Київський національний університет імені Тараса Шевченка

В.М. Журавльов

Методична розробка

спеціального курсу ***Горенштейнові порядки***

для студентів механіко – математичного факультету

В.М. Журавльов. Методична розробка спеціального курсу "Горенштейнові порядки": Навчальний посібник для студентів механіко – математичного факультету. — 2015. – 70 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф., А.П. Петравчук
д-р фіз.-мат. наук, проф., В.М. Бондаренко

Наведено основні відомості про черепичні порядки та гратки над черепичним порядком, дуальність в черепичних порядках. Розглядається будова матриці показників нециклічного горенштейнового порядку, гомологічні властивості горенштейнових черепичних порядків. Описані горенштейнові порядки зі спадковим кільцем множників радикалу Джекобсона.

Для студентів механіко-математичного факультету.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко – математичного факультету
(протокол № 11 від 25 травня 2015 року)

Зміст

1 Черепичні порядки над дискретно нормованими кільцями

Означення 1.1. *Кільце A називається* ***напівмаксимальним****, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним).*

Теорема 1.2. *Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \cdots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \end{pmatrix} \tag{1}$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з простим елементом π, α_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i.

Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком.

Ми будемо використовувати наступне позначення: $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, де $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця Λ, т.б. $\Lambda = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок є *зведеним*, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Кільце $\mathcal{O}$ вкладається в класичне тіло часток $\mathcal{D}$, і (1) означає множину всіх матриць $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$ таких що $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj}$, де $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ — матричні одиниці кільця $M_n(\mathcal{D})$. Очевидно, що $Q = M_n(\mathcal{D})$ є класичним кільцем часток кільця Λ.

Зрозуміло, що кільце Λ є як нетеровим справа, так і нетеровим зліва.

Якщо R — радикал Джекобсона зведеного напівмаксимального порядку Λ, то $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ і $\beta_{ij} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$.

Означення 1.3. *Модуль M називається* ***дистрибутивним****, якщо для довільних його підмодулів K, L, N справедлива рівність*

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Очевидно підмодуль та фактор-модуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним. Модуль називається **напівдистрибутивним**, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається **напівдистрибутивним справа (зліва)**, якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A (${}_AA$) є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа та зліва кільце називається напівдистрибутивним.

Теорема 1.4. *Наступні умови для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A еквівалентні:*

a) кільце A напівдистрибутивне;

b) кільце A є прямим добутком напівпростого артінового кільця та напівмаксимального кільця.

Черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем — це нетерове первинне напівдосконале напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона. В цьому випадку $\mathcal{O} = eAe$ є дискретно нормованим кільцем для кожного примітивного ідемпотента $e \in A$.

Ми будемо писати $SPSD$-кільце A для напівдосконалого напівдистрибутивного кільця A.

О.Г. Завадський показав, що два зведених черепичних порядки в $M_n(D)$ ізоморфні тоді та тільки тоді, коли їх матриці показників отримуються одна з одної перетвореннями наступних двох типів:

(1) відніманням від i-го рядка цілого раціонального числа з одночасним додаванням цього числа до i-го стовпчика ;

(2) одночасною перестановкою двох рядків та відповідних їм стовпчиків.

Твердження 1.5. *Нехай* $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$ *— зведений черепичний порядок,* $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$*. Припустимо, що* A *— зведений черепичний порядок з матрицею показників* $\mathcal{E}(A)\} = (\theta_{ij})$*, отриманою з матриці* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *перетвореннями типу (1). Тоді* $[Q(\Lambda)] = [Q(A)]$*. Якщо* Λ *— зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка* $\sigma(\Lambda)$*, тоді* A *— також зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка* $\sigma(A) = \sigma(\Lambda)$*.*

Таким чином, при перетвореннях першого типу підстановка Кириченка та сагайдак зведеного горенштейнового черепичного порядку не змінюються.

Нехай при перетвореннях другого типу i-ий рядок (і стовпчик) матриці показників черепичного порядку стає $\tau(i)$-им, де τ — деяка підстановка.

Означення 1.6. *Нехай* σ *— підстановка множини* $\{1, 2, \ldots, n\}$*. Тоді* $P_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} e_{i\sigma(i)}$ *називається матрицею підстановки.*

Твердження 1.7. *При перетвореннях другого типу матриця суміжності* $[\tilde{Q}]$ *сагайдака* $Q(A)$ *змінюється за формулою:* $[\tilde{Q}] = P_\tau^T[Q]P_\tau$*, де* $[Q] = [Q(\Lambda)]$*. Якщо* Λ*— зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка* $\sigma(\Lambda)$*, тоді* A *— також зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка* $\sigma(A) = \tau^{-1}\sigma(\Lambda)\tau$*.*

Зазначимо, що при перетвореннях другого типу тип підстановки не змінюється.

Позначимо через $M_n(\mathbb{Z})$ кільце всіх квадратних $n \times n$-матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Нехай $\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$.

Означення 1.8. *Матриця* $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ *називається* **матрицею показників***, якщо* $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ *для* $i, j, k = 1, \ldots, n$ *та* $\alpha_{ii} = 0$ *для* $i = 1, \ldots, n$*. Ці співвідношення називаються* **кільцевими нерівностями***. Матриця показників* $\mathcal{E}$ *називається* **зведеною***, якщо* $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ *для* $i \neq j$*,* $i, j = 1, \ldots, n$*.*

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Покладемо $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ та $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$, і $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min\limits_{1 \leq k \leq n}(\beta_{ik} + \beta_{kj})$.

Теорема 1.9. *Матриця* $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ *є матрицею суміжності простого сильно звязного сагайдака.*

Означення 1.10. *Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ з матрицею суміжності $[Q(\mathcal{E})] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ називається* **сагайдаком зведеної матриці показників** $\mathcal{E}$.

Для елементів матриці суміжності сагайдака Q маємо наступні формули:
$q_{ij} = \gamma_{ij} - \beta_{ij} = \min_{k} (\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij} = \min\left(1, \min_{k \neq i,\, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \beta_{ij})\right) =$
$= \min\left(1, \min_{k \neq i,\, j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\right)$.
$q_{ii} = \min_{k} (\beta_{ik} + \beta_{ki}) - \beta_{ii} = \min\left(2, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki})\right) - 1 =$
$= \min\left(1, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right)$.
Звідси отримуємо, що $q_{ij} = 1$ при $i \neq j$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i, j$. $q_{ii} = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} > 1$ для всіх $k \neq i$.

Означення 1.11. *Дві матриці показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ та $\Theta = (\theta_{ij})$ називаються* **еквівалентними**, *якщо одна може бути отримана з іншої перетвореннями наступних двох типів:*

(1) віднімання цілого числа від елементів i-ого рядка з одночасним додаванням до елементів i-ого стовпчика цього числа,

(2) одночасна перестановка двох рядків та стовпчиків з тими ж номерами.

Означення 1.12. *Зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ називається* **горенштейновою**, *якщо існує підстановка σ множини $\{1, 2, \dots, n\}$ така, що*

$$\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)} \qquad \text{для всіх } i, k.$$

Підстановка σ позначається через $\sigma(\mathcal{E})$ і називається підстановкою Кириченка горенштейнової матриці показників.

Зазначимо, що черепичний порядок $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E} = (\alpha_{ij})\}$ горенштейновий тоді і тільки тоді, коли горенштейновою є його матриця показників $\mathcal{E}$. Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ матриці показників $\mathcal{E}$ співпадає з сагайдаком $Q(\Lambda)$ черепичного порядку Λ.

Означення 1.13. *Сагайдак Q називається допустимим, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

Означення 1.14. *Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається зваженим, якщо визначена функція $\omega\colon AQ \to \mathbb{R}$. Функція ω називається ваговою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки.*

Сума ваг всіх стрілок шляху називається вагою шляху.

Теорема 1.15. *Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, яка задовольняє наступним умовам:*

1. *вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geqslant 2$,*

2. *вага петлі в точці i менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i довжини $l \geqslant 2$,*

3. вага будь-якого циклу більше або дорівнює 1,

4. вага петлі дорівнює 1,

5. через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geqslant 2$, вага якого дорівнює 1.

Доведення. Нехай сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим. Тоді існує зведений черепичний порядок Λ такий, що $Q(\Lambda) = Q$.

Кожній стрілці σ_{ij} сагайдака Q, що веде із точки i в точку j, відповідає твірний елемент β_{ij} матриці $\mathcal{E}^{(1)}$. Нехай $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$. Сукупність всіх елементів $G = \{\beta_{ij}\}$ (по всіх стрілках сагайдака Q) — це мінімальна система твірних матриці $\mathcal{E}^{(1)}$. Довільний елемент β_{ij} подається у вигляді $\beta_{ij} = \min\left(\beta_{ii_1} + \beta_{i_1 i_2} + \cdots + \beta_{i_k j}\right)$ (тут мінімум береться по всіх шляхам $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2}\cdots\sigma_{i_k j}$ із точки i в точку j).

Оскільки $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ при $i \neq j$, $\beta_{ii} = 1$, то маємо рівності

$$\alpha_{ij} = \min\left(\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k j}\right) \text{ при } i \neq j. \tag{2}$$

$$1 = \min\left(\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k i}\right). \tag{3}$$

Визначимо вагову функцію $w\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ за правилом $w(\sigma_{ij}) = \beta_{ij}$, тобто

$$w(\sigma_{ij}) = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Покажемо, що визначена так вагова функція w задовольняє умовам (1) – (5) теореми.

Припустимо, що вага стрілки σ_{ij} більша або дорівнює вазі деякого шляху $P(i,j) = \sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2}\cdots\sigma_{i_k j}$ з точки i у точку j довжини $l \geq 2$:

$$\alpha_{ij} \geq \alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k j}.$$

Тоді твірний елемент β_{ij} лінійно виражається через інші твірні елементи

$$\beta_{ii_1}, \beta_{i_1 i_2}, \ldots, \beta_{i_k j}.$$

Це суперечить тому, що $\{\beta_{ij}\}$ — мінімальна система твірних елементів матриці $\mathcal{E}^{(1)}$. Отже, умови (1) та (2) виконуються.

Порядок Λ зведений, тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ при $j \neq i$. Звідси для будь-якого циклу $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2}\cdots\sigma_{i_k i}$, враховуючи, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k, маємо

$$\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \cdots + \alpha_{i_k i} \geq \alpha_{ii_k} + \alpha_{i_k i} \geq 1.$$

Отже, умова (3) виконується.

Оскільки для петлі $w(\sigma_{ii}) = \beta_{ii} = 1$, то умова (4) також виконується.

Елементи матриці суміжності $[Q] = (q_{ij})$ сагайдака черепичного порядку Λ обчислюються за формулами

$$q_{ij} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{kj} - \beta_{ij})$$

та

$$q_{ii} = \min_k(\beta_{ik} + \beta_{ki} - 1).$$

Якщо вершина i не має петлі, то $q_{ii} = 0$ та існує $k \neq i$ таке, що $\beta_{ik} + \beta_{ki} = 1$. Звідси $\beta_{ik} = 0$, $\beta_{ki} = 1$ або $\beta_{ik} = 1$, $\beta_{ki} = 0$.

Якщо $\beta_{ik} = 0$, $\beta_{ki} = 1$, то існує шлях з точки i в точку k ваги 0 та існує шлях з точки k в точку i ваги 1. Тому існує цикл, що проходить через точки i та k ваги 1. Аналогічно, якщо $\beta_{ik} = 1$ та $\beta_{ki} = 0$, то також існує такий цикл.

Отже, умова (5) виконується.

Навпаки, нехай Q сильно зв'язний сагайдак з ваговою функцією $w\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, яка задовольняє умови (1) – (5).

Покажемо, що цей сагайдак є допустимим, тобто існує зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Покладемо $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i та при $i \neq j$ $\alpha_{ij} = \min\limits_{P(i,j)} w(P(i,j))$ (мінімум береться по всім шляхам $P(i,j)$ з точки i у точку j).

Сагайдак Q сильно зв'язний, тому для будь-якого $k \neq i, j$ існує шлях $P(i,k)$ з точки i у точку k та існує шлях $P(k,j)$ з точки k у точки j. Зокрема, якщо $P(i,k)$ — шлях з точки i у точку k мінімальної ваги, $P(k,j)$ — шлях з точки k у точку j мінімальної ваги, то $w(P(i,k) = \alpha_{ik}$, $w(P(k,j) = \alpha_{kj}$. Тому існує шлях з точки i у точку j ваги $\alpha_{ik} + \alpha_{kj}$. Для шляху $P(i,j)$ мінімальної ваги отримаємо $w(P(i,j)) = \alpha_{ij}$ та $\alpha_{ij} \leq \alpha_{ik} + \alpha_{kj}$.

