задача полягає у переході із стану $x(0) = y$ на множину $\overline{M} \subset \mathbb{R}^n$ за мінімальний час.

а) Покажіть, що автономне рівняння динамічного програмування має вигляд $|B_y(y)| = 1$, де $B_y(y)$ – градієнт.

б) Знайти мінімальний час переходу $B(y_1, y_2)$ при $n = 2$, $y = (y_1, y_2)$ і $\overline{M} = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$. Де порушується диференційовність функції $B(y_1, y_2)$?

в) Нехай $\overline{M}$ складається з двох паралельних прямих в $\mathbb{R}^2$. Де порушується диференційовність функції $B(y_1, y_2)$?

Розділ 2.
ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА

§ 2.1. Задача Майєра

Будемо розглядати наступну задачу оптимального керування:

$$\Phi_0(x(T_0), x(T_1), T_1) \to \inf,$$

$$\Phi_i(x(T_0), x(T_1), T_1) \le 0 \quad i = \overline{1, m}, \tag{2.1}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad T_0 \le t \le T_1,$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^k, \quad \forall t \in [T_0, T_1] \quad , \quad u \in KC\left([T_0, T_1]\right),$$

де T_0 – фіксований момент часу, T_1 – нефіксований, функції Φ_i $\left(i = \overline{0, m}\right)$ будемо вважати неперервно диференційовними за своїми змінними. Функції f, f_x кусково-неперервні по t при фіксованому x і неперервні по x при фіксованому t.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1 ***(принцип максимуму Понтрягіна).***

Для того, щоб допустимий процес $\{T_1, u(t), x(t)\}$ був оптимальним, необхідно існування множників Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ і вектора $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))^T$ – розв'язку спряженої системи

$$\dot{\Psi} = -\left(\frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial x}\right)^T \Psi \tag{2.2}$$

таких, що виконуються умови:

1) $\lambda_i \ge 0, \quad i = \overline{0, m}$, *серед них хоча б одне не нульове;*

2) *доповнюючої нежорсткості:*

$$\lambda_i \Phi_i(x(T_0), x(T_1), T_1) = 0, \quad i = \overline{1, m};$$

3) *умова максимуму:*

$$\max_{v\in U} H(t,\Psi(t),x(t),v) = H(t,\Psi(t),x(t),u(t)), \quad \forall t\in[T_0,T_1],$$

де $H(t,\Psi(t),x(t),v) = (\Psi(t), f(t,x(t),v)) = \sum\limits_{i=1}^{n}(\Psi_i(t) f_i(t,x(t),v))$ *– функція Понтрягіна;*

4) *умови трансверсальності:*

$$\Psi(T_0) = L_{x0}(\lambda, x(T_0), x(T_1), T_1),$$

$$\Psi(T_1) = -L_{x_1}(\lambda, x(T_0), x(T_1), T_1),$$

де $L = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \Phi_i$ *– функція Лагранжа,* $L_{x_0} = \frac{\partial L}{\partial x(T_0)}$, $L_{x_1} = \frac{\partial L}{\partial x(T_1)}$ *– вектори;*

5) *умова оптимальності закінчення процесу*

$$(L_{x_1}(\lambda, x(T_0), x(T_1), T_1), f(T_1, x(T_1), u(T_1)) + L_{T_1}(\lambda, x(T_0), x(T_1), T_1) = 0,$$

$$L_{T_1} = \frac{\partial L}{\partial T_1}.$$

Доведення. Нехай $\{T_1, u(t), x(t)\}$ – оптимальний процес. Зануримо цей процес в параметричну сім'ю допустимих процесів $\left\{\widetilde{T}, \widetilde{u}(t), \widetilde{x}(t)\right\}$. Для цього візьмемо довільне $\varepsilon \geq 0$ і розглянемо $\widetilde{T}_1$ таке, що $\left|\widetilde{T}_1 - T_1\right| < \varepsilon$. Керування $\widetilde{u}(t)$ будуємо наступним чином:

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} v, & \tau-\varepsilon \leq t \leq \tau \\ u(t), & \textit{для решти } t \end{cases},$$

де v – довільний вектор з U, τ – точка неперервності $u(t)$. Пара (τ, v) називається елементарною голкою.

Нехай $\widetilde{x}(t)$ – розв'язок на $\left[T_0, \widetilde{T}_1\right]$ задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}} = f(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t)) \\ \widetilde{x}(T_0) = \widetilde{x}_0 \end{cases}, \tag{2.3}$$

де $|\widetilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon$.

Використовуючи теореми про неперервну диференційовність розв'язку (2.3) за початковими даними і параметрами, можна показати, що $\widetilde{x}(t, T_0, \widetilde{x}_0, \widetilde{T}_1, \varepsilon)$є гладкою функцією своїх змінних в деякому околі точки $(x_0, T_1, 0)$ при $t \in \left[T_0, \widetilde{T}_1\right]$.

Оскільки функції Φ_i – гладкі за своїми змінними, то тепер розглянемо гладку скінченовимірну екстремальну задачу

$$\begin{cases} \widetilde{\Phi}_0(\widetilde{x}_0, \widetilde{T}_1, \varepsilon) = \Phi_0(\widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(\widetilde{T}_1), \widetilde{T}_1) \to \inf, \\ \widetilde{\Phi}_i(\widetilde{x}_0, \widetilde{T}_1, \varepsilon) = \Phi_i(\widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(\widetilde{T}_1), \widetilde{T}) \leq 0, \ \ i = \overline{1, m}, \\ \varepsilon \geq 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

в якої $(x_0, T_1, 0)$ – розв'язок.

Застосуємо до неї правило множників Лагранжа. Функція Лагранжа має вигляд

$$\Lambda = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widetilde{\Phi}_i - \mu\varepsilon = L - \mu\varepsilon. \tag{2.5}$$

Тоді існують множники Лагранжа $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{0, m}$, $\mu \geq 0$, не всі нулі, такі, що:

1) $\lambda_i \Phi_i(x(T_0), x(T_1), T_1) = 0$, $i = \overline{1, m}$, (отже, виконана умова 2) теореми);

2) для функції Лагранжа виконуються умови

$$\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \widetilde{T}_1}\right|_{\widetilde{T}_1 = T_1} = 0, \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \widetilde{x}_0}\right|_{\widetilde{x}_0 = x_0} = 0, \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} = 0. \tag{2.8}$$

Розшифруємо умови (2.6) - (2.8):

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\widetilde{T}_1}=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\frac{\partial\widetilde{\Phi}_i}{\partial\widetilde{T}_1}=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\left[\frac{\partial\widetilde{\Phi}_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\widetilde{T}_1}+\frac{\partial\widetilde{\Phi}_i}{\partial\widetilde{T}_1}\right]=$$
$$=L_{T_1}(\lambda,x(T_0),x(T_1),T_1)+(L_{x_1},f(T_1,x(T_1),u(T_1)))=0,$$

отже, виконана умова 3) теореми.

Позначимо через $\Psi(t)$ розв'язок спряженої системи з початковими даними

$$\begin{cases}\dot{\Psi}=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T\Psi\\ \Psi(T_1)=-L_{x_1}\end{cases},\quad \text{де } X_*(t,T) \text{ – її матрицант.}$$

Обчислимо $\frac{\partial\Lambda}{\partial\widetilde{x}_0}$:

$$\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\widetilde{x}_0}\right|_{\widetilde{x}_0=x_0}=L_{x_0}+L_{\widetilde{x}_1}\frac{\partial\widetilde{x}(T_1)}{\partial\widetilde{x}_0}=L_{x_0}+X^T(T_1,T_0)L_{\widetilde{x}_1}\big|_{\widetilde{x}_0=x_0}=0,$$

де $X(t,s)$ – матрицант системи у варіаціях для розв'язку $\widetilde{x}(t,\ T_0,x_0)$.