Якщо $k = i$ або $k = j$, то ця нерівність є очевидною.

Якщо припустити, що $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$ для деяких i, j $i \neq j$, то за визначенням α_{ij} існують шляхи $P(i,j)$ та $P(j,i)$ нульової ваги. Об'єднання цих шляхів є циклом нульової ваги, що суперечить умові (3). Отже, $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для всіх i, j $i \neq j$.

Таким чином, $\mathcal{E}$ — зведена матриця показників.

Покажемо тепер, що сагайдак цієї матриці показників співпадає з сагайдаком Q.

Нехай $[Q(\mathcal{E})] = (\bar{q}_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$.

Нагадаємо, що

$$\bar{q}_{ij} = \min\left(1, \min_{k \neq i,j}(\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\right)$$

при $i \neq j$ та

$$\bar{q}_{ii} = \min\left(1, \min_{k \neq i}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right).$$

Якщо $\bar{q}_{ij} = 0$ $i \neq j$, то існує $k \neq i, j$ таке, що $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$. Це означає, що існує шлях $P(i,j)$ з точки i у точку j мінімальної ваги, який проходить через точку k. Причому шлях $P(i,j)$ є об'єднанням шляхів $P(i,k)$ та $P(k,j)$, які теж є шляхами з i в k та з k в j мінімальної ваги. k Тоді в сагайдаку Q немає стрілки з точки i у точку j, бо інакше вага стрілки дорівнювала б вазі шляху $P(i,j)$ довжини $l \geq 2$, що суперечить умові (1). Отже, $q_{ij} = 0$.

Якщо $\bar{q}_{ii} = 0$, то існує $k \neq i$ таке, що $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 1$. Це означає, що існують шляхи $P(i,k)$ та $P(k,i)$ такі, що $w(P(i,k)) + w(P(k,i)) = 1$. Об'єднання цих шляхів є циклом ваги 1. Точка i в сагайдаку Q не має петлі, бо за умовою (4) вага петлі дорівнює 1 і отримуємо протиріччя умові (2): вага петлі дорівнює вазі циклу. Отже, $q_{ii} = 0$.

Нехай $\bar{q}_{ij} = 1$ $i \neq j$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > \alpha_{ij}$ для всіх $k \neq i, j$. Це означає за визначенням α_{ij}, що не існує вершини k $k \neq i, j$ такої, що шлях мінімальної ваги з точки i у точку j проходить через точку k. Тобто шлях мінімальної ваги з точки i у точку j має довжину меншу, ніж 2. Тому цей шлях — стрілка і $q_{ij} = 1$.

Нехай $\bar{q}_{ii} = 1$. Тоді $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} > 1$ для всіх $k \neq i$. Це означає, що будь-який цикл довжини $l \geq 2$, який проходить через точку i та не є петлею, має вагу більшу, ніж 1. Якщо припустити, що сагайдак Q не має петлі в точці i, то за умовою (5) повинен існувати цикл, що проходить через точку i та має вагу 1. Отримаємо протиріччя. Тому $q_{ii} = 1$. Таким чином, $Q(\mathcal{E}) = Q$. Теорема доведена. □

Зауваження 1.16. *Згідно умов (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги* 1.

Наслідок 1.17. *Простий сильнозв'язний сагайдак Q з петлею в кожній вершині є допустимим.*

Доведення. Нехай Q простий сильнозв'язний сагайдак з петлею в кожній вершині. Визначимо вагову функцію $\omega\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ наступним чином: $\omega(\sigma_{ij}) = 1$ для довільної стрілки $\sigma_{ij} \in AQ$.

Ця вагова функція задовольняє умовам теореми 1.15. Тому сагайдак Q є допустимим. □

Означення 1.18. *Нехай A — черепичний порядок. Правою (лівою) A-граткою називається правий (лівий) A-модуль, який є скінченнопородженим вільним $\mathcal{O}$-модулем.*

Зокрема, всі скінченнопороджені проективні A-модулі є A-гратками.

Серед всіх A-граток виділяються так звані незвідні A-гратки, тобто A-гратки, які містяться у простому правому (лівому) Q-модулі U (відп. V). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$) відносно включення. Будь-яка права (відп. ліва) незвідна A-гратка M (відп. N), яка лежить в U (відп. в V), є A-модулем з $\mathcal{O}$-базисом $\pi^{\alpha_1}e_1, \ldots, \pi^{\alpha_n}e_n$), причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i & \text{якщо } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases} \tag{4}$$

де буква T означає операцію транспонування.

Для наших цілей досить розглянути зведений черепичний порядок A. В цьому випадку елементи $S_r(A)$ ($S_l(A)$) знаходяться в бієктивній відповідності з чілочисельними рядками векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (стовпчиками векторів $\vec{a}^T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$), де $\vec{a}$ і $\vec{a}^T$ задовольняють умовам (4). Ми будемо записувати $[M] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

Позначимо через $Lat_r(A)$ (відп. $Lat_l(A)$) категорію правих (відп. лівих) A-граток.

Позначимо через $\mathcal{M}(\Lambda)$ частково впорядковану за включенням множину, утворену всіма проективними Λ-модулями, що містяться у фіксованому простому Q-модулі. Зазначимо, що частково впорядковані множини $\mathcal{M}_l(\Lambda)$ та $\mathcal{M}_r(\Lambda)$ відповідно лівих і правих модулів є антиізоморфними.

Множина $\mathcal{M}(\Lambda)$ цілком визначена матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$. А саме, якщо Λ є зведеним, то

$$\mathcal{M}(\Lambda) = \{p_i^z\}_{i=1,\ldots,z}^{z\in\mathbb{Z}},$$

де

$$p_i^z \le p_j^{z'} \Leftrightarrow \begin{cases} z - z' \ge \alpha_{ij}, \text{ if } \mathcal{M}(\Lambda) = \mathcal{M}_l(\Lambda); \\ z - z' \ge \alpha_{ji}, \text{ if } \mathcal{M}(\Lambda) = \mathcal{M}_r(\Lambda). \end{cases}$$

Очевидно, $\mathcal{M}(\Lambda)$ є нескінченною періодичною множиною.

Нехай Λ та Γ — черепичні порядки над дискретно нормованими кільцями $\mathcal{O}$ та Δ.

Означення 1.19. *Ізоморфізм $\varphi : \mathcal{M}(\Lambda) \simeq \mathcal{M}(\Gamma)$ називається* **узгодженим**, *якщо для довільних $A, B \in \mathcal{M}(\Lambda)$ таких що $A \simeq B$ маємо $\varphi(A) \simeq \varphi(B)$ та навпаки, якщо $\varphi(A) \simeq \varphi(B)$, то $A \simeq B$.*

Твердження 1.20. *Чрепичні порядки Λ і Γ Моріта-еквівалентні тоді та тільки тоді, коли дискретно нормовані кільця ізоморфні, а множини $\mathcal{M}(\Lambda)$ та $\mathcal{M}(\Gamma)$ є узгоджено ізоморфними.*

Зауваження 1.21. *Очевидно, що незвідні Λ-гратки $M_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ і $M_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i = \beta_i + z$ for $i = 1, \ldots, n$ і $z \in \mathbb{Z}$.*

2 Дуальність в нетерових кільцях

Ми будемо використовувати дуальність в нетерових кільцях, наслідуючи Х. Басса, Дєдоне, та К. Моріту.

Нехай M — правий A–модуль і нехай

$$M^* = Hom_A(M, A_A). \tag{5}$$

Очевидно що він є аддитивною групою і його можна розглядати як лівий A-модуль, якщо визначимо $a\varphi$ за формулою $(a\varphi)(m) = \varphi(ma)$, де $a \in A$ $\varphi \in M^*$, $m \in M$. Цей лівий A-модуль називається дуальним до правого A-модуля M. Аналогічно для кожного лівого A-модуля N можна визначити дуальний модуль

$$N^* = Hom_A(N, {}_A A),$$

який є правим A-модулем, якщо покласти $(\psi a)(x) = \psi(x)a$ для $a \in A$, $\psi \in N^*$, $x \in N$. Очевидно, що ізоморфні модулі мають ізоморфні дуальні модулі.

Нехай $f \colon N \to M$ — гомоморфізм правих A-модулів. Тоді можна визначити відображення $f^* \colon M^* \to N^*$ за формулою $f^*(\varphi) = \varphi f$ для $\varphi \in M^*$. Легко бачити, що f^* є A-гомоморфізмом лівих A-модулів. Цей гомоморфізм f^* називається дуальним до f.

Нехай F — вільний A-модуль зі скінченним вільним базисом $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Визначимо A-гомоморфізми $\varphi_i \colon F \to A$ за правилом $\varphi_i(f_j) = \delta_{ij}$ для $i, j = 1, 2, \ldots, n$, де δ_{ij} —символ Кронекера. Тоді $\varphi_i \in F^*$. Легко показати, що F^* є вільним A-модулем з вільним базисом $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Цей базис називається дуальним до базису $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Лема 2.1. *Нехай P — скінченно породжений проективний A-модуль. Тоді дуальний модуль P^* також є скінченно породженим проективним A-модулем.*

Доведення. Нехай P — скінченно породжений A-модуль, породжений елементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і нехай F — вільний модуль з вільним базисом $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Тоді існує епіморфізм $\pi\colon F \to P$ з $\pi(f_i) = x_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Оскільки модуль P проективний, то існує гомоморфізм $\sigma\colon P \to F$ такий що $\pi\sigma = 1_P$. Отже, $\sigma^*\pi^* = (\pi\sigma)^* = 1_{P^*}$. Тому модуль P^* є прямим доданком вільного модуля F^*, який є вільним зі скінченним базисом з n елементів. Таким чином, модуль P^* є скінченно породженим проективним A-модулем. $\square$

Лема 2.2. *Нехай A — нетерове справа кільце. Тоді модуль, дуальний до скінченно породженого лівого A-модуля, також є скінченно породженим.*

Доведення. Нехай M — скінченно породжений лівий A-модуль. Тоді існує точна послідовність $0 \to N \to F \to M \to 0$ з вільним модулем F зі скінченним базисом. Застосовуючи функтор дуальності $\mathrm{Hom}_A(*, A)$, ми отримуємо, що модуль M^* є підмодулем модуля F^*. Оскільки модуль F^* є вільним справа A-модулем зі скінченним базисом та кільце A є нетеровим справа кільцем, то модуль M^* також є скінченно породженим A-модулем. $\square$

Нехай M — правий A-модуль з дуальним модулем M^*. Тоді модуль M^* сам має дуальний модуль M^{**}. Нехай $m \in M$ та $f \in M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Визначимо відображення

$$\varphi_m\colon M^* \to A$$

рівністю $\varphi_m(f) = f(m)$. Очевидно, що

$$\varphi_m(f_1 + f_2) = \varphi_m(f_1) + \varphi_m(f_2).$$

Для довільного $a \in A$ ми маємо $\varphi_m(af) = af(m) = a\varphi_m(f)$. Тому φ_m є A-гомоморфіфзмом, тобто $\varphi_m \in M^{**}$. Розглянемо відображення

$$\delta_M\colon M \to M^{**} \tag{6}$$

визначене за правилом $\delta_M(m)(f) = f(m)$ для $m \in M$ і $f \in M^*$. Легко перевірити, що δ_M є A-гомоморфіфзмом.

Означення 2.3. *Модуль M називаєтьcя рефлексивним, якщо δ_M є ізоморфізмом. Модуль M називаєтьcя напіврефлексивним, якщо δ_M є мономорфізмом.*

Зазначимо, що скінченновимірний векторний простір є рефлексивним.

Лема 2.4. *Підмодуль напіврефлексивного модуля є напіврефлексивним та пряма сума рефлексивних модулів є рефлексивним модулем.*

Доведення. Нехай M — напіврефлексивний A-модуль та N є підмодулем модуля M. Покладемо $i\colon N \to M$ — занурення модуля N у модуль M. Тоді наступна діаграма

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\delta_N"] \arrow[d, "i"] & N^{**} \arrow[d, "i^{**}"] \\ M \arrow[r, "\delta_M"] & M^{**} \end{tikzcd}$$

є комутативною. Оскільки гомоморфізми i та δ_M є мономорфізмами, то і δ_N також є мономорфізмом. Тому модуль N є напіврефлексивним.

Нехай модуль N є прямим доданком рефлексивного модуля M. Тоді існує відображення включення $i\colon N \to M$ та епіморфізм $\pi\colon M \to N$ такий, що $\pi i = 1_N$. Тоді $\pi^{**} i^{**} = (\pi i)^{**} = 1_{N^{**}}$ є епіморфізмом. Наступна діаграма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta_M"] \arrow[d, "\pi"] & M^{**} \arrow[d, "\pi^{**}"] \\ N \arrow[r, "\delta_N"] & N^{**} \end{tikzcd}$$

є комутативною. Оскільки гомоморфізми δ_M є ізоморфізмом та π^{**} є епіморфізмом, то і δ_N також є епіморфізмом. Але за першою частиною цієї леми δ_N є ізоморфізмом, тобто модуль N є рефлексивним. ☐

Твердження 2.5. *Кожний скінченно породжений проективний модуль є рефлексивним. Зокрема, вільний модуль зі скінченним вільним базисом є рефлексивним.*

Доведення. Нехай F — вільний модуль зі скінченним вільним базисом $f_1, f_2, \dots, f_n$ і нехай $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — вільний базис модуля F^*, який дуальний до $f_1, f_2, \dots, f_n$. Нехай $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ — базис F^{**}, дуальний до базису $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Тоді $\delta_F(f_i)$ та ψ_i належать до $\mathrm{Hom}_A(F^*, A)$ і

$$\delta_F(f_i)(\varphi_j) = \varphi_j(f_i) = \delta_{ji} = \psi_i(\varphi_j).$$

Звідси випливає, що $\delta_F(f_i) = \psi_i$ і δ_F є ізоморфізмом, тобто модуль F рефлексивний.

Нехай модуль P є скінченнопородженим проективним модулем. Тоді P є прямим доданком вільного модуля зі скінченним базисом. Тому модуль P є рефлексивним за 2.4. ☐

Лема 2.6. *Модуль, дуальний до довільного модуля, є напіврефлексивним. Модуль, дуальний до рефлексивного модуля, є рефлексивним.*

Доведення. Нехай M — A-модуль. Якщо ми застосуємо функтор дуальності до A-гомоморфізму $\delta_M : M \to M^{**}$, то отримаємо A-гомоморфізм $\delta_M^*\colon M^{***} \to M^*$. Тоді легко показати, що

$$\delta_M^* \delta_{M^*} = 1_{M^*} \tag{7}$$

З цієї рівності випливає, що δ_{M^*} є мономорфізмом і тому модуль M^* є напіврефлексивним. Якщо модуль M рефлексивний, то гомоморфізм δ_M є ізоморфізмом і також δ_M^* є ізоморфізмом. Але з рівності 7 $\delta_{M^*} = (\delta_M^*)^{-1}$ є також ізоморфізмом, тобто модуль M^* є рефлексивним. ☐

Лема 2.7. *Нехай A — нетерове справа кільце. Тоді будь-який скінченно породжений підмодуль вільного модуля зі скінченним базисом є напіврефлексивним.*

Доведення. Це випливає з твердження 2.5 та леми 2.4. ☐

3 Дуальність в черепичних порядках

В цьому розділі ми введемо дуальність в черепичних порядках та вивчимо її властивості.

Твердження 3.1. *Нехай A — черепичний порядок з його класичним кільцем часток Q. Тоді Q є плоским та ін'єктивним правим і лівим A-модулем.*

Доведення. Класичне кільце часток Q є прямою границею плоских підмодулів $\pi^k A = a\pi^k$ модуля A для $k \in \mathbb{Z}$. Тому модуль Q є плоским.

Для доведення ін'єктивності Q використаємо критерій Бера. Нехай $\mathcal{I}$ — правий ідеал кільця A. Оскільки кільце A є нетеровим кільцем, то $\mathcal{I}$ є скінченно породженим ідеалом. Розглянемо діаграму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"] & A_A \\ & Q & \end{tikzcd}$$

де i — мономорфізм. Позаяк модуль Q є плоским, то послідовність

$$0 \longrightarrow I_A \otimes Q \xrightarrow{i \otimes 1_Q} A_A \otimes Q$$

є точною. Тоді ми отримуємо наступну діаграму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tilde{I} \arrow[r, "i\otimes 1_Q"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] & Q \\ & Q & \end{tikzcd}$$

де $\tilde{I} \simeq IQ$ та $\varphi \otimes 1_Q$. Кільце $Q = M_n(D)$ є простим кільцем, тому Q є двостороннім ін'єктивним Q-модулем. Тому за критерієм Бера існує гомоморфізм $\tilde{\psi}\colon Q \to Q$ такий, що $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}\bar{i}$. Звуженням $\bar{i}$ і $\tilde{\varphi}$ на I_A, $\tilde{\psi}$ на A_A ми отримуємо $\varphi = \psi i$. Отже, модуль Q є ін'єктивним A-модулем. $\square$

Тепер ми розглянемо скінченно породжені напіврефлексивні A-модулі.

Твердження 3.2. *Скінченно породжений A-модуль M є напіврефлексивним тоді і тільки тоді, коли M ізоморфний підмодулю вільного A-модуля скінченного рангу A^m.*

Доведення. Якщо $M \subset A^m$, то модуль M є напіврефлексивним за лемою 2.4.

Навпаки, нехай модуль M є скінченно породженим напіврефлексивним A-модулем. Ми будемо використовувати позначення $X^* = \mathrm{Hom}_A(X, A)$ для довільного A-модуля X. Епіморфізм $A^m \to M \to 0$ індукує мономорфізм $0 \to M^* \to (A^m)^*$. Але $A^* = \mathrm{Hom}_A(A, A) \simeq A$ і тому M^* ізоморфний підмодулю модуля A^m. Оскільки кільце A нетерове, то модуль M^* є скінченно породженим A-модулем і тому існує точна послідовність $A^r \to M^* \to 0$. Тоді $0 \to M^{**} \to A^r$ є мономорфізмом. Оскільки модуль M є напіврефлексивним, то $\delta_M : M \to M^{**}$ є мономорфізмом. Отже, модуль M ізоморфний підмодулю вільного A-модуля скінченного рангу. $\square$

Нехай A — черепичний порядок вигляду 1. Нагадаємо, що A-модуль M називається A-граткою, якщо він є скінченно породженим вільним $\mathcal{O}$-модулем, де $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце. Позначимо через $Lat_r(A)$ (відп. $Lat_l(A)$) категорію правих (відп. лівих) A-граток.

Твердження 3.3. *Нехай A — черепичний порядок. Тоді A-модуль M є скінченно породженим напіврефлексивним тоді і тільки тоді, коли M є A-граткою.*

Доведення. Нехай $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} \subset \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}D = Q = M_n(D)$. Позначимо через E_n одиничну матрицю в $M_n(D)$. Очевидно, що $E_n = \sum\limits_{i=1}^{n} e_{ii}$, де e_{ii} — локальні матричні ідемпотенти кільця A. Покладемо $X = \{x \in M_n(D) : xe_{ij} = e_{ij}x \text{ для } i,j = 1,\dots,n\}$ та $Y = \{y \in A : ye_{ij} = e_{ij}y \text{ для } i,j = 1,\dots,n\}$. Очевидно, що $X = \{dE_n\}$, де $d \in D$ та $Y = \{\alpha E_n\}$, де $\alpha \in \mathcal{O}$. Тому ми можемо вважати, що D є підкільцем кільця $M_n(D)$ а $\mathcal{O}$ є підкільцем кільця A (D співпадає з X, а $\mathcal{O}$ співпадає з Y). Тому A є вільним $\mathcal{O}$-модулем рангу n^2, тобто A-граткою. За твердженням 3.2 A-модуль M скінченно породжений напіврефлексивний тоді і тільки тоді, коли M є A-граткою. Очевидно, що $A \otimes_{\mathcal{O}} D = M_n(D) = Q$ та $M \otimes_A Q = M \otimes_A (A \otimes_{\mathcal{O}} D) = M \otimes_{\mathcal{O}} D$. В цьому випадку $\tilde{M} = M \otimes_{\mathcal{O}} D$ є скінченновимірним векторним простором над тілом D а модуль M є повною правою A-граткою в $\tilde{M}$, де $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} M = \dim_D \tilde{M}$. □

Нехай A — черепичний порядок вигляду 1. В цьому кільці виділимо підкільце з тією ж одиницею — одиничною матрицею $E_n = e_{11} + \dots + e_{nn}$, де e_{ii} — матричні ідемпотенти. Позначимо через $\mathcal{O}$ наступне підкільце кільця A:

$$\mathcal{O} = \{\pi^{\alpha}\varepsilon E_n \,|\, \varepsilon\text{— оборотній елемент в } \mathcal{O}, \pi\text{— простий елемент в } \mathcal{O}\}$$

Зрозуміло, що вказана множина є дискретно нормованим кільцем, яке ізоморфне першопочатковому кільцю $\mathcal{O}$. Будь-який скінченнопороджений A-модуль можна розглядати як $\mathcal{O}$-модуль, який також буде скінченнопородженим. $Lat_r(A)$ — множина всіх A-модулів, які є скінченнопородженими $\mathcal{O}$-модулями без скруту.

Твердження 3.4. *Нехай послідовність правих A-модулів*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

є точною. Якщо $L, N \in Lat_r(A)$, то $M \in Lat_r(A)$ також.

Доведення. Нехай $m \neq 0$, $m \in M$ та m — елемент скруту, тобто $m\pi^t E_n = 0$ для деякого натурального $t \in \mathbb{N}$. Тоді $p(m)\pi^t E_n = 0$ і $p(m) = 0$. Звідси $m \in \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, p$ та $m = i(l)$, де $l \in L$, і $m\pi^t E_n = i(l\pi^t E_n) = 0$. Тому $l\pi^t E_n = 0$. Оскільки $L \in Lat_r(A)$, то $l = 0$ а тоді і $m = 0$. □

Встановимо нову дуальність між категоріями $Lat_r(A)$ та $Lat_l(A)$. Нехай $M \in Lat_r(A)$. Позначимо $M^\star = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$. Для довільного $f \in M^\star$ і $a \in A$ визначимо af за формулою $(af)(m) = f(ma)$, де $m \in M$. Тоді легко перевірити, що $M^\star$ є лівим A-модулем. Модуль $M \in Lat_r(A)$, тому він є вільним $\mathcal{O}$-модулем зі скінченним $\mathcal{O}$-базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$. Ми можемо визначити $\mathcal{O}$-гомоморфізми $\varphi_i \colon M \to \mathcal{O}$ за формулою $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ для $i, j = 1, \ldots, n$, де δ_{ij} — символ Кронекера. Тоді $\varphi_i \in M^\star$. Легко бачити, що $M^\star$ є вільним $\mathcal{O}$-модулем з $\mathcal{O}$-базисом $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Цей $\mathcal{O}$-базис називається дуальним $\mathcal{O}$-базисом модуля $M^\star$. Отже, $M^\star \in Lat_l(A)$. Якщо $M \in Lat_l(A)$, то $M^\star \in Lat_r(A)$.

Нехай $\varphi\colon M \to N$ — гомоморфізм модулів $M, N \in Lat_r(A)$, тобто $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Тоді $\varphi^\star\colon N^\star \to M^\star$ можна визначити за формулою $(\varphi^\star f)(m) = f\varphi(m)$, де $f \in N^\star$. Це гомоморфізм з $N^\star$ у $M^\star$, тобто $\varphi^\star \in \mathrm{Hom}_A(N^\star, M^\star)$. Очевидно, що, якщо ми маємо гомоморфізми $\psi\colon L \to M$ та $\varphi\colon M \to N$, то $(\psi\varphi)^\star = \psi^\star\varphi^\star$ і $1_M^\star = 1_{M^\star}$. Крім цього, для будь-якого $M \in Lat_r(A)$ маємо $M^{\star\star} = M$ і для будь-якого $N \in Lat_l(A)$ справедливо $N^{\star\star} = N$. З іншої сторони, для довільного $\varphi\colon M \to N$ ми маємо $\varphi^{\star\star} = \varphi$. Є також очевидним, що $(M \oplus N)^\star = M^\star \oplus N^\star$.