Оскільки матриціанти спряжених систем зв'язані співвідношенням $X_*(t,s)=X^T(s,t)$, то з останньої рівності отримаємо: $L_{x_0}-\Psi(T_0)=0$. Таким чином, виконані умови трансверсальності.

Розпишемо умову (2.8):

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\left.\left(L_{x_1},\frac{\partial\widetilde{x}(T_0,x_0,t)}{\partial\varepsilon}\right)\right|_{\varepsilon=0}-\mu=\\&=(L_{x_1},X(T_1,\tau)(f(\tau,x(\tau),v)-f(\tau,x(\tau),u(\tau)))-\mu=\\&=(L_{x_1},X(T_1,\tau)\Delta f(\tau))-\mu=0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Вигляд частинної похідної від розв'язку за параметром, використаний в написаних вище викладках, випливає з двох основних теорем теорії звичайних диференціальних рівнянь: локальної теореми існування і єдиності і теореми про неперервну диференційовність розв'язку за початковими даними і параметром.

З (2.9) випливає, що якщо $\lambda_i=0$, то і $\mu=0$, що неможливо. А отже, хоча б одне $\lambda_i\neq 0$. З (2.9) отримаємо також:

$(X^*(T_1,\tau)L_{x_1}, \Delta f(\tau)) = \mu \geq 0$, або $(\Psi(\tau), \Delta f(\tau)) \leq 0$, що в термінах функції Понтрягіна означає виконання нерівності

$$H\left(\tau, \Psi(\tau), x(\tau), v\right) \leq H\left(\tau, \Psi(\tau), x(\tau), u(\tau)\right). \tag{2.10}$$

Останнє означає виконання умови 3) теореми в точці нерівності керування $u(\tau)$.

Таким чином, доведено існування множників Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ з виконанням умов 1)-5) теореми. Але отримані множники, взагалі кажучи, залежать від елементарної голки (τ, v), тобто $\lambda = \lambda(\tau, v)$, умова максимуму 3) виконується лише для даного τ, хоча теорема стверджує існування "універсальних" множників Лагранжа, з виконанням умови 3) для $\forall \tau \in [T_0, T_1]$. Становище виправляє відомий топологічний факт, який називається лемою про центровану систему компактів.

<u>Лема 2.1.</u> *Нехай K – компакт, $\{K_\alpha\}$ – система замкнутих підмножин K така, що будь-яка її скінчена підсистема має непорожній перетин (центрована система). Тоді перетин всіх множин системи $\{K_\alpha\}$ непорожній.*

Тепер замість однієї голки (τ, v) розглянемо довільний скінчений набір голок "пакет" (τ_k, v_k) і ε_k, $k = \overline{1,p}$, де ε_k – вибрані так, що інтервали $[\tau_k - \varepsilon_k, \tau_k]$ не перетинаються. Проводячі аналогічні викладки, можна переконатися у справедливості теореми для даного «пакету». Тобто, існують множники Лагранжа, універсальні для кожного «пакету». Множенням на додатну сталу можна нормувати вектор λ так, що $|\lambda| = 1$.

Розглянемо у просторі $\mathbb{R}^{m+1}$ підмножини $K(\tau, v)$, $\tau \in [T_0, T_1]$, $v \in U$, компактної сфери $S = \{\lambda \mid \ |\lambda| = 1\}$, які складаються з тих векторів λ, для яких виконуються умови теореми. З означення множин $K(\tau, v)$ неважко вивести, що вони замкнуті. В силу вище сказаного, будь-який скінчений перетин множин $K(\tau_k, v_k)$ непорожній. Тоді за лемою про центровану систему компактів всі множини $K(\tau, v)$ мають непорожній перетин. А тому існує ненульовий вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, такий що виконані твердження теореми з умовою оптимальності, яка виконується для довільних $\tau \in [T_0, T_1]$ і $v \in U$, де τ – точка неперервності керування $u(t)$.

Якщо ж θ – точка розриву $u(t)$, то, взявши збіжну до θ послідовність точок неперервності τ_n зправа, отримаємо $H(\tau_n, \Psi(\tau_n), x(\tau_n), v) \le H(\tau_n, \psi(\tau_n), x(\tau_n), u(\tau_n))$, звідки граничним переходом і отримаємо умову максимуму в точці θ. Теорема доведена. ■

Зауваження. Інколи задачу оптимального керування розглядають у незведеному до термінального вигляді. А саме:

$$B_0(x,u,t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt + \Psi_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) \to \inf$$

$$x' = \varphi(t,x,u), t \in T;$$

$$B_i(x,u,t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),u(t))dt + \Psi_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) = 0,\ i = \overline{1,m},$$

$$B_j(x,u,t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_j(t,x(t),u(t))dt + \Psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) \le 0,$$

$$j = \overline{m+1,s}; \quad u \in U.$$

В цьому випадку принцип максимуму має наступний вигляд.

Теорема 2.2. *Для того, щоб допустимий процес* $\{t, u(t), x(t)\}$ *був оптимальним, необхідне існування множників Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, *що не рівні нулю одночасно, і вектора* $p(t)$ *таких, що виконуються умови:*

1) $\lambda_i \ge 0, \quad i = \overline{m+1,s};$

2) *стаціонарність по* x *– рівняння Ейлера-Лагранжа*

$$L_x = \frac{d}{dt}L_{x'} \quad \Leftrightarrow \quad p' = f_x - p\varphi_x$$

де $L = \sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i f_i + p(t)(x' - \varphi(t,x,u))$, *а* $f = \sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i f_i$;

3) *трансверсальність по* x :

$$L_{x'}(t_0) = l_{x_0} \quad \Leftrightarrow \quad p(t_0) = l_{x_0};$$

$$L_{x'}(t_1) = -l_{x_1} \quad \Leftrightarrow \quad p(t_1) = -l_{x_1}; \quad \text{де} \quad l = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \Psi_i;$$

4) *оптимальність по* u *– принцип мінімуму в Лагранжевій формі:*

$$\begin{aligned}
&\min_{v \in U} L(t, x(t), x'(t), v) = L(t, x(t), x'(t), u(t)) \Leftrightarrow \\
&\min_{v \in U} \left[f(t, x(t), v) - p(t)\varphi(t, x(t), v) \right] = \\
&= f(t, x(t), u(t)) - p(t)\varphi(t, x(t), u(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1],
\end{aligned}$$

або принцип максимуму в формі Понтрягіна (Гамільтона)

$$\begin{aligned}
&\max_{v \in U} H(t, x(t), v, p(t)) = H(t, x(t), u(t), p(t)) \quad \Leftrightarrow \\
&\max_{v \in U} \left[p(t)\varphi(t, x(t), v) - f(t, x(t), v) \right] = \\
&= p(t)\varphi(t, x(t), u(t)) - f(t, x(t), u(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1];
\end{aligned}$$

де $H = p(t)\varphi(t, x, u) - \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i f_i(t, x, u)$ *- функція Понтрягіна;*

5) *стаціонарність по* t_0, t_1 *(виписується для рухомих кінців):*

$$-f(t_0) + l_{t_0} + l_{x_0} x'(t_0) = 0$$

$$f(t_1) + l_{t_1} + l_{x_1} x'(t_1) = 0;$$

6) *доповнююча нежорсткість:*

$$\lambda_i B_i(x(t), u(t), t_0, t_1) = 0, \quad i = \overline{m+1, s}.$$

Приклад 1. *Розв'язати задачу оптимального керування:*

$$J = \int_0^4 (x'^2 + x)dt \to \inf; \quad |x'| \le 1, \quad x(4) = 0.$$

Розв'язок. Перейдемо до функціоналу Майєра. Вводимо нову змінну $x_0(t) = \int\limits_0^t (x'^2(s) + x(s))ds$ і керування $x' = u$. Тоді задача набуває вигляду

$$x_0(4) \to \inf,$$

$$x(4) = 0, \quad x_0(0) = 0, \quad |u| \le 1,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x + u^2 \\ \dot{x} = u. \end{cases}$$

1) Запишемо спряжену систему:

$\begin{pmatrix} \dot{\Psi}_0 \\ \dot{\Psi}_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}$, або в координатній формі $\begin{cases} \dot{\Psi}_0 = 0 \\ \dot{\Psi}_1 = -\Psi_0 \end{cases}$. Звідки $\Psi_0 = C_0$, а $\Psi_1 = -C_0 t + C_1$.

2) Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \lambda_0 x_0(4) + \lambda_1 x(4) + \lambda_2 x_0(0).$$

3) Запишемо умови трансверсальності:

$L_{\widetilde{x}(0)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad L_{\widetilde{x}(4)} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, де $\widetilde{x} = (x_0, x)^T$.

Маємо $\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} C_0 \\ -4C_0 + C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}$. Тобто $C_0 = \lambda_2 = -\lambda_0$, $C_1 = 0$; $4C_0 = \lambda_1$. Якщо $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow C_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, а це неможливо. Тоді $\lambda_0 \ne 0$ і можна покласти $\lambda_0 = 1$ (оскільки множники Лагранжа визначені з точністю до додатної сталої).

$$\lambda_0 = 1; \quad C_0 = -1; \quad \Rightarrow \quad \Psi_0 = -1; \quad \Psi_1 = t.$$

4) Складаємо функцію Понтрягіна:

$$H = -(x + u^2) + ut.$$

Знайдемо $\max\limits_{|u|\le 1}\left\{-(x+u^2)+ut\right\} = -x + \max\limits_{|u|\le 1}\left\{-u^2+ut\right\}$.

Тоді з вигляду параболи $-u^2+ut$ маємо, що максимум H досягається на u, яке має вигляд $u^*(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t\in[0;2) \\ 1, & t\in[2;4] \end{cases}$.

Дане керування і може бути оптимальним.

5) Знайдемо оптимальну траєкторію. Підставимо знайдене $u(t)$ в рівняння $\dot{x}=u$. Отримаємо

$$\dot{x} = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0\le t<2 \\ 1, & t\in[2;4] \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x = \begin{cases} \frac{t^2}{4}+C_1, & t\in[0;2) \\ t+C_2, & t\in[2;4] \end{cases}.$$

З умови x(4)=0 маємо, що $C_2 = -4$; а з умови рівності $x(2-0) = x(2+0)$ маємо $C_1 = -3$. Таким чином, оптимальною може бути траєкторія

$$x^*(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}-3, & t\in[0;2) \\ t-4, & t\in[2;4] \end{cases}.$$

Оскільки кінці фіксовані, то умов оптимальності кінців ми не використовуємо, як і не використовуємо умов доповнюючої нежорсткості (оскільки немає обмежень типу нерівностей).

6) Покажемо, що дана функція $x^*(t)$ дійсно є розв'язком. Нехай $h(t)\in KC^1([0;4])$ така, що $x^*(t)+h(t)$ допустима, тобто $x^*(4)+h(4)=0 \Rightarrow h(4)=0$. Але

$$x'^*(t)+h'(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}+h'(t), & t\in[0;2) \\ 1+h'(t), & t\in[2;4] \end{cases},$$

звідси $h'(t)\le 0$ при $t\in[2;4]$, тому $h(t)\ge 0$, $t\in[2;4]$. Тому

$$J(x^*+h)-J(x^*) = \int\limits_0^4 \left((x^{*\prime}+h')^2+x^*+h\right)\,dt - \int\limits_0^4 \left((x^{*\prime})^2+x^*\right)\,dt =$$

$$= \int_0^4 2x^{*\prime}h'dt + \int_0^4 h\,dt + \int_0^4 h'^2dt \geq 2\int_0^4 x^{*\prime}dh + \int_0^4 h\,dt =$$

$$= 2x^{*\prime}h\big|_0^4 - 2\int_0^4 (x^*)''hdt + \int_0^4 hdt = -2\int_0^2 \frac{1}{2}hdt + \int_0^4 hdt = \int_2^4 hdt \geq 0.$$

Отже, пара $x^*(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} - 3, t \in [0;2) \\ t-4, t \in [2;4] \end{cases}$ і $u^*(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, t \in [0;2) \\ 1, t \in [2;4] \end{cases}$ є оптимальним керованим процесом.

Приклад 2. *Розв'язати задачу оптимального керування:*

$$x(2) \to \inf; \quad |x'| \leq 2: \quad \int_0^2 x'^2dt = 2; \quad x(0) = 0.$$

Розв'язок. Перейдемо до функціоналів Майєра. Введемо нову змінну

$$x_0(t) = \int_0^t u^2dt, \quad x' = u.$$

Тоді маємо $x(2) \to \inf$, $|u| \leq 2$, $x(0) = 0$: $x_0(0) = 0$, $x_0(2) = 2$. Маємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u^2 \\ \dot{x} = u \end{cases}.$$

Запишемо спряжену систему

$$\begin{pmatrix} \dot{\Psi}_0 \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \Psi_0 = C_0 \\ \Psi = C \end{matrix}.$$

Складаємо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0 x(2) + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x_0(0) + \lambda_3 x_0(2).$$

Умови трансверсальності мають вигляд :

$$L_{\widetilde{x}(0)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix};\ L_{\widetilde{x}(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_0 \\ -C_1 \end{pmatrix},\ \widetilde{x} = (x_0, x).$$

Маємо

$$C_0 = \lambda_2 = -\lambda_3, \quad C_1 = \lambda_1 = -\lambda_0.$$

Нехай $\lambda_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0,\ C_0 \neq 0$. Складемо функцію Понтрягіна:

$$H = C_0 u^2 + C_1 u = C_0 u^2.$$

Знайдемо $\max\limits_{|u|\leq 2}\left\{C_0 u^2\right\}$. Якщо $C_0 > 0$, то $u_1 = 2;\ u_2 = -2$. Якщо $C_0 < 0$, то $u = 0$.

При $C_0 > 0$ маємо $\dot{x} = 2$ або $\dot{x} = -2$, а це не задовольняє обмеження. Тому даний випадок розв'язків не дає. Аналогічно, випадок $C_0 \leq 0$ розв'язків не дає.

Нехай $\lambda_0 \neq 0,\ \lambda_0 = 1 \Rightarrow C_1 = -1$. Тоді $H = C_0 u^2 - u$. Якщо $C_0 < 0$, то максимум досягається або у вершині параболи, тобто $u = \frac{1}{2C_0}$, або $u = -2$. Останній варіант не задовольняє обмеження.

Нехай $u = \frac{1}{2C_0}$. Підставляючи в систему, матимемо:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \frac{1}{4C_0^2} \\ \dot{x} = \frac{1}{2C_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{t}{4C_0^2} + C_3 \\ x = \frac{t}{2C_0} + C_4 \end{cases}.$$

З початкових умов отримаємо, що $x(0) = x_0(0) = 0 \Rightarrow C_3 = C_4 = 0$; $x_0(2) = 2 \Rightarrow C_0 = \pm\frac{1}{2}$.
Отже, $u^* = \pm 1$, а $x^* = \pm t$.

Якщо $C_0 = 0$, то $H = -u$ і $u^* = -2$, яке не є допустимим. Якщо $C_0 > 0$, то максимум досягається або при $u = -2$, або $u = 2$. Обидва випадки не підходять.

Таким чином, маємо лише два випадки: або $u^* = 1,\ x^* = t$, або $u^* = -1,\ x^* = -t$. Перший випадок виключаємо, врахувавши умову мінімуму функціоналу. Отже, підозрілою на розв'язок є пара $u^* = -1$, $x^* = -t$.

Покажемо, що $x^* = -t$ доставляє мінімум функціоналу.