Твердження 3.5. *Нехай L — підмодуль модуля M та $L, M/L \in Lat_r(A)$. нехай $p\colon M \to M/L$ натуральний природний епіморфізм Тоді $M \in Lat_r(A)$ і M має наступний $\mathcal{O}$-базис: $e_1, \ldots, e_s, p^{-1}(n_1), \ldots, p^{-1}(n_t)$, де $e_1, \ldots, e_s$ — це $\mathcal{O}$-базис L, а $n_1, \ldots, n_t$ — це $\mathcal{O}$-базис M/L.*

Доведення. За твердженням 3.4 $M \in Lat_r(A)$. Позначимо $N = M/L$. Нехай $e_1\alpha_1 + \cdots e_s\alpha_s + p^{-1}(n_1)\beta_1 + \cdots p^{-1}(n_t)\beta_t = 0$. Тоді $e_1\alpha_1 + \cdots e_s\alpha_s + p^{-1}(n_1\beta_1 + \cdots n_t\beta_t) = 0$. Очевидно, що $p(e_1\alpha_1 + \cdots e_s\alpha_s + p^{-1}(n_1\beta_1 + \cdots n_t\beta_t)) = n_1\beta_1 + \cdots n_t\beta_t = 0$. Тому $\beta_1 = \cdots \beta_t = 0$ і $e_1\alpha_1 + \cdots e_s\alpha_s = 0$. Звідси отримали $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$. Нехай $m \in M$. Тоді $p(m) = n_1\beta_1 + \cdots n_t\beta_t$ і $m - p^{-1}(n_1\beta_1 + \cdots n_t\beta_t) \in \mathrm{Ker}\, p$. Звідси $m - p^{-1}(n_1\beta_1 + \cdots n_t\beta_t) = e_1\alpha_1 + \cdots e_s\alpha_s$ та $m = e_1\alpha_1 + \cdots e_s\alpha_s + p^{-1}(n_1)\beta_1 + \cdots p^{-1}(n_t)\beta_t$. Твердження доведено. ☐

Твердження 3.6. *Нехай $L, M, N = M/L$ як і в попередньому твердженні. Нехай*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

точна послідовність. Тоді існує дуальний $\mathcal{O}$-базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_s, \ldots, p^\star(\theta_t)$ модуля $M^\star$, де $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — дуальний $\mathcal{O}$-базис модуля $L^\star$ а $\theta_1, \ldots, \theta_t$ — дуальний $\mathcal{O}$-базис модуля $N^\star$.

Доведення. За твердженням модуль має $\mathcal{O}$-базис $e_1, \ldots, e_s, p^{-1}(n_1), \ldots, p^{-1}(n_t)$, де $e_1, \ldots, e_s$ — це $\mathcal{O}$-базис L, а $n_1, \ldots, n_t$ — це $\mathcal{O}$-базис N. Перевіримо, що $\varphi_1, \ldots, \varphi_s, p^\star(\theta_1), \ldots, p^\star(\theta_t)$ є дуальним $\mathcal{O}$-базисом до $\mathcal{O}$-базису $e_1, \ldots, e_s, p^{-1}(n_1), \ldots, p^{-1}(n_t)$. За означенням $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ для $i, j = 1, \ldots, s$. Розглянемо
$p^\star(\theta_i)(p^{-1}(n_j)) = \theta_i p(p^{-1}(n_j)) = \theta_i(n_j) = \delta_{ij}$ для $i, j = 1, \ldots, t$. ☐

Наслідок 3.7. *Нехай*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

точна послідовність як вище. Тоді послідовність

$$0 \longrightarrow N^\star \xrightarrow{p^\star} M^\star \longrightarrow L^\star \longrightarrow 0$$

є точною.

Наслідок 3.8. $\mathrm{Ext}^1_A(N, {}_AA^\star) = 0$ *для довільного $N \in Lat_r(A)$.*

Доведення. Нехай

$$0 \longrightarrow {}_AA^\star \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

точна послідовність. За наслідком 3.7 ми отримуємо, що

$$0 \longrightarrow N^\star \xrightarrow{p^\star} M^\star \longrightarrow {}_AA \longrightarrow 0$$

є точною послідовністю лівих A-модулів. З проективності ${}_AA$ маємо $M^\star \simeq A \oplus N^\star$. Звідси $M^{\star\star} = M \simeq {}_AA \oplus N$, тобто $\mathrm{Ext}^1_A(N, {}_AA^\star) = 0$. $\square$

Просто встановити дуальність незвідних та цілком розкладних A-граток.

Нехай $M \in S_r(A)$ та $M = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i\pi^{\alpha_i}\mathcal{O}$. Якщо $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — дуальний $\mathcal{O}$-базис для $e_1, \ldots, e_n$, то $\pi^{-\alpha_1}\varphi_1, \ldots, \pi^{-\alpha_n}\varphi_n$ — дуальний $\mathcal{O}$-базис для $\mathcal{O}$-базису $e_1\pi^{\alpha_1}, \ldots, e_n\pi^{\alpha_n}$. Отже, якщо $M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то $M^\star = (-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n)^T$. Використовуючи запис $N = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T$, маємо $N^\star = (-\beta_1, \ldots, -\beta_n)$. Легко бачити, що

$$(M_1 + M_2)^\star = M_1^\star \cap M_2^\star \ \text{ та } (M_1 \cap M_2)^\star = M_1^\star + M_2^\star$$

для довільних $M_1, M_2 \in S_r(A)$. Більше того, якщо $M_1 \subset M_2$ — включення двох незвідних A-граток, то $M_2^\star \subset M_1^\star$. (В цьому випадку гратка M_2 називається надмодулем гратки M_1).

Означення 3.9. *A-гратка M називається відносно ін'єктивною, якщо $M \simeq {}_AP^\star$, де ${}_AP$ — скінченно-породжений проективний лівий A-модуль.*

Означення 3.10. *A-гратка M називається цілком розкладною, якщо вона є прямою сумою нерозкладних A-граток.*

Наслідок 3.11. *Відносно ін'єктивна A-гратка M є цілком розкладною і довільна відносно ін'єктивна нерозкладна A-гратка M має наступний вигляд: $M \simeq {}_AP^\star$, де ${}_AP$ — нерозкладний проективний лівий A-модуль.*

Доведення. Черепичний порядок

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} e_i\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$$

є цілком розкладною правою A-граткою

$$A_A = e_{11}A \oplus \cdots \oplus e_{nn}A$$

цілком розкладною лівою A-граткою

$${}_AA = Ae_{11} \oplus \cdots \oplus Ae_{nn}.$$

Кожний скінченнопороджений лівий проективний A-модуль ${}_AP$ має наступний вигляд: ${}_AP = (Ae_{11})^{m_1} \oplus \cdots \oplus (Ae_{nn})^{m_n}$. Очевидно, що ${}_AP \in Lat_l(A)$ та

$${}_AP^\star = (Ae_{11})^{\star m_1} \oplus \cdots \oplus (Ae_{nn})^{\star m_n}.$$

Отже, ${}_AP^\star$ є цілком розкладною правою A-граткою. Зокрема, A-гратка M нерозкладна тоді і тільки тоді, коли $M = (Ae_{ii})^\star$ для деякого $i = 1, \ldots, n$. Наслідок доведено. $\square$

В подальшому ми вважатимемо, що черепичний порядок A є зведеним. В цьому випадку матриця показників $\mathcal{E}(A)$ є зведеною, тобто $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i \neq j$. A-гратка $N \subset M_n(D)$ називається повною, якщо $N \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{O}})^{n^2}$ як правий $\mathcal{O}$-модуль. Якщо повна A-гратка N є лівим модулем, то

$$N = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\gamma_{ij}}\mathcal{O}.$$

В цьому випадку матрицю (γ_{ij}) будемо називати матрицею показників A-гратки N та записувати через $\mathcal{E}(N)$. Повні A-гратки, які є лівими A-модулями, будемо називати дробовими ідеалами порядку A. Позначимо через Δ цілком розкладну гратку $A_A^\star$.

Лема 3.12. *Цілком розкладна ліва A-гратка Δ є цілком розкладною правою A-граткою і*

$$\mathcal{E}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{21} & \cdots & -\alpha_{n1} \\ -\alpha_{12} & 0 & \cdots & -\alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Покажемо, що k-ий рядок $(-\alpha_{1k}, -\alpha_{2k}, \ldots, -\alpha_{nk})$ матриці $\mathcal{E}(\Delta)$ визначає незвідну праву A-гратку. Позначимо $\beta_i = -\alpha_{ik}$. Кільцеві нерівності $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ можна переписати у вигляді $-\alpha_{ik} + \alpha_{ij} \geq -\alpha_{jk}$, тобто $\beta_i + \alpha_{ij} \geq \beta_j$, звідки випливає твердження леми. $\square$

Наслідок 3.13. *Дробовий ідеал Δ є відносно ін'єктивною правою та відносно ін'єктивною лівою A-граткою.*

Доведення. Доведення слідує з співвідношення ${}_A\Delta^\star = A_A$. $\square$

Нехай A — зведений черепичний порядок та $R = \operatorname{rad} A$. Тоді

$$\mathcal{E}(R) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

та

$$\mathcal{E}({}_AR^\star) = \mathcal{E}(R_A^\star) = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha_{21} & \cdots & -\alpha_{n1} \\ -\alpha_{12} & -1 & \cdots & -\alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $X = {}_AR^\star$.

Лема 3.14. *Для кожного $i = 1, \ldots, n$ модуль $e_{ii}X$ (Xe_{ii}) є единим мінімальним надмодулем модуля $e_{ii}\Delta$ (Δe_{ii}) і $e_{ii}X/e_{ii}\Delta = U_i$, $Xe_{ii}/\Delta e_{ii} = V_i$, де U_i — простий правий A-модуль а V_i — простий лівий A-модуль.*

Доведення. Доведення для лівого випадку випливає з того факту, що модуль $e_{ii}R$ є єдиним максимальним підмодулем модуля $e_{ii}A$ та з властивостей дуальності і леми про анігіляцію. Доведення для правого випадку аналогічне. □

Відмітимо ще раз, що гратками $e_{ii}\Delta$ (Δe_{ii}) вичерпуються всі нерозкладні відносно ін'єктивні праві (ліві) A-гратки (з точністю до ізоморфізму) та $e_{ii}X$ (Xe_{ii}) є єдиним мінімальним надмодулем гратки $e_{ii}\Delta$ (Δe_{ii}). Крім цього, поняття нерозкладної відносно ін'єктивної A-гратки і поняття незвідної відносно ін'єктивної A-гратки співпадають.

Нехай A_1 і A_2 — еквівалентні в сенсі Моріти черепичні порядки. Тоді відносно ін'єктивні незвідні A_1-гратки відповідають відносно ін'єктивним незвідним A_2-браткам. Тому з леми 3.14 випливає наступна лема.

Лема 3.15. *Кожна відносно ін'єктивна незвідна A-гратка Q має тільки один мінімальний надмодуль. Нехай Q_1 та Q_2 — відносно ін'єктивні незвідні A-гратки і нехай $X_1 \supset Q_1$ та $X_2 \supset Q_2$ — єдині мінімальні надмодулі граток Q_1 та Q_2 відповідно. Тоді прості A-модулі X_1/Q_1 і X_2/Q_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $Q_1 \simeq Q_2$.*

4 Ізоморфізм черепичних порядків

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$, $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$ — зведені черепичні порядки над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ і $\Lambda \simeq A$

Нехай φ — ізоморфне перетворення першого типу, тобто $\varphi(\Lambda) = A$,
$\varphi(\mathcal{E}(\Lambda)) = \mathcal{E}(A)$, де $\varphi(\alpha_{ij}) = a_{ij} = \alpha_{ij} + t_i - t_j$ для деякого набору $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$.

Для довільного ізоморфного перетворення ψ другого типу, що задається підстановкою τ, маємо $\psi(A) = \Omega$, $\psi(\mathcal{E}(A)) = \mathcal{E}(\Omega) = (\omega_{ij})$, де $\omega_{\tau(i)\tau(j)} = a_{ij}$.

Теорема 4.1. *Два зведені черепичні порядка $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$ і $B = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(B) = (b_{ij})\}$ в $M_n(D)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує підстановка τ така, що елементи матриці $C = (c_{ij})$, де $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$, задовольняють рівність $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ для всіх i, j, k.*

Доведення. Нехай зведені черепичні порядки $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$ і $B = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(B) = (b_{ij})\}$ в $M_n(D)$ ізоморфні. Тоді матрицю показників $\mathcal{E}(B)$ можна отримати з матриці $\mathcal{E}(A)$ наступним чином: спочатку виконати над $\mathcal{E}(A)$ ізоморфні перетворення φ першого типу, а потім над $\varphi(\mathcal{E}(A))$ виконати еквівалентні перетворення ψ другого типу.

Якщо $\varphi(\mathcal{E}(A)) = \mathcal{E}(G) = (g_{ij})$, то $g_{ij} = a_{ij} + t_i - t_j$ для деякого набору цілих чисел $t_1, \ldots, t_n$. Нехай перетворення ψ задається підстановкою τ. Тоді $b_{\tau(i)\tau(j)} = g_{ij} = a_{ij} + t_i - t_j$. Позначимо $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$, $C = (c_{ij})$. Оскільки $c_{ij} = t_i - t_j$, то вони задовольняють рівність $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ для всіх i, j, k.

Навпаки, нехай для зведених черепичних порядків $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$ і $B = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(B) = (b_{ij})\}$ в $M_n(D)$ існує підстановка τ така, що елементи матриці $C = (c_{ij})$, де $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$, задовольняють рівність $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ для всіх i, j, k. Виконаємо над зведеною матрицею показників $\mathcal{E}(A)$ ізоморфне перетвореня ψ другого типу, що задається підстановкою τ. Отримаємо зведену матрицю показників $\mathcal{E}(F) = \psi(\mathcal{E}(A)) = (f_{ij})$, де $f_{\tau(i)\tau(j)} = a_{ij}$ для всіх i, j.

Виконаємо тепер над $\mathcal{E}(F)$ ізоморфне перетворення φ першого типу $\varphi(\mathcal{E}(F)) = \mathcal{E}(H) = (h_{ij})$, де $h_{ij} = f_{ij} + x_i - x_j$, $x_i = c_{\theta(i)1}$, $\theta = \tau^{-1}$. Тоді

$$h_{\tau(i)\tau(j)} = f\tau(i)\tau(j) + x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)} = a_{ij} + c_{i1} - c_{j1}.$$

Оскільки $c_{i1} - c_{j1} = c_{ij}$ та $a_{ij} + c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)}$, то $h_{\tau(i)\tau(j)} = b_{\tau(i)\tau(j)}$ для всіх i, j.

Отже, $\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(B)$ і черепичні порядки A та B ізоморфні. Теорема доведена. □

Зауваження 4.2. *Цілочисельна матриця C з умови теореми 4.1 кососиметрична та $c_{ij} = c_{i1} - c_{j1}$ для всіх i, j. Дійсно, оскільки $c_{ii} = b_{\tau(i)\tau(i)} - a_{ii} = 0$ для всіх i, то $c_{ij} + c_{ji} = c_{ii} = 0$. Звідси $c_{ji} = -c_{ij}$, тобто $C = -C^T$, C — кососиметрична матриця. Крім цього, $c_{ij} = c_{ik} - c_{jk}$ для всіх i, j, k. Зокрема, $c_{ij} = c_{i1} - c_{j1}$.*

Наслідок 4.3. *Два зведених черепичних порядка $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})$ і $B = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(B) = (b_{ij})$ в $M_n(D)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує підстановка τ така, що*

$$b_{\tau(i)\tau(j)} + b_{\tau(j)\tau(k)} - b_{\tau(i)\tau(k)} = a_{ij} + a_{jk} - a_{ik} \tag{8}$$

для всіх i, j, k.

Доведення. Рівність (8) при $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)} - a_{ij}$ еквівалентна рівності $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$. □

5 Горенштейнові черепичні порядки та їх матриці показників

Означення 5.1. *Черепичний порядок Λ будемо називати горенштейновим черепичним порядком, якщо Λ є біективною Λ-браткою, тобто Λ^* є проективною лівою Λ-гратко.*

Приклад 5.2. *Нехай Λ – зведений черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$, де $\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тут $P_1^* \simeq Q_5$, $P_2^* \simeq Q_6$, $P_4^* \simeq Q_3$, $P_5^* \simeq Q_2$, $P_6^* \simeq Q_1$, але $P_1^* \not\simeq Q_5$. Тому Λ не є горенштейновим.*

У подальшому горенштейновий черепичний порядок ми будемо часто називати просто горенштейновим порядком.

Теорема 5.3. *Наступні умови для зведеного черепичного порядку $\Lambda = \{\mathcal{O},\ \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{pq})\}$ еквівалентні:*

(a) порядок Λ є горенштейновим;

(b) існує підстановка $\sigma\colon i \to \sigma(i)$ така що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n$.

Доведення. горенштейновий черепичний порядок Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$. Правий регулярний модуль Λ_Λ розкладається у пряму суму нерозкладних проективних Λ-граток $\Lambda_\Lambda = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, де $P_i = e_{ii}\Lambda$, причому модулі P_i та P_j неізоморфні при $i \neq j$. Аналогічно ${}_\Lambda\Lambda = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$, де $Q_j = \Lambda e_{jj}$. Черепичний порядок Λ є горенштейновим, тому Λ^*_Λ є проективною лівою Λ-граткою. Оскільки $(P_1 \oplus \cdots \oplus P_n)^* \simeq P_1^* \oplus \cdots \oplus P_n^*$ та $P_i \simeq P_j$ при $i \neq j$, то $(P_1 \oplus \cdots \oplus P_n)^* \simeq Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$. Тому маємо бієкцію σ між $P_1^*, \ldots, P_n^*$ та $Q_1, \ldots, Q_n$, яка є підстановкою. Нехай $P_i^* \simeq Q_{\sigma(i)}$. Позаяк $P_i^* = (-\alpha_{i1}, \ldots, -\alpha_{in})^T$ та $Q_{\sigma(i)} = (\alpha_{1\sigma(i)}, \ldots, \alpha_{n\sigma(i)})^T$, то $\alpha_{i1} + \alpha_{1\sigma(i)} = \alpha_{i2} + \alpha_{2\sigma(i)} = \cdots = \alpha_{in} + \alpha_{n\sigma(i)} = C_i$. Тобто $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = C_i$ для всіх k. Зокрема, при $k = i$ маємо $\alpha_{ii} + \alpha_{i\sigma(i)} = C_i$. Отже, $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для всіх k.

Нехай Λ — зведений черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ та існує підстановка σ така, що $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для всіх i, j. Для кожного i маємо рівності $\alpha_{i1} + \alpha_{1\sigma(i)} = \alpha_{i2} + \alpha_{2\sigma(i)} = \cdots = \alpha_{in} + \alpha_{n\sigma(i)}$. Звідси незвідні Λ-гратки P_i^* та $Q_{\sigma(i)}$ є ізоморфними. Тоді ${}_\Lambda\Lambda^* \simeq P_1^* \oplus \cdots \oplus P_n^* \simeq Q_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus Q_{\sigma(n)}$ і ${}_\Lambda\Lambda^*$ є проективною лівою Λ-граткою. Отже, Λ є горенштейновим черепичним порядком. □

Означення 5.4. *Підстановка σ горенштейнової матриці називається підстановкою Кириченка.*

Означення 5.5. *Зведена горенштейнова матриця показників $\mathcal{E}$ називається* **циклічною**, *якщо $\sigma(\mathcal{E})$ є циклом.*

Лема 5.6. *Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ та підстановкою Кириченка σ. Тоді $\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} - \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}$.*

Доведення. Додамо до обох частин рівності $\alpha_{i\sigma(i)} = \alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)}$ число $\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Отримаємо

$\alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)}$, або $\alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(j)}$.

Подамо $\alpha_{i\sigma(i)}$ та $\alpha_{j\sigma(j)}$ як суми двох доданків: $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{k\sigma(j)}$. Звідси отримуємо $\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} - \alpha_{k\sigma(j)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}$. Далі маємо

$$(\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{k\sigma(k)}) + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} - (\alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{k\sigma(k)}) = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}.$$

Знову подамо $\alpha_{k\sigma(k)}$ як суму двох доданків:

$$(\alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)}) + \alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} - (\alpha_{k\sigma(j)} + \alpha_{k\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)}) = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}.$$

Тому

$$\alpha_{\sigma(i)\sigma(j)} + \alpha_{\sigma(j)\sigma(k)} - \alpha_{\sigma(i)\sigma(k)} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}.$$

□

6 Циклічні горенштейнові порядки

Лема 6.1. *Нехай Λ – циклічний зведений горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ та підстановкою Кириченка $\sigma = (12\ldots n)$. Якщо $\alpha_{i1} = 0$ для всіх $i = 1,\ldots,n$, то $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ при $1 < j \leq n$.*

Доведення. За лемою 5.6 $\alpha_{ij}+\alpha_{ji} = \alpha_{\sigma^m(i)}\alpha_{\sigma^m(j)}+\alpha_{\sigma^m(j)}\alpha_{\sigma^m(i)}$ для будь-якого натурального m. При $i = 1$ маємо

$$\alpha_{1j} + \alpha_{j1} = \alpha_{\sigma^m(1)}\alpha_{\sigma^m(j)} + \alpha_{\sigma^m(j)}\alpha_{\sigma^m(1)}.$$

Оскільки σ – це циклічна підстановка, то існує таке m, що $\sigma^m(j) = 1$. З співвідношення $\sigma^m(j) \equiv j + m \pmod n$ випливає $j + m = n + 1$. Звідки $m = n + 1 - j$. Тоді $\sigma^m(1) = 1 + m = n + 2 - j$ та $\alpha_{1j} + \alpha_{j1} = \alpha_{n+2-j,1} + \alpha_{1,n+2-j}$. За умовою леми $\alpha_{j1} = \alpha_{n+2-j,1} = 0$, тому $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$. □

Твердження 6.2. *Нехай $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}$ — це довільний набір дійсних чисел. Існує єдина матриця (α_{ij}) така, що дані числа є елементами першого рядка цієї матриці, $\alpha_{kk} = \alpha_{k1} = 0$ і $\alpha_{ik} + \alpha_{ki+1} = \alpha_{ii+1}$ для всіх $k = 1,\ldots,n; i = 1,\ldots,n-1$.*

Доведення. Покладемо $\alpha_{k1} = 0$. Решту елементів α_{km} матриці (α_{ij}) отримаємо з системи лінійних рівнянь $\alpha_{ik} + \alpha_{ki+1} = \alpha_{ii+1} \quad k = 1,\ldots,n; i = 1,\ldots,n-1$.

Дійсно, $\alpha_{kk+1} = \alpha_{k1}+\alpha_{1k+1} = \alpha_{1k+1}$ при $k < n$. З рівності $\alpha_{1k}+\alpha_{k2} = \alpha_{12}$ отримуємо, що $\alpha_{k2} = \alpha_{12}-\alpha_{1k}$. Оскільки $\alpha_{k2}+\alpha_{2k+1} = \alpha_{kk+1} = \alpha_{1k+1}$, то $\alpha_{2k+1} = \alpha_{1k+1}-\alpha_{k2} = \alpha_{1k+1}+\alpha_{1k}-\alpha_{12}$ або $\alpha_{2q} = \alpha_{1q}+\alpha_{1q-1}-\alpha_{12}$ при $q > 1$.

Далі, $\alpha_{2k} + \alpha_{k3} = \alpha_{23} = \alpha_{13}$, отже $\alpha_{k3} = \alpha_{13} - \alpha_{2k} = \alpha_{13} + \alpha_{12} - \alpha_{1k} - \alpha_{1k-1}k > 1$. З рівності $\alpha_{k3} + \alpha_{3k+1} = \alpha_{kk+1} = \alpha_{1k+1}$ знаходимо α_{3k+1}: $\alpha_{3k+1} = \alpha_{1k+1} - \alpha_{k3} = \alpha_{1k+1} + \alpha_{1k} + \alpha_{1k-1} - \alpha_{13} - \alpha_{12}$ або $\alpha_{3q} = \alpha_{1q} + \alpha_{1q-1} + \alpha_{1q-2} - \alpha_{13} - \alpha_{12}$ при $q > 2$.

Припустимо, що для $l < n$ елементи l-того стовпчика α_{kl}, де $k > l - 2$, виражаються через елементи першого рядка таким чином:

$$\alpha_{kl} = \sum_{j=2}^{l} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{l-2} \alpha_{1k-j}\ ,\ k > l - 2,$$

а елементи l-того рядка α_{lq}, де $q > l - 1$, виражаються через елементи першого рядка наступним чином:

$$\alpha_{lq} = \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{1q-j} - \sum_{j=2}^{l} \alpha_{1j}\ ,\ q > l - 1.$$

Знайдемо вирази для елементів $l+1$-шого стовпчика та $l+1$-шого рядка через елементи першого рядка.