Нехай $h \in KC^1([0;2])$, то $x^* + h$ – допустима. З умов маємо, що $h(0) = 0$ і

$$\int_0^2 (-1 + h'(t))^2 dt = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^2 (1 - 2h' + h'^2) dt = 2,$$

$$2\int_0^2 h' dt = \int_0^2 h'^2 dt,$$

тому $h(2) \geq 0$ і $x^*(2) + h(2) - x^*(2) = h(2) \geq 0$. Отже, пара $x^* = -t$ і $u^* = -1$ є оптимальним керованим процесом.

§ 2.2. Задача оптимальної швидкодії

Розглянемо наступну задачу на швидкодію

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [T_0, T_1]$$

$$x(T_0) = x_0, \quad x(T_1) = x_1, \quad u \in U, \tag{2.11}$$

$$\Phi_0 = T_1 - T_0 \to \inf,$$

T_0 – фіксований момент часу, T_1 – невідомий, x_0, x_1 – фіксовані.

Така задача нам уже неодноразово зустрічалася. Застосуємо до її розв'язання принцип максимуму. Функція Лагранжа має вигляд

$$L = \lambda_0(T_1 - T_0) + (\lambda_1, x(T_0) - x_0) + (\lambda_2, x(T_1) - x_1),$$

де $\lambda_1 = (\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n})$, $\lambda_2 = (\lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2n})$. За попередньою теоремою $\Psi(T_0) = L_{x_0} = \lambda_1$, $\Psi(T_1) = -L_{x_1} = -\lambda_2$.

Оптимальний момент закінчення:

$$(L_{x_1}, f(T_1, x(T_1), u(T_1))) + \lambda_0 = 0,$$

або

$$(\Psi(T_1), f(T_1, x(T_1), u(T_1))) = H\left(T_1, \Psi(T_1), x(T_1), u(T_1)\right) = \lambda_0.$$

Якщо $\Psi(t) \equiv 0$, тоді $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $H = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = 0$, що неможливо. Тому $\Psi(t) \neq 0$. Таким чином нами отримана теорема про необхідні умови екстремуму в задачі швидкодії.

***Теорема 2.3.* (Болтянського)** *Для того, щоб допустимий процес $\{T_1, u(t), x(t)\}$ був оптимальним в задачі швидкодії, необхідне існування нетривіального розв'язку спряженої системи (2.2) такого, що:*

1) *виконана умова максимуму:*

$$\max_{v \in U} H(t, \Psi(t), x(t), v) = H(t, \Psi(t), x(t), u(t)), \quad \forall t \in [T_0, T_1]\,;$$

2) $H\left(T_1, \Psi(T_1), x(T_1), u(T_1)\right) \geq 0.$

Приклад 1. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії

$$T \to \inf,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \end{array}\right. \qquad |u| \leq 1, \quad x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0; \quad x(T) = y(T) = 0.$$

Таким чином, задача полягає у переведенні фазової точки з положення (x_0, y_0) в початок координат, рухаючись по траєкторіях системи, за мінімально короткий час.

Розв'язок. Застосуємо принцип максимуму. Спряжена система має вигляд:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\Psi}_1 = 0 \\ \dot{\Psi}_2 = -\Psi_1 \end{array}\right.,$$

звідки $\Psi_1 = d_1$, $\Psi_2 = -d_1 t + d_2$, d_1, d_2 – довільні сталі.Функція Понтрягіна має вигляд:

$$H = \Psi_1 y + \Psi_2 u, \quad \max_{|u| \leq 1} H = \Psi_1 y + \max_{|u| \leq 1}(\Psi_2(t) u);$$

отже,

$$u(t) = \left\{\begin{array}{rl} 1, & \Psi_2(t) > 0 \\ -1, & \Psi_2(t) < 0 \end{array}\right.,$$

або $u(t) = \operatorname{sign} \Psi_2(t) = \operatorname{sign}(-d_1 t + d_2)$. Звідси маємо, що будь-яке оптимальне керування $u(t)$, $t \in [0, T]$ є кусково-сталою функцією, яка приймає значення ± 1 і має не більше двох інтервалів сталості (оскільки лінійна функція $-d_1 t + d_2$ змінює знак не більше одного разу). В точках розриву $u(t)$ вважаємо неперервною зправа.

Отже, фазова точка може рухатися лише по траєкторіях систем

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 \end{cases} .$$

Фазові траєкторії для першої системи мають вигляд $x = \frac{1}{2}y^2 + C_1$, а розв'язки $y = t + C_2$; $x = \frac{1}{2}(t + C_2)^2 + C_1$. Отже, кусок фазової траєкторії, для якої $u \equiv 1$, являє собою дугу параболи. По даних параболах фазові точки рухаються знизу вверх (оскільки $\dot{y} = 1 > 0$).

Для другої системи фазові траєкторії визначаються співвідношенням $x = -\frac{1}{2}y^2 + C_3$, а розв'язки рівностями $y(t) = -t + C_4$; $x = -\frac{1}{2}(-t + C_4)^2 + C_3$. По даних параболах фазові точки рухаються зверху вниз (оскільки $\dot{y} = -1 > 0$).

Отже, якщо керування $u(t)$ спочатку протягом деякого часу дорівнює 1, а потім –1, то фазова траєкторія складається із двох кусків парабол, що примикають один до одного, причому останній лежить на тій з парабол другої сім'ї, що проходить через початок координат (оскільки шукана траєкторія повинна приводити в початок координат). Якщо навпаки, спочатку $u = -1$, а потім $u = 1$, то фазова траєкторія замінюється центрально симетричною. Лінія AOB, що складається з дуг AO параболи $x = \frac{y^2}{2}$, розташованої в нижній півплощині, і BO – дуги параболи $x = -\frac{y^2}{2}$, розташованої у верхній півплощині, називається лінією переключень. Саме на неї, очевидно, повинна попасти фазова точка, щоб дійти початку координат.

Таким чином, якщо фазова точка (x_0, y_0) розташована вище лінії AOB, то вона рухається під дією керування $u = -1$ по дузі параболи другої сім'ї, що проходить через точку, до моменту перетину лінії AOB, а далі рухається по дузі цієї лінії під дією керування $u = 1$. Якщо (x_0, y_0) розташована нижче AOB, то фазова точка спочатку рухається по дузі першої сім'ї під дією керування $u = 1$, до перетину з AOB, а далі по цій дузі під дією керування $u = -1$.

Знаючи конкретні значення (x_0, y_0), ми зможемо явно знайти оптимальне керування $u^*(t)$, $x^*(t)$ і T^*. Нехай, наприклад, $x(0) = 1$; $y(0) = 0$.

З вищесказаного випливає, що спочатку ми рухаємося за керуванням $u = -1$, тобто по фазових кривих другої системи. Знайдемо C_3 з умови, що парабола $x = -\frac{1}{2}y^2 + C_3$ проходить через (0,1): 1=C_3. Отже, це парабола $x = -\frac{1}{2}y^2 + 1$. Її точка перетину з $x = \frac{y^2}{2}$ знаходиться з системи

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ x = -\frac{y^2}{2} + 1 \end{cases},$$

і ця точка буде $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

Знайдемо момент переключення і оптимальну траєкторію. Для цього визначимо C_4 і C_3. Маємо $x(0) = 1$ і $y(0) = 0$. Тому $C_4 = 0$, а $1 = C_3$. Отже, $x = -\frac{1}{2}t^2 + 1$; $y(t) = -t$.

Знайдемо момент τ попадання цього розв'язку на криву $x = \frac{y^2}{2}$. Очевидно, що $x(\tau) = \frac{1}{2}$; $y(\tau) = -1$. $-\tau = -1$; $\tau = 1$. Далі ми рухаємося під дією керування $u = 1$. Знайдемо розв'язок, за яким відбувається рух, для цього визначимо сталі C_1 і C_2. Маємо, що $x(\tau) = \frac{1}{2}$; $y(\tau) = -1$. Тоді $y(1) = 1+C_2 = -1$; $C_2 = -2$, $x(1) = \frac{1}{2}(1-2)^2+C_1 = \frac{1}{2}$; $C_1 = 0$. Отже, $x(t) = \frac{1}{2}(t-2)^2$; $y(t) = t - 2$.
T знаходимо з умови $y(T) = 0$; $T - 2 = 0$; $T = 2$.

Відповідь.

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0;1) \\ 1, & t \in [1;2] \end{cases}, \quad x^*(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + 1, & t \in [0;1) \\ \frac{1}{2}(t-2)^2, & t \in [1;2] \end{cases},$$

$$y^*(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0;1) \\ t-2; & t \in [1;2] \end{cases}, \quad T^* = 2.$$

Зауваження. Розв'язуючи дану задачу для довільних (x_0, y_0), неважко записати явний вигляд функціоналу швидкодії $T = T(x_0, y_0)$, а саме,

$$T(x_0, y_0) = \begin{cases} y_0 + 2\sqrt{x_0 + \frac{y_0^2}{2}}, & \text{якщо } (x_0, y_0) \text{ лежить вище АОВ} \\ & \text{або на ній,} \\ -y_0 + 2\sqrt{-x_0 + \frac{y_0^2}{2}}, & \text{якщо } (x_0, y_0) \text{ лежить нижче АОВ} \\ & \text{або на ній,} \end{cases}$$

а отже, і явний вигляд функції Беллмана цієї задачі. З означення функції Беллмана маємо, що $B(x,y)=T(x,y)$. Тепер неважко з'ясувати питання про диференційовність функції Беллмана, яке ми піднімали раніше.

Зрозуміло, що поза лінією AOB функція $B(x,y)$ гладка. Покажемо, що в жодній точці лінії AOB функція Беллмана не має неперервних похідних по x і y. Дійсно, нехай C – точка дуги AO, (x_0,y_0) – її координати так, що $x_0=\frac{y_0^2}{2}$, причому $y_0<0$. В цій точці $\sqrt{x_0+\frac{y_0^2}{2}}=|y_0|=-y_0$. Тоді

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{x+\frac{y^2}{2}}}\Bigg|_C = -\frac{1}{y_0},\\
\frac{\partial B}{\partial y} &= 1+\frac{y}{\sqrt{x+\frac{y^2}{2}}}\Bigg|_C = 1+\frac{y_0}{-y_0}=0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

З другої формули в (2.12) маємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial x}\bigg|_C &= -\frac{1}{\sqrt{-x+\frac{y^2}{2}}}\Bigg|_C = -\infty;\\
\frac{\partial B}{\partial y}\bigg|_C &= -1+\frac{y}{\sqrt{-x+\frac{y^2}{2}}}\Bigg|_C = -\infty.
\end{aligned}$$

Отже, при підході до точки C зверху, маємо $\frac{\partial B}{\partial y}=0$, а знизу $\frac{\partial B}{\partial y}=-\infty$, тобто похідної $\frac{\partial B}{\partial y}$ в точці C не існує. Аналогічно не існує і похідної $\frac{\partial B}{\partial x}$ в точці C. Така ж сама ситуація має місце і в точках дуги BO.

Не дивлячись на те, що $B(x,y)$ не є диференційовною лише на лінії AOB, а в решті точок гладка, всі міркування стосовно методу динамічного програмування тут втрачають сенс. Адже кожна оптимальна траєкторія протягом деякого проміжку часу проходить вздовж лінії AOB, і припущення про диференційовність функції Беллмана (яке там суттєве) вздовж оптимальної траєкторії не виконується. Більше того, не тільки доведення теорем не проходить, а навіть не можна написати рівняння Беллмана.

Тому великою перевагою принципу максимуму є те, що в його формулюванні ні функція Беллмана, ні її похідні участі не беруть. Саме через це він не втрачає сенсу навіть при недиференційовності функції Беллмана.

§ 2.3. Достатні умови оптимальності у формі принципу максимуму

Розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{gathered}\Phi_0(x(T_0), x(T_1)) \to \inf; \\ \Phi_i(x(T_0), x(T_1)) \le 0, \quad i = \overline{1,m} \\ \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad t \in [T_0, T_1]\,, \\ u \in U, \quad u(t) \in KC\left([T_0, T_1]\right)\end{gathered} \tag{2.13}$$

T_0, T_1 – фіксовані моменти часу, Φ_i – опуклі, гладкі функції. Має місце теорема.

Теорема 2.4 ***(достатні умови оптимальності).***

Для того, щоб допустимий процес $\{u(t), x(t)\}$ *був оптимальним в задачі (2.13), достатньо існування множників Лагранжа* $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ *і розв'язку спряженої системи (2.2)* $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))^T$ *таких, що:*

1) $\lambda_0 > 0, \quad \lambda_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m};$

2) $\lambda_i \Phi_i(x(T_0), x(T_1)) = 0, \quad i = \overline{1,m};$

3) *виконана умова максимуму:*

$$\max_{v \in U} (\Psi(t), B(t)v) = (\Psi(t), B(t)u(t)), \quad \forall t \in [T_0, T_1]\,;$$

4) *умови трансверсальності*

$$\Psi(T_0) = L_{x_0}, \quad \Psi(T_1) = -L_{x_1},$$

де $L = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \Phi_i$ – *функція Лагранжа.*

Доведення. Оскільки Φ_i – опуклі, то $L = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \Phi_i$ – опукла. Нехай $\{\widetilde{u}(t), \widetilde{x}(t)\}$ – довільний допустимий процес, а $\{u(t), x(t)\}$ – процес, що задовольняє теоремі, $\varepsilon > 0$. Тоді

$$L\left(\lambda, \varepsilon\widetilde{x}(T_0) + (1-\varepsilon)x(T_0), \varepsilon\widetilde{x}(T_1) + (1-\varepsilon)x(T_1)\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon L\left(\lambda, \widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(T_1)\right) + (1-\varepsilon)L(\lambda, x(T_0), x(T_1)).$$

Отримаємо

$$L(\lambda, x(T_0) + \varepsilon(\widetilde{x}(T_0) - x(T_0)), x(T_1) + \varepsilon(\widetilde{x}(T_1) - x(T_1))) \leq$$

$$L(\lambda, x(T_0), x(T_1)) + \varepsilon(L(\lambda, \widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(T_1)) - L(\lambda, x(T_0), x(T_1))),$$

$$\frac{L\left(\lambda, x(T_0) + \varepsilon\Delta x(T_0), x(T_1) + \varepsilon\Delta x(T_1)\right) - L(\lambda, x(T_0), x(T_1))}{\varepsilon} \leq$$

$$\leq L\left(\lambda, \widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(T_1)\right) - L\left(\lambda, x(T_0), x(T_1)\right),$$

де $\Delta x(T_0) = \widetilde{x}(T_0) - x(T_0)$, $\Delta x(T_1) = \widetilde{x}(T_1) - x(T_1)$.
При $\varepsilon \to 0$ з останньої нерівності в силу диференційовності L маємо:

$$(L_{x_0}, \Delta x(T_0)) + (L_{x_1}, \Delta x(T_1)) \leq L\left(\lambda, \widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(T_1)\right) - L\left(\lambda, x(T_0), x(T_1)\right). \tag{2.14}$$