З рівності $\alpha_{lk} + \alpha_{k,l+1} = \alpha_{l,l+1} = \alpha_{1,l+1}$ випливає, що

$$\alpha_{k,l+1} = \alpha_{1,l+1} - \alpha_{lk} = \alpha_{1,l+1} - \left(\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{1k-j} - \sum_{j=2}^{l} \alpha_{1j}\right) =$$

$$= \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_{1,k-j} = \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{(l+1)-2} \alpha_{1,k-j},$$

$$k > l-1 \text{ або } k > (l+1)-2.$$

Далі, маємо $\alpha_{k,l+1} + \alpha_{l+1,k+1} = \alpha_{k,k+1} = \alpha_{1,k+1}$. Отже,

$$\alpha_{l+1,k+1} = \alpha_{1,k+1} - \alpha_{k,l+1} = \alpha_{1,k+1} - \left(\sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{(l+1)-2} \alpha_{1,k-j} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{(l+1)-1} \alpha_{1,(k+1)-j} - \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j}, \quad k+1 > (l+1)-1 \text{ або}$$

$$\alpha_{l+1,q} = \sum_{j=0}^{(l+1)-1} \alpha_{1,q-j} - \sum_{j=2}^{l+1} \alpha_{1j}, \quad q > (l+1)-1.$$

Таким чином, за індукцією за номером стовпчика та рядка знаходимо невідомі елементи стовпчиків та рядків матриці (α_{ij}). Вони виражаються через елементи першого рядка за формулами:

$$\alpha_{km} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} \text{ при } k > m-2; \tag{9}$$

$$\alpha_{km} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} \text{ при } m > k-1. \tag{10}$$

При цьому нами розглянуто всі рівняння $\alpha_{ik} + \alpha_{ki+1} = \alpha_{ii+1}$, $k = \overline{1,n}; i = \overline{1,n-1}$. Очевидно, що розв'язок системи лінійних рівнянь задовольняє рівнянням цієї системи. Крім цього, з (9) маємо

$$\alpha_{kk} = \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{k-2} \alpha_{1,k-j} = 0 \ , \ k = 2, \ldots, n,$$

а з (10) —

$$\alpha_{kk} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1,k-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} = 0 \ , \ k = 2, \ldots, n.$$

□

З формули (9) випливає, що

$$\alpha_{m-1,m} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1,m-1-j} = \sum_{t=0}^{m-2} \alpha_{1,m-t} - \sum_{t=2}^{m-1} \alpha_{1t} - \alpha_{11} =$$

$$= \sum_{t=0}^{(m-1)-1} \alpha_{1,m-t} - \sum_{t=2}^{m-1} \alpha_{1t}, \quad m = \overline{3,n}.$$

Остання рівність — це вираз $\alpha_{m-1,m}$ за формулою (10).

Тобто початкова система рівнянь є несуперечливою.

Отже, ми отримали матрицю (α_{ij}), у якої

$$\alpha_{km} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 1, \\ \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum\limits_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j}, & \text{якщо } k \geq m > 1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum\limits_{j=2}^{k} \alpha_{1j}, & \text{якщо } 1 < k < m, \\ \alpha_{1m}, & \text{якщо } k = 1. \end{cases} \tag{11}$$

Наслідок 6.3. *Нехай* (α_{ij}) *— це матриця, елементи якої задовольняють (11) і* $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ *при* $j = 2, \ldots, n$. *Тоді* $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ *для всіх* $i, j = 1, \ldots, n$, *де* $\sigma = (12 \ldots n)$.

Доведення. Оскільки $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$, то

$$\alpha_{nm} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1n-j} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{i=2}^{m} \alpha_{1,n+2-i} = 0$$

і $\alpha_{nm} + \alpha_{m1} = \alpha_{n1} = 0$ для всіх m. Отже, елементи матриці (α_{ij}) задовольняють умову $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$, де $\sigma = (12 \ldots n)$. □

Твердження 6.4. *Нехай* (α_{ij}) *— це матриця, елементи якої задовольняють рівність (11). Тоді для кожної трійки попарно різних чисел* i, j, k *існують такі* p, q, *що* $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik} = \alpha_{pq}$.

Доведення. Перетворимо рівності (9)-(10):

$$\alpha_{km} = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} = \sum_{t=2}^{m} \alpha_{1t} - \sum_{t=k-m+2}^{k} \alpha_{1t} \quad \text{при } k \geq m > 1,$$
$$\alpha_{km} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum_{j=2}^{k} \alpha_{1j} = \sum_{t=m-k+1}^{m} \alpha_{1t} - \sum_{t=2}^{k} \alpha_{1t} \quad \text{при } m \geq k > 1.$$

Позначимо $S_{ijk} = \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}$.

Легко перевірити, що при попарно різних i, j, k виконується рівність

$$\alpha_{pq} = \begin{cases} \alpha_{i-k+1,j-k+1}, & \text{якщо } \min(i,j,k) = k, \\ \alpha_{k-j,i-j+1}, & \text{якщо } \min(i,j,k) = j, \\ \alpha_{j-i,k-i}, & \text{якщо } \min(i,j,k) = i. \end{cases}$$

У випадках, коли хоча б два індекси співпадають, отримуємо

$$S_{ijj} = \alpha_{ij} + \alpha_{jj} - \alpha_{ij} = 0,$$

$$S_{iik} = \alpha_{ii} + \alpha_{ik} - \alpha_{ik} = 0,$$

$$S_{iji} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} - \alpha_{ii} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \alpha_{1,|i-j|+1} > 0.$$

□

Наслідок 6.5. *Матриця (α_{ij}), елементи якої невід'ємні, задовольняють рівностям (11) і $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ для всіх $2 \leq j \leq n$, є матрицею показників зведеного циклічного горенштейнового порядка з підстановкою Кириченка $\sigma = (12 \cdots n)$.*

Твердження 6.6. *Матриця (α_{ij}) показників циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядку Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (12 \cdots n)$, у якої $\alpha_{i1} = 0$ для $i = \overline{1,n}$, є симетричною відносно бічної діагоналі.*

Доведення. Очевидно, матриця (α_{ij}) є симетричною відносно бічної діагоналі, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{n+1-j,n+1-i}$. Перевіркою переконуємося, що $\alpha_{km} - \alpha_{n+1-m,n+1-k} = 0$ для всіх k, m.

$\square$

На підставі наслідків 6.3, 6.5 та твердження 6.6 отримуємо теорему, що повністю описує циклічні зведені горенштейнові черепичні порядки.

Теорема 6.7. *Будь-який циклічний зведений горенштейновий черепичний порядок є ізоморфним зведеному порядку Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$, матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ якого має такі властивості:*

1. Всі елементи матриці (α_{ij}) виражаються за формулами (11) через $\left[\frac{n}{2}\right]$ натуральні параметри $\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1\left[\frac{n}{2}\right]+1}$.

2. $\alpha_{1j} = \alpha_{1,n+2-j}$ для всіх j.

3. Матриця (α_{ij}) є симетричною відносно бічної діагоналі.

Навпаки, кожна невід'ємна цілочисельна матриця (α_{ij}) із властивостями 1-3 , для якої $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ $(i \neq j)$, є матрицею показників деякого циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядку з підстановкою Кириченка $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$.

Елементи матриці (α_{ij}) показників циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядку Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (12 \cdots n)$ задовольняють рівність

$$\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}}{n^2} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \left(\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)}\right)}{2n^2} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)}}{2n^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)}}{2n}.$$

Величина $t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{|\langle\sigma\rangle|} \alpha_{i\sigma(i)}}{|\langle\sigma\rangle|}$ відіграє важливу роль для циклічних горенштейнових порядків.

Теорема 6.8. *Нехай Λ — зведений циклічний горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ та підстановкою Кириченка σ. Порядок Λ ізоморфний порядку Λ', матриця показників якого є лінійною комбінацією степенів переставної матриці підстановки Кириченка σ тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{|\langle\sigma\rangle|} \cdot \sum\limits_{i} \alpha_{i\sigma(i)} = t$ — натуральне число.*

Доведення. Будемо вважати, що $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$.

Всі циклічні зведені горенштейнові черепичні порядки з нульовим першим стовпчиком описані теоремою 6.7. Елементи матриці показників такого порядку задовольняють співвідношення

$$\alpha_{km} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 1, \\ \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum\limits_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} & \text{якщо } k \geq m > 1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum\limits_{j=2}^{k} \alpha_{1j} & \text{якщо } 1 < k < m, \\ \alpha_{1m} & \text{якщо } k = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Нехай $\frac{1}{|\langle\sigma\rangle|} \cdot \sum\limits_{i} \alpha_{i\sigma(i)} = t$ — натуральне число. Покажемо, що перетвореннями першого типу можна з матриці показників порядку Λ отримати матрицю показників порядку Λ' з потрібною властивістю. Виконаємо перетворення першого типу: до елементів k-ого рядка додамо число x_k, а від елементів k-ого стовпчика віднімемо число x_k. Тоді $\alpha'_{km} = \alpha_{km} + x_k - x_m$. Для знаходження x_k будемо вимагати, щоб $\alpha'_{k\sigma(k)} = t$ для всіх k. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{gathered} x_1 - x_2 = t - \alpha_{12}, \\ x_2 - x_3 = t - \alpha_{23}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} - x_n = t - \alpha_{n-1n}, \\ x_n - x_1 = t - \alpha_{n1}. \end{gathered}$$

Ця система має розв'язок

$$\begin{gathered} x_2 = \alpha_{12} - t + x_1, \\ x_3 = \alpha_{12} + \alpha_{23} - 2t + x_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = \alpha_{12} + \alpha_{23} + \dots + \alpha_{k-1k} - (k-1)t + x_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{12} + \alpha_{23} + \dots + \alpha_{n-1n} - (n-1)t + x_1. \end{gathered} \tag{13}$$

Тому перетвореннями першого типу матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ зводиться до матриці $(\alpha'_{ij}) = \mathcal{E}(\Lambda')$, у якої $\alpha'_{k\sigma(k)} = t$ для всіх k.

Покажемо тепер, що $\alpha'_{ij} = \alpha'_{\sigma(i)\sigma(j)}$ для всіх i, j. Дійсно, з рівностей $\alpha'_{i\sigma(i)} = t = \alpha'_{ij} + \alpha'_{j\sigma(i)}$ і $\alpha'_{j\sigma(j)} = t = \alpha'_{j\sigma(i)} + \alpha'_{\sigma(i)\sigma(j)}$ отримуємо $\alpha'_{ij} = \alpha'_{\sigma(i)\sigma(j)}$ для всіх i, j.

Тому $\mathcal{E}(\Lambda') = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha'_{1j} P_\sigma^{j-1}$, де $P_\sigma = \sum\limits_{j=1}^{n} e_{j\sigma(j)}$, e_{ij} — матричні одиниці.

В обернену сторону твердження теореми очевидне. □

7 Горенштейнові порядки з попарно взаємно простими циклами

Перетворення двох типів не змінюють суму всіх елементів матриці показників. Легко бачити, що справедливе наступне твердження.

Твердження 7.1. *Нехай Λ і Λ' — ізоморфні зведені горенштейнові черепичні порядки з матрицями показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$, $\mathcal{E}(\Lambda') = (\alpha'_{ij})$ та підстановками Кириченка σ, σ' відповідно. Тоді $\sum\limits_{i,j}^{n} \alpha_{ij} = \sum\limits_{i,j}^{n} \alpha'_{ij}$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha'_{i\sigma'(i)}$.*

Лема 7.2. *Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ і підстановкою Кириченка σ, причому $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$ — розклад підстановки σ в добуток циклів, що не перетинаються. Тоді*

$$\frac{\sum\limits_{i} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{|<\sigma_1>|} = \frac{\sum\limits_{k} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{|<\sigma_2>|}.$$

Доведення. Можна вважати, що $\sigma_1 = (1\ 2\ \cdots\ n)$ та $\sigma_2 = (n+1\ n+2\ \cdots\ n+m)$ (цього можна досягти ізоморфними перетвореннями другого типу над рядками і стовпчиками матриці показників $\mathcal{E}(\Lambda)$). Тоді матриця показників $\mathcal{E}(\Lambda)$ має вигляд

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}_1$ — матриця показників зведеного циклічного горенштейнового порядку з підстановкою Кириченка σ_1, $\mathcal{E}_2$ — матриця показників зведеного циклічного горенштейнового порядку з підстановкою Кириченка σ_2. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma_1(i)} = \alpha_{i\sigma_1(i)}$ для всіх $j = n+1, \ldots, n+m$, $i = 1, \ldots, n$ і $\alpha_{kl} + \alpha_{l\sigma_2(k)} = \alpha_{k\sigma_2(k)}$ для всіх $l = 1, \ldots, n$, $k = n+1, \ldots, n+m$. Тоді отримаємо

$$m \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)} = \sum_{j=n+1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)} = \sum_{j=n+1}^{n+m} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma_1(i)}) =$$
$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{n+m} (\alpha_{kl} + \alpha_{l\sigma_2(k)}) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)} = n \cdot \sum_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}.$$

Звідси $m \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)} = n \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}$, тобто

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}.$$

$\square$

Наслідок 7.3. *Якщо n і m — взаємно прості числа, то*

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{m} = t,$$

де t — натуральне число.

Лема 7.2 дає необхідну умову для того, шоб за циклічними горенштейновими черепичними порядками $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ з підстановками Кириченка $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ відповідно можна побудувати горенштейновий черепичний порядок Λ з підстановкою Кириченка σ, яка є добутком циклів, що відповідають циклам $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ і відповідний двосторонній пірсовський роклад Λ має на головній блочній діагоналі $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$. Позначимо цю умову через Ω.

$$(\Omega) \qquad \frac{\sum\limits_i \alpha_{i\sigma_1(i)}}{|\langle\sigma_1\rangle|} = \cdots = \frac{\sum\limits_i \alpha_{i\sigma_s(i)}}{|\langle\sigma_s\rangle|}.$$

Лема 7.4. *Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ і підстановкою Кириченка $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$, де $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \cdots & n+m \end{pmatrix}$, причому числа n та m взаємно прості. Тоді порядок Λ ізоморфний порядку Λ' з матрицею показників*

$$\mathcal{E}' = \begin{pmatrix} \mathcal{E}'_1 & x_{12}U_{12} \\ x_{21}U_{21} & \mathcal{E}'_2 \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2$ — матриці показників зведених циклічних горенштейнових порядків з підстановками $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ і $\sigma_2 = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \cdots & n+m \end{pmatrix}$, які є лінійними комбінаціями степенів переставних матриць P_{σ_1}, P_{σ_2} відповідно, U_{12}, U_{21} — матриці, всі елементи яких дорівнюють одиниці, x_{12}, x_{21} — цілі числа, причому

$$x_{12} + x_{21} = t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}.$$

Доведення. Матриця показників горенштейнового черепичного порядку, підстановка Кириченка якого є добутком циклів, що не перетинаються, має блочний вигляд

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}_1 = e\mathcal{E}e$, $e = e_{11} + \cdots + e_{nn}$, $f = E - e$, $\mathcal{E}_2 = f\mathcal{E}f$ — матриці показників циклічних горенштейнових порядків з підстановками Кириченка σ_1, σ_2 відповідно. Позаяк числа n і m взаємно прості, то за наслідком 7.3

$$t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}$$

є натуральним числом. Тоді за теоремою 6.8 матриці $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ перетвореннями першого типу зводяться до матриць $\mathcal{E}'_1$ і $\mathcal{E}'_2$, які є лінійними комбінаціями степенів переставних матриць P_{σ_1}, P_{σ_2} відповідно, причому $\alpha_{i\sigma_1(i)} = \alpha_{k\sigma_2(k)} = t$ для всіх $i = 1, \ldots, n$ і $k = n+1, \ldots, n+m$. З умови горенштейновості маємо $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma_1(i)} = \alpha_{i\sigma_1(i)} = t$ для всіх $i = 1, \ldots, n$, $j = n+1, \ldots, n+m$ і $\alpha_{kl} + \alpha_{l\sigma_2(k)} = \alpha_{k\sigma_2(k)} = t$ для всіх $l = 1, \ldots, n$ та $k = n+1, \ldots, n+m$. Звідси при $j = k$ и $l = \sigma_1(i)$ отримуємо $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma_1(i)} = \alpha_{j\sigma_1(i)} + \alpha_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$, тобто $\alpha_{ij} = \alpha_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$. Оскільки порядки підстановок σ_1 і σ_2 взаємно прості, то $\alpha_{ij} = \alpha_{1n+1}$ для всіх $i = 1, \ldots, n$, $j = n+1, \ldots, n+m$. Покладемо $\alpha_{1n+1} = x_{12}$ — ціле раціональне число. Тоді $\alpha_{kl} = \alpha_{n+11} = t - x_{12}$. Отже, матриця показників $\mathcal{E}'$ буде мати вигляд

$$\mathcal{E}' = \begin{pmatrix} \mathcal{E}'_1 & x_{12}U_{12} \\ x_{21}U_{21} & \mathcal{E}'_2 \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2$ — матриці показників зведених циклічних горенштейнових порядків з підстановками $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ і $\sigma_2 = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \cdots & n+m \end{pmatrix}$ відповідно, які є лінійними комбінаціями степенів переставних матриць P_{σ_1}, P_{σ_2} відповідно, U_{12}, U_{21} — матриці, всі елементи яких дорівнюють одиниці,

$$x_{12} + x_{21} = t = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma_1(i)}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} \alpha_{k\sigma_2(k)}}{m}.$$

□

Теорема 7.5. *Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$, підстановка Кириченка σ якого є добутком циклів, що не перетинаються, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m$, причому довжини циклів підстановок попарно взаємно прості. Тоді порядок Λ ізоморфний порядку Λ' з підстановкою Кириченка $\sigma' = \sigma'_1 \cdots \sigma'_m$ і матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda') = (\alpha'_{ij})$ виду*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & x_{12}U_{12} & \cdots & x_{1m}U_{1m} \\ x_{12}U_{21} & \mathcal{E}_2 & \cdots & x_{2m}U_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1}U_{m1} & x_{m2}U_{m2} & \cdots & \mathcal{E}_m \end{pmatrix},$$

де

$$x_{ij} + x_{ji} = t = \frac{\sum\limits_{k=1}^{|<\sigma_i>|} \alpha_{k\sigma_i(k)}}{|<\sigma_i>|}$$

для всіх $i, j = 1, \ldots m$, $i \neq j$ та $x_{ij} + x_{js} \geq x_{is}$ для всіх попарно різних $i, j, s = 1, \ldots m$, $\mathcal{E}_k$ — матриці показників циклічних горенштейнових порядків з спряженими до σ_k підстановками Кириченка σ'_k, які є лінійними комбінаціями переставних матриць $P_{\sigma'_k}$ $(k = 1, \ldots, m)$.

Доведення. Горенштейновий черепичний порядок Λ ізоморфний порядку Λ'' з підстановкою Кириченка $\sigma' = \sigma'_1 \cdots \sigma'_m$, де кожна підстановка σ'_k діє на множині послідовних натуральних чисел. Тоді матриця показників порядку Λ'' буде мати вид

$$\mathcal{E}(\Lambda'') = \begin{pmatrix} \mathcal{E}''_1 & \mathcal{E}''_{12} & \cdots & \mathcal{E}''_{1m} \\ \mathcal{E}''_{21} & \mathcal{E}''_2 & \cdots & \mathcal{E}''_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E}''_{m1} & \mathcal{E}''_{m2} & \cdots & \mathcal{E}''_m \end{pmatrix}.$$

Позаяк порядки підстановок σ'_k попарно взаємно прості, то

$$t = \frac{\sum\limits_{k=1}^{|<\sigma'_i>|} \alpha''_{k\sigma'_i(k)}}{|<\sigma'_i>|} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{|<\sigma_i>|} \alpha_{k\sigma_i(k)}}{|<\sigma_i>|}$$

для всіх $i = 1, \ldots m$ і t є натуральним числом. Отже, матриці показників $\mathcal{E}''_k$ з підстановками Кириченка σ'_k перетвореннями першого типу зводяться до вигляду, в якому вони є лінійною комбінацією степенів своїх переставних матриць $P_{\sigma'_k}$.

Для довільних i та j ($i \neq j$) розглянемо горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка $\sigma'_i \cdot \sigma'_j$ і матрицею показників

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}''_i & \mathcal{E}''_{ij} \\ \mathcal{E}''_{ji} & \mathcal{E}''_j \end{pmatrix}.$$

За лемою 7.4 його матриця показників зводиться до виду

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}'_i & x_{ij}U_{ij} \\ x_{ji}U_{ji} & \mathcal{E}'_j \end{pmatrix},$$

де матриці $\mathcal{E}'_i$, $\mathcal{E}'_j$ є лінійними комбінаціями степенів своїх переставних матриць. Отже, матриця показників буде мати вигляд

$$\mathcal{E}(\Lambda') = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & x_{12}U_{12} & \cdots & x_{1m}U_{1m} \\ x_{12}U_{21} & \mathcal{E}_2 & \cdots & x_{2m}U_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1}U_{m1} & x_{m2}U_{m2} & \cdots & \mathcal{E}_m \end{pmatrix}.$$

Нерівності $x_{ij} + x_{js} \geq x_{is}$ випливають з кільцевих нерівностей $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$. $\square$

8 Горенштейнові порядки зі взаємно простими циклами у сукупності

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений горенштейновий черпичний порядок з підстановкою Кириченка σ, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$ — розклад підстановки σ в добуток циклів, що не перетинаються, m_k — довжина циклу σ_k. Можна вважати, що $\sigma_k = \begin{pmatrix} g_k+1 & g_k+2 & \cdots & g_k+m_k \end{pmatrix}$ (цього можна досягти перетвореннями другого типу), де $g_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} m_j$ при $k > 1$, $g_1 = 0$. Нехай $f_k = e_{g_k+1 g_k+1} + e_{g_k+2 g_k+2} + \cdots + e_{g_k+m_k g_k+m_k}$, $1 = f_1 + \cdots + f_s$ — розклад одиниці кільця Λ в суму взаємно ортогональних ідемпотентів. Двосторонній пірсовський розклад кільця Λ має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1s} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Lambda_{s1} & \Lambda_{s2} & \cdots & \Lambda_{ss} \end{pmatrix},$$

де Λ_{kk} — зведений циклічний горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m_k \end{pmatrix}$. Відповідно до цього матриця показників порядку має вигляд

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \cdots & \mathcal{E}_{1s} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \cdots & \mathcal{E}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E} & \mathcal{E}_{s2} & \cdots & \mathcal{E}_{ss} \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{E}_{kk}$ — матриця показників циклічного горенштейнового зведеного черепичного порядку Λ_{kk}. Запишемо умову горенштейновості порядку Λ в матричному вигляді $\mathcal{E} + P_\sigma \mathcal{E}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma(k)}\}U$ або

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \cdots & \mathcal{E}_{1s} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \cdots & \mathcal{E}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E}_{s1} & \mathcal{E}_{s2} & \cdots & \mathcal{E}_{ss} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{\sigma'_1} & O & \cdots & O \\ O & P_{\sigma'_2} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & P_{\sigma'_s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}^T & \mathcal{E}_{21}^T & \cdots & \mathcal{E}_{s1}^T \\ \mathcal{E}_{12}^T & \mathcal{E}_{22}^T & \cdots & \mathcal{E}_{s2}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E}_{1s}^T & \mathcal{E}_{2s}^T & \cdots & \mathcal{E}_{ss}^T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{diag}\{\alpha'_{k\sigma_1(k)}\} & O & \cdots & O \\ O & \mathrm{diag}\{\alpha'_{k\sigma_2(k)}\} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & \mathrm{diag}\{\alpha'_{k\sigma_s(k)}\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1s} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{s1} & U_{s2} & \cdots & U_{ss} \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо систему матричних рівнянь

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{jj} + P_{\sigma'_j}\mathcal{E}_{jj}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}U_{jj} \\ \mathcal{E}_{ij} + P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ji}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij} \\ \mathcal{E}_{ji} + P_{\sigma'_j}\mathcal{E}_{ij}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}U_{ji} \end{cases}$$