Нехай $X(t, T_0)$ – матрицант системи $\dot{x} = A(t)x$. Оскільки $x(t)$ – розв'язок системи $\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)$, а $\widetilde{x}(t)$ – розв'язок системи $\dot{\widetilde{x}} = A(t)\widetilde{x} + B(t)\widetilde{u}(t)$, то $\Delta x = \widetilde{x}(t) - x(t)$ задовольняє системі $\Delta\dot{x} = A(t)\Delta x + B(t)(\widetilde{u}(t) - u(t))$. За формулою Коші розв'язку неоднорідної системи отримаємо:

$$\Delta x(t) = X(t, T_0)\Delta x(T_0) + X(t, T_0)\int\limits_{T_0}^{t} X^{-1}(s, T_0)B(s)\left(\widetilde{u}(s) - u(s)\right)ds. \tag{2.15}$$

При $t = T_1$

$$\Delta x(T_1) = X(T_1,T_0)\Delta x(T_0) + X(T_1,T_0)\int\limits_{T_0}^{T_1} X(T_0,s)B(s)\left(\widetilde{u}(s) - u(s)\right)ds =$$

$$= X(T_1,T_0)\Delta x(T_0) + \int\limits_{T_0}^{T_1} X(T_1,s)B(s)\left(\widetilde{u}(s) - u(s)\right)ds.$$

Оскільки $L_{x_0} - \Psi(T_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (L_{x_0} - \Psi(T_0), \Delta x(T_0)) = 0$, а тому $\big(L_{x_0} + X^T(T_1,T_0)L_{x_1}, \quad \Delta x(T_0)\big) = 0$, або

$$(L_{x_0}, \Delta x(T_0)) + (L_{x_1}, X(T_1,T_0)\Delta x(T_0)) = 0. \tag{2.16}$$

Оскільки виконана умова максимуму, то

$$(\Psi(s), B(s)\widetilde{u}(s)) \leq (\Psi(s), B(s)u(s)).$$

А отже, $-\int\limits_{T_0}^{T_1} (\Psi(s), B(s)(\widetilde{u}(s) - u(s)))\,ds \geq 0$. Маємо, що

$$\int\limits_{T_0}^{T_1} \big(X^T(T_1,s)L_{x_1}, B(s)(\widetilde{u}(s) - u(s))\big)\,ds \geq 0.$$

Звідки

$$\left(L_{x_1}, \int\limits_{T_0}^{T_1} (X(T_1,s)B(s)(\widetilde{u}(s) - u(s)))\,ds\right) \geq 0. \tag{2.17}$$

Додаючи (2.16) і (2.17), отримаємо

$$(L_{x_0}, \Delta x(T_0)) +$$

$$+\left(L_{x_1}, X(T_1,T_0)\Delta x(T_0) + \int\limits_{T_0}^{T_1} (X(T_1,s)B(s)(\widetilde{u}(s) - u(s)))\,ds\right) \geq 0.$$

Таким чином, $(L_{x_0}, \Delta x(T_0)) + (L_{x_1}, \Delta x(T_1)) \geq 0$.
Тоді з (2.14) маємо, що $L(\lambda, \widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(T_1)) - L(\lambda, x(T_0), x(T_1)) \geq 0$, або

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \Phi_i(\widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(T_1)) \geq \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \Phi_i(x(T_0), x(T_1)).$$

Тоді

$$\lambda_0 \Phi_0(\widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(T_1)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i(\widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(T_1)) \geq$$

$$\geq \lambda_0 \Phi_0(x(T_0), x(T_1)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i(x(T_0), x(T_1)).$$

З умов теореми отримуємо, що $\Phi_0(\widetilde{x}(T_0), \widetilde{x}(T_1)) \geq \Phi_0(x(T_0), x(T_1))$. А отже, процес $\{u(t), x(t)\}$ – оптимальний. Теорема доведена. ■

Зауваження. З доведення теореми випливає, що $\{u(t), x(t)\}$ доставляє глобальний мінімум задачі (2.13).

§ 2.4. Зв'язок між принципом максимуму і динамічним програмуванням

В теорії рівнянь в частинних похідних існує класичний метод розв'язання нелінійних рівнянь в частинних похідних першого порядку. Це так званий "метод характеристик".

Цей метод складається з двох частин. В першій частині доводиться, що якщо існує розв'язок рівняння в частинних похідних, що належить класу C^2, то можна отримати сім'ю звичайних диференціальних рівнянь для кривих, що називаються характеристичними полосками. В другій частині показано, що розв'язки рівняння в частинних похідних можна отримати, використовуючи сім'ю розв'язків звичайних диференціальних рівнянь для характеристичних полосок.

Ми приведемо дві теореми про зв'язок між методом динамічного програмування і принципом максимуму. Перша теорема є аналогом першої частини методу характеристик. Цікаво відзначити, що диференціальні рівняння для характеристик співпадають з диференціальними рівняннями з принципу максимуму Понтрягіна. Значить, можна вважати, що перша теорема дозволяє отримати принцип максимуму з методу динамічного програмування. Однак, в ній буде припущення про належність розв'язку рівняння динамічного програмування класу C^2, що є досить жорстким. Існує багато задач в яких функція Беллмана не має навіть неперервних похідних. Тому дана теорема важлива швидше для встановлення зв'язку між принципом максимуму і методом характеристик, застосованим до рівняння динамічного програмування, ніж для доведення принципу максимуму.

Друга теорема буде аналогом другої частини методу характеристик. Вона дозволяє будувати розв'язки рівняння динамічного програмування, використовуючи розв'язки характеристичних рівнянь. В ній стверджується, що якщо існує керування з оберненим зв'язком з допустимою множиною розривів, що задовольняє принципу максимуму (т. б. характеристичним рівнянням для рівняння динамічного програмування), то критерій оптимальності є розв'язком рівняння динамічного програмування всюду, крім, можливо, множини більш низької розмірності ніж фазовий простір.

Теорема 2.10. *Позначимо через* Q *підмножину з* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Нехай* (t_0, x_0) *– внутрішня точка множини* $Q \backslash M$. *Нехай* u^* *– оптимальне керування для задачі оптимізації (2.1) з початковою умовою* $x(t_0) = x_0$. *Припустимо, що вся відповідна цьому керуванню траєкторія* $(t, x^*(t))$, *крім, можливо, кінцевої точки* (t_0, x_1), *лежить у внутрішності множини* Q . *Нехай функція Беллмана* $B(s, y)$ *є двічі неперервно диференційовною на* $Q \backslash M$.

Нехай $\Psi(t) = -B_x(t, x^*(t))$. *Тоді* $\Psi(t)$ *задовольняє рівняння*

$$\dot{\Psi} = -(f'_x(t, x^*(t)), u^*(t))^T \Psi \tag{2.18}$$

і умову

$$\max_{v \in U} \{(\Psi(t), f(t, x^*(t), v))\} = (\Psi(t), f(t, x^*(t), u^*(t))) \tag{2.19}$$

для $\forall t \in (t_0, t_1)$.

Зауваження. Рівняння $\dot{x} = f(t, x, u)$ і (2.18) представляють собою рівняння характеристик для рівняння динамічного програмування. З іншого боку, (2.18) і (2.19) – це умови принципу максимуму Понтрягіна без умов трансверсальності.

Доведення теореми. Розглянемо криву $(t, x^*(t))$, де $\dot{x}^* = f(t, x^*, u^*(t))$. Розглянемо також вектор $B_y(s, y)$ вздовж кривої $(t, x^*(t))$. Нехай t – точка неперервності керування u^*.

Тоді виконується співвідношення

$$\dot{B}_y(t, x^*(t)) = B_{ys}(t, x^*(t)) + B_{yy}(t, x^*(t)) f(t, x^*(t), u^*(t)). \tag{2.20}$$

З властивостей функції Беллмана випливає, що

$$B_s(s, y) + (B_y(s, y), f(s, y, u)) \geq 0 \tag{2.21}$$

для всіх (s, y), $u \in U$. Другий доданок – скалярний добуток.

Зокрема, ця нерівність буде мати місце і для $(t, x^*(t))$. Якщо ще й замінити y на $x^*(t)$, то отримаємо

$$B_s(t, x^*(t)) + (B_y(t, x^*(t)), f(t, x^*(t), u^*(t))) = 0. \tag{2.22}$$

Значить, вираз $B_s(t, y) + (B_y(t, y), f(t, y, u^*(t)))$ досягає мінімуму на $x^*(t)$. Оскільки цей вираз диференційовний по y, то його частинна похідна по y повинна дорівнювати нулю при $y = x^*(t)$. Маємо

$$\begin{array}{c} B_{ys}(t, x^*(t)) + B_{yy}(t, x^*(t)) f(t, x^*(t), u^*(t)) + \\ + f_x^T(t, x^*(t), u^*(t)) B_y(t, x^*(t)) = 0 \end{array}. \tag{2.23}$$

З (2.20) і (2.21) випливає, що

$$\dot{B}_y(t, x^*(t)) = f_x^T(t, x^*(t), u^*(t)) B_y(t, x^*(t)).$$

Умова (2.19) випливає з (2.21) і (2.22) і визначення функції $\Psi(t)$. Теорема доведена. ■

Нехай $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_l)$, де $\Phi_1(t_1, x(t_1))$ – критерій якості такий, що $J(s, y, u) = \Phi_1(t_1, x(t_1, s, y))$, а компоненти $\Phi_2, \ldots, \Phi_l$ задають многовид M задачі (2.1), тобто $M = \{(t, x) : \Phi_i(t, x) = 0, \quad i = 2, \ldots, l\}$. Наступну теорему приведемо без доведення.

Теорема 2.11. *Нехай $u(t, x)$ – керування з оберненим зв'язком, визначене на всій множині допустимості Q_0 і таке, що має допустиму множину розривів.*

Нехай для кожної точки $(s, y) \in Q_0$ *і кожного керування* $u(t) = u(t, x(t, s, y))$ *визначеного на* $[s, t_1]$ *виконані умови принципу максимуму. Нехай ранг матриці* $(\Phi_x(t, x), \Phi_t(t, x))$ *рівний* 1 *на* M.

Тоді критерій $J(s, y, u)$ *є диференційовною функцією. Між частинними похідними від* J *і спряженими змінними* $\Psi(t)$ *із принципу максимуму є залежність наступного вигляду:*

$$\lambda_0 J_y(s, y, u) = \Psi(s), \quad \lambda_0 J_s(s, y, u) = -H(s),$$

де $H(s) = (f, \Psi)$ *– функція Понтрягіна, а* λ_0 *– множник Лагранжа і виконується рівняння динамічного програмування і мінімум в ньому досягається на керуванні* $u(t, x)$.

§ 2.5. Принцип максимуму Понтрягіна та необхідні умови екстремуму в класичному варіаційному численні

В даному параграфі продемонструємо, як працює принцип максимуму в задачах варіаційного числення. Зокрема, всі необхідні умови мінімуму (як сильного, так і слабкого) для найпростішої задачі варіаційного числення отримаємо з принципа максимуму.

Як і раніше, розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення:

$$\begin{gathered} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x')dt \to \inf, \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \end{gathered} \tag{2.24}$$

з виконанням всіх умов, що були вказані при постановці цієї задачі у першій частині посібника.

Подамо цю задачу, як задачу оптимального керування типу (2.1):

$$x^0(t_1) \to \inf, \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^0 = L(t, x, u) \\ \dot{x} = u \end{cases}, \quad x(t_0) = x_0,\, x(t_1) = x_1,\, x^0(t_0) = 0,\, u \in U = \mathbb{R}^1.$$

Нехай $\{x(t), u(t)\}$ – оптимальний процес.

Застосуємо до задачі (2.25) принцип максимуму. Спряжена система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_0 = 0 \\ \dot{\Psi}_1 = -L_x(t, x(t), u(t))\Psi_0 \end{cases}.$$

Тоді $\Psi_0 = C_0$, а функція Понтрягіна $H = C_0 L(t, x, u) + \Psi_1(t)u$. Умова максимуму має вигляд

$$\max_{v \in \mathbb{R}^1} [C_0 L(t, x(t), v) + \Psi_1(t)v] = C_0 L(t, x(t), u(t)) + \Psi_1(t)u(t), \ \forall t \in [t_0, t_1].$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L = \lambda_0 x^0(t_1) + \lambda_1(x(t_0) - x_0) + \lambda_2(x(t_1) - x_1) + \lambda_3 x^0(t_0).$$

Умови трансверсальності наступні:

$$C_0 = \lambda_3, \quad \Psi_1(t_0) = \lambda_1, \quad C_0 = -\lambda_0, \quad \Psi_1(t_1) = -\lambda_2.$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то $C_0 = 0$ і з умови максимуму отримуємо, що $\Psi_1(t) \equiv 0$, а тому $\lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, що неможливо. Покладемо $\lambda_0 = 1$. З умови максимуму отримаємо $-L_v(t, x(t), v) + \Psi_1(t) = 0$ при $v = u(t)$ для кожного $t \in [t_0, t_1]$, або

$L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = \Psi_1(t)$ і $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \geq 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Це є умова Лежандра. Підставляючи значення $\Psi_1(t)$ у друге рівняння спряженої системи, отримаємо рівняння $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = L_x(t, x(t), \dot{x}(t))$, яке є рівнянням Ейлера. Умова оптимальності по u при $\lambda_0 = 1$ і $\Psi_1(t) = L_{\dot{x}}$ приводить до нерівності

$$L(t, x(t), v) - L(t, x(t), \dot{x}(t)) - vL_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) + \dot{x}(t)L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \geq 0,$$

$$\forall t \in [t_0, t_1],$$

$\forall v \in \mathbb{R}^1$, що є нічим іншим, як умовою Вейєрштраса сильного мінімуму.

Таким чином, виконані всі необхідні умови сильного локального мінімуму найпростішої задачі варіаційного числення.

Раніше було показано, що умова Лежандра є і необхідною умовою слабкого мінімуму. Виведемо з принципу максимуму умову Якобі. Нагадаємо, що задача

$$J_1(h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\widetilde{L}_{xx}(t)h^2(t) + 2\widetilde{L}_{x\dot{x}}(t)h(t)\dot{h}(t) + \widetilde{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}^2(t)\right]dt \to \inf,$$

$$h(t_0) = h(t_1) = 0 \tag{2.26}$$

називається вторинною (двоїстою, спряженою) до задачі (2.24). Рівняння Ейлера для неї називається рівняння Якобі задачі (2.24). Воно має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left[\widetilde{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widetilde{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right] = \widetilde{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \widetilde{L}_{xx}(t)h(t). \tag{2.27}$$

Точка τ називається спряженою до точки t_0, якщо рівняння (2.27) має розв'язок $h(t)$, для якого $h(t_0) = h(\tau)$, але $\widetilde{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\dot{h}(\tau) \neq 0$.

Покажемо виконання умови Якобі для задачі (2.24). Тобто, якщо $\widetilde{x}(t) \in C^1\left([t_0, t_1]\right)$ доставляє слабкий локальний мінімум задачі (2.24), то на інтервалі (t_0, t_1) немає спряжених до t_0 точок.

Нехай це не так і $\tau \in (t_0, t_1)$ спряжена до t_0 точка. Тоді неважко показати (це було доведено раніше), що функція

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} h(t), t_0 \in [t_0, \tau] \\ 0, \quad t \in (\tau, t_1] \end{cases}$$

разом з $h(t) \equiv 0$ доставляє сильний локальний мінімум задачі (2.27). Знову застосуємо принцип максимуму до задачі (2.26). Згідно з ним, існують множник Лагранжа $\lambda_0 \geq 0$ і такі кусково-диференційовані функції $\Psi_0(t)$ і $\Psi_1(t)$ – розв'язки спряженої системи $(\Psi_0(t) \equiv C_0 = -\lambda_0,)$ що

$$C_0\left(\widetilde{L}_{xx}(t)\widetilde{h}(t) + 2\widetilde{L}_{x\dot{x}}\widetilde{h}(t)u(t) + \widetilde{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)u^2(t) + \Psi_1(t)u(t)\right) =$$

$$= \max_{v \in \mathbb{R}^1}\left\{C_0\left(\widetilde{L}_{xx}(t)\widetilde{h}(t) + 2\widetilde{L}_{x\dot{x}}(t)\widetilde{h}(t)v + \widetilde{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)v^2 + \Psi_1(t)v\right)\right\} \tag{2.28}$$

для $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Міркуваннями, аналогічними наведеним вище, можна показати, що $\lambda_0 \neq 0$, і можна вважати, що $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тоді з (2.28) випливає, що

$$\Psi_1(t) = \widetilde{L}_{x\dot{x}}(t)\widetilde{h}(t) + \widetilde{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{\widetilde{h}}(t). \tag{2.29}$$

Але для $t \geq \tau$ $\widetilde{h}(t) \equiv 0$ і $\Psi_1(\tau + 0) \equiv 0$ внаслідок неперервності $\Psi_1(t)$. З іншого боку, $0 = \Psi_1(\tau - 0) = \widetilde{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\dot{\widetilde{h}}(\tau - 0) = \widetilde{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\dot{h}(\tau) \neq 0$, що суперечить неперервності Ψ_1. Отримане протиріччя і доводить виконання умови Якобі.

Зауваження. Відзначимо, при якій гладкості інтегранта і екстремалі можна довести вказані вище твердження. Рівняння Ейлера і умову Вейєрштраса можна вивести, якщо функції $L, L_x, L_{\dot{x}}$ неперервні, умови Лежандра і Якобі – якщо

$$L \in C^2, \quad \widetilde{L}_{x\dot{x}}(t), \widetilde{L}_{xx}(t) \text{і} \widetilde{L}_{xx}(t) \in C^1\left([t_0, t_1]\right).$$

Всі умови виконуються, якщо $L \in C^3$, $\widetilde{x} \in C^2\left([t_0, t_1]\right)$.

Задачі до розділу 2.

Використовуючи принцип максимуму, розв'язати задачі.

1. $J(x) = \int\limits_0^{\frac{7\pi}{4}} x(t)\sin t dt \to \inf; \quad |x'| \le 1, \quad x(0) = 0.$

2. $J(x) = \int\limits_0^1 (x'^2 + x) dt \to \inf; \quad |x'| \le 1, \quad x(0) = 0.$

3. $J(x) = \int\limits_0^1 x dt \to \inf; \quad |x''| \le 2, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

4. $J(x) = \int\limits_0^1 x dt \to \inf; \quad |x''| \le 2, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

5. $J(x) = \int\limits_0^1 x dt \to \inf; \quad |x''| \le 2,$

$x(0) + x(1) = 0, \quad x'(0) + x'(1) = 0.$

6. $J(x) = \int\limits_0^2 x dt \to \inf; \quad |x''| \le 2, \quad x(0) = x'(0) = x'(2) = 0.$

7. $J(x) = \int\limits_0^2 |x''| dt \to \inf; \quad x'' \ge -2,$

$x(0) = 0, \quad x(2) = -1, \quad x'(2) = -2.$

8. $J(x) = \int\limits_0^1 x''^2 dt \to \inf; \quad x'' \le 24, \quad x(0) = 11, \quad x(1) = x'(1) = 0.$

9. $J(x) = \int\limits_0^4 (x'^2 + x) dt \to \inf; \quad |x'| \le 1, \quad x(0) = 0.$

10. $J(x) = \int\limits_0^{T_0} |\dot{x}| dt \to \inf; \quad \dot{x} \ge A, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi$**,** $(A > 0)$**.**

11. $J(x) = \int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x)dt \to \inf; \quad |x'| \le 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = 0.$

12. $J(x, T) = \int\limits_0^{T} (\dot{x}^2 + x)dt \to \inf; \quad |x'| \le 1,$

$x(0) = 0, \quad x(T) = \xi$ (T – змінна).

13. $J(x) = \int\limits_0^{4} x dt \to \inf; \quad |x''| \le 2,$

$x(0) + x(4) = 0, \quad x'(0) + x'(4) = 0.$

14. $J(x) = x(T_0) \to \inf; \quad \int\limits_0^{T_0} x'^2 dt = 2, \quad |x'| \le 1, \quad x(0) = 0.$

15. $J(x) = \int\limits_0^{1} \left(\frac{x^2 + x'^2}{2} + |x'| \right) dt \to \inf; \quad x(1) = \xi.$

16. $J(x) = \int\limits_0^{T_0} (xy' + yx')dt \to \sup,$

$x(0) = x(T_0), \quad y(0) = y(T_0), \quad x'^2 + y'^2 \le 1.$

17. $J(x) = \int\limits_0^{T_0} (xy' - yx')dt \to \sup, \quad |x'| \le 1, \quad |y'| \le 1,$

$x(0) = x(T_0), \quad y(0) = y(T_0).$

18. $J(x) = \int\limits_0^{1} x dt \to \inf; \quad \int\limits_0^{1} x''^2 dt = 1, \quad x(0) = x(1) = 0.$

19. $J(x) = \int\limits_0^{1} x dt \to \inf; \quad \int\limits_0^{1} x''^2 dt = 1, \quad x(0) = x'(0) = x(1) = 0.$

20. $J(x)=\int\limits_0^1 x''^2 dt \to \inf; \quad \int\limits_0^1 x dt = 1, \quad x(0)=0.$

Розв'язати задачі оптимальної швидкодії.

21. $T \to \inf, \quad |x''| \le 2,$
$x(-1)=1, \quad x(T)=-1, \quad \dot{x}(-1)=x'(T)=0.$

22. $T \to \inf, \quad |x''| \le 2,$
$x(-1)=-1, \quad x(T)=1, \quad x'(-1)=x'(T)=0.$

23. $T \to \inf, \quad |x''| \le 2, \quad x'(0)=x'(T)=0, \quad x(0)=1, \quad x(T)=3.$

24. $T \to \inf, \quad -1 \le x'' \le 3,$
$x(0)=1, \quad x'(0)=x'(T)=0, \quad x(T)=-1.$

25. $T \to \inf, \quad 0 \le x'' \le 1,$
$x(0)=\xi_1, \quad x'(0)=\xi_2, \quad x(T)=x'(T)=0.$

26. $T \to \inf, \quad -3 \le x'' \le 1,$
$x(0)=3, \quad x'(0)=x'(T)=0, \quad x(T)=-5.$

27. $T \to \inf, \quad \left|x''\right| \le 1, \quad x(0)=\xi_1, \quad x'(0)=\xi_2, \quad \dot{x}(T)=0.$

28. $T \to \inf, \quad \left|x''\right| \le 1, \quad x(0)=\xi_1, \quad x'(0)=\xi_2, \quad x(T)=0.$

Список рекомендованої літератури

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* «Оптимальное управление» – М.: Наука, 1979.

2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* «Математическая теория оптимальных процессов» – М.: Наука, 1976.

3. *Красовский Н.Н.* «Теория управления движением» – М.: Наука, 1968.

4. *Летов А.М.* «Динамика полета и управление» – М.: Наука, 1969.

5. *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* «Основы оптимального управления» – Киев: Вища школа, 1975.

6. *Моклячук М.П.* «Варіаційне числення. Екстремальні задачі» – Київ: ВПЦ «Експрес», 2003.

7. *Янг Л.* «Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления» – М.: Мир, 1974.

8. *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* «Сборник задач по оптимизации» – М.: Наука, 1984.

9. *Ашманов С.А., Тимохов С.А.* «Теория оптимизации в задачах и упражнениях» – М.: Наука, 1991.