Зведені циклічні горенштейнові черепичні порядки описані в теоремі 6.7. Елементи матриці показників $\mathcal{E}$ циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядку Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (12\cdots n)$ і з нульовим першим стовпчиком обчислюються за формулами

$$\alpha_{km} = \begin{cases} 0 & \text{якщо} & m = 1 \\ \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_{1j} - \sum\limits_{j=0}^{m-2} \alpha_{1k-j} & \text{якщо} & k \geq m > 1 \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_{1m-j} - \sum\limits_{j=2}^{k} \alpha_{1j} & \text{якщо} & 1 < k < m \\ \alpha_{1m} & \text{якщо} & k = 1 \end{cases},$$

причому $\alpha_{1j} = \alpha_{1n+2-j}$ для всіх j. Матриця показників зведеного черепичного порядку не містить двох нульових стовпчиків або рядків. Елементи матриці показників $\mathcal{E}$ циклічного зведеного горенштейнового черепичного порядку Λ з підстановкою Кириченка $\sigma = (12\cdots n)$ і з довільним першим стовпчиком обчислюються за формулами

$$\alpha'_{km} = \alpha_{km} + x_k - x_m.$$

Крім цього, елементи блочних матриць $\mathcal{E}_{11}, \mathcal{E}_{22}, \dots, \mathcal{E}_{ss}$ задовольняють умову (Ω), тобто має місце рівність

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m_1} \alpha_{k\sigma'_1(k)}}{m_1} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m_2} \alpha_{k\sigma'_2(k)}}{m_2} = \cdots = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m_s} \alpha_{k\sigma'_s(k)}}{m_s}.$$

Для знаходження $\mathcal{E}_{ij}$ маємо систему

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{ij} + P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ji}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij}, \\ \mathcal{E}_{ji} + P_{\sigma'_j}\mathcal{E}_{ij}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}U_{ji}. \end{cases} \tag{14}$$

Звідси

$$\mathcal{E}_{ij} + P_{\sigma'_i}\left(\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}U_{ji} - P_{\sigma'_j}\mathcal{E}_{ij}^T\right)^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij}$$

або

$$\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma'_j}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij} - P_{\sigma'_i}^T U_{ij}\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}.$$

Враховуючи, що переставна матриця при множенні лише переставляє рядки або стовпчики матриці-співмножника, маємо

$$\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma'_j}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_i(k)}\}U_{ij} - U_{ij}\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma'_j(k)}\}. \tag{15}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma'_j}^T = 0$ та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Розглянемо розв'язок однорідного рівняння.

Лема 8.1. *Нехай $\sigma_1 = (12\cdots n)$, $\sigma_2 = (12\cdots m)$, $(n,m) = d$, $n = du$, $m = dv$. Розв'язок рівняння $X - P_{\sigma_1}XP_{\sigma_2}^T = 0$ має наступний блочний вигляд $X = \begin{pmatrix} F & \cdots & F \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F & \cdots & F \end{pmatrix} \in M_{u\times v}(F)$, де $F \in M_d(\mathbb{Z})$ і F є лінійною комбінацією з довільними коефіцієнтами степенів переставної матриці $P_\tau = \sum\limits_{k=1}^{d} e_{k\tau(k)}$, $\tau = (12\cdots d)$.*

Доведення. Рівняння $X = P_{\sigma_1}XP_{\sigma_2}^T$ можна подати у вигляді $x_{ij} = x_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$. Звідси $x_{ij} = x_{\sigma_1^k(i)\sigma_2^k(j)}$ для довільного цілого k. Покажемо, що для довільних цілих чисел p, q таких, що $0 < i+pd \leqslant n$, $0 < j+qd \leqslant m$ виконується рівність $x_{ij} = x_{i+pd,j+qd}$.

Для довільного цілого k мають місце співвідношення $\sigma_1^k(i) \equiv i + k(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(j) \equiv j + k(\mathrm{mod}\ m)$. Оскільки числа u та v взаємно прості, то існують натуральні числа a та b такі, що $p-q = bv-au$. Покладемо $k = pd + an + cnm = qd + bm + cnm$. Тоді $\sigma_1^k(i) \equiv i + k \equiv i + pd(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(j) \equiv j + k \equiv j + qd(\mathrm{mod}\ m)$. Звідси випливає, що $x_{ij} = x_{i+pd,j+qd}$. Це означає, що матриця X розбивається на uv однакових квадратних блоків F порядку d (по u блоків у блочному стовпчику та по v блоків у блочному рядку матриці X). Отже, $X = \begin{pmatrix} F & \cdots & F \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F & \cdots & F \end{pmatrix} \in M_{u\times v}(F)$. Покажемо тепер, що $x_{ij} = x_{\tau(i)\tau(j)}$ при $i,j \leqslant d$, де $\tau = (12\cdots d)$.

Якщо $i,j < d$, то при $k = 1$ маємо $x_{ij} = x_{\sigma_1^k(i)\sigma_2^k(d)} = x_{i+1,j+1} = x_{\tau(i)\tau(j)}$.

Нехай $i < d$, $j = d$. Позаяк числа u та v взаємно прості, то $1 = \delta v - \gamma u$ для деяких цілих чисел δ та γ. Покладемо $k = 1 + \gamma n + cnm = 1 - d + \delta m + cnm$. Тоді $\sigma_1^k(i) \equiv i + k \equiv i + 1 + \gamma n + cnm \equiv i + 1(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(d) \equiv d + k \equiv d + 1 - d + \delta m + cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$. Отже,$x_{\tau(i)\tau(d)} = x_{i+1,1} = x_{\sigma_1^k(i)\sigma_2^k(d)} = x_{id}$.

Аналогічно при $i = d$, $j < d$ покладемо $k = 1-d-\gamma n+cnm = 1-\delta m+cnm$. Тоді $\sigma_1^k(d) \equiv d+k \equiv 1-\gamma n+cnm \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(j) \equiv j+k \equiv j+1-\delta m+cnm \equiv j+1(\mathrm{mod}\ m)$. Отже,$x_{\tau(d)\tau(j)} = x_{1,j+1} = x_{\sigma_1^k(d)\sigma_2^k(j)} = x_{dj}$.

При $i = d$, $j = d$ покладемо $k = 1 - d + cnm$. Тоді $\sigma_1^k(d) \equiv d + k \equiv d + 1 - d + cnm \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$, $\sigma_2^k(d) \equiv d + k \equiv d + 1 - d + cnm \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$. Отже,$x_{\tau(d)\tau(d)} = x_{1,1} = x_{\sigma_1^k(d)\sigma_2^k(d)} = x_{dd}$.

Таким чином, $x_{ij} = x_{\tau(i)\tau(j)}$ при $i, j \leqslant d$. Тому $F = x_{11}E + x_{12}P_\tau + x_{13}P_\tau^2 + \cdots + x_{1d}P_\tau^{d-1}$. □

Твердження 8.2. *Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка σ, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$ — розклад підстановки в добуток циклів, що не перетинаються, причому довжини циклів σ_k взаємно прості в сукупності, тобто $(|\langle\sigma_1\rangle|, \cdots, |\langle\sigma_s\rangle|) = 1$. Тоді $\frac{1}{|\langle\sigma_1\rangle|}\sum\limits_i^{\alpha_{i\sigma_1(i)}} = \cdots = \frac{1}{|\langle\sigma_s\rangle|}\sum\limits_j^{\alpha_{j\sigma_2(j)}} = t$, де t — натуральне число.*

Доведення. Нехай m_k — довжина циклу σ_k, $Y_k = \sum\limits_i \alpha_{i\sigma_k(i)}$. Оскільки $(m_1, \ldots, m_s) = 1$, то існують цілі числа $a_1, \ldots, a_s$ такі що $a_1 \quad m_1 + \ldots + a_s \quad m_s = 1$. За лемою 7.2 $\frac{Y_p}{m_p} = \frac{Y_q}{m_q}$ або $m_qY_p = m_pY_q$. Помножимо цю рівність на a_q. Отримаємо $a_qm_qY_p = a_qm_pY_q$. Звідси $\sum\limits_{q\neq p} a_qm_qY_p = \sum\limits_{q\neq p} a_qm_pY_q$ або $Y_p \cdot \sum\limits_{q\neq p} a_qm_q = m_p \cdot \sum\limits_{q\neq p} a_qY_q$. З урахуванням рівності $(m_1, \ldots, m_s) = 1$ маємо $Y_p \cdot (1 - a_pm_p) = m_p \cdot \sum\limits_{q\neq p} a_qY_q$. Числа $1 - a_pm_p$ та m_p взаємно прості, тому Y_p ділиться на m_p для всіх p. □

Теорема 8.3. *Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O},\ \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка σ, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$ — розклад підстановки σ в добуток циклів, що не перетинаються. Нехай m_k — довжина циклу $\sigma_k = (g_k + 1\, g_k + 2\, \ldots\, g_k + m_k)$, де $g_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} m_j$ для $k > 1$, $g_1 = 0$, нехай $d_{ij} = (m_i, m_j)$ — найбільший спільний дільник чисел m_i, m_j та $(m_1, \ldots, m_s) = 1$. Тоді порядок Λ ізоморфний порядку Λ' з підстановкою Кириченка $\sigma' = \sigma_1' \cdots \sigma_s'$ і матрицею показників $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \cdots & \mathcal{E}_{1s} \\ \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & \cdots & \mathcal{E}_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{E}_{s1} & \mathcal{E}_{s2} & \cdots & \mathcal{E}_{ss} \end{pmatrix}$, де $\frac{1}{m_i}\sum\limits_{k=1}^{m_i} \alpha'_{k\sigma'(k)} = t \in \mathbb{N}$ для всіх $i = 1, \ldots s$. Матриця $\mathcal{E}_{kk}$ є матрицею показників циклічного горенштейнового порядку з підстановкою Кириченка $\sigma_k' = (1\, 2\, \ldots\, m_k)$ і є лінійною комбінацією степенів переставної матриці $P_{\sigma_k'}$ $(k = 1, \ldots, s)$. Матриця $\mathcal{E}_{kl} = \begin{pmatrix} F_{kl} & \cdots & F_{kl} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{kl} & \cdots & F_{kl} \end{pmatrix}$, $k \neq l$, є $\frac{m_k}{d_{kl}} \times \frac{m_l}{d_{kl}}$ блочною матрицею, де F_{kl} є квадратною $d_{kl} \times d_{kl}$ матрицею, яка є лінійною комбінацією степенів переставної матриці $P_{\tau_{kl}}$ з $\tau_{kl} = (1\, 2\, \ldots\, d_{kl})$.*

Доведення. За твердженням 8.2 $\frac{1}{|\langle\sigma_1\rangle|}\sum\limits_i^{\alpha_{i\sigma_1(i)}} = \cdots = \frac{1}{|\langle\sigma_s\rangle|}\sum\limits_j^{\alpha_{j\sigma_2(j)}} = t$, де t — натуральне число. Тоді кожна діагональна матриця $\mathcal{E}_{kk}$ ізоморфними перетвореннями зводиться до матриці $\mathcal{E}'_{kk}$, яка є лінійною комбінацією переставної матриці $P_{\sigma_k'}$, причому $\alpha_{i\sigma_k(i)} = t$ для всіх i та k. Тому матричне рівняння $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma_i'}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma_j'}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_i'(k)}\}U_{ij} - U_{ij}\mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_j'(k)}\}$ для $\mathcal{E}_{ij}$ набуває вигляду $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma_i'}\mathcal{E}_{ij}P_{\sigma_j'}^T = 0$. Використовуючи лему 8.1, отримуємо твердження теореми. □

Зауваження 8.4. *Теорема 8.3 описує зведені горенштейнові черепичні порядки* $\Lambda = \{\mathcal{O},\ \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ *з підстановками Кириченка* σ, *де* $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$ *— розклад підстановки* σ *в добуток циклів, що не перетинаються, і довжини циклів взаємно прості у сукупності. Насправді ця теорема описує і частину тих зведених горенштейнових черепичних порядків, для яких немає обмежень на цикли, але виконується "посилена" умова* (Ω)*:*

$$\frac{\sum\limits_i \alpha_{i\sigma_1(i)}}{|\langle\sigma_1\rangle|} = \cdots = \frac{\sum\limits_i \alpha_{i\sigma_s(i)}}{|\langle\sigma_s\rangle|} = t,\ \text{де } t \text{ — натуральне число.}$$

9 Кількість параметрів, через які виражаються всі елементи горенштенової матриці показників

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (15) дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння $\mathcal{E}_{ij} - P_{\sigma'_i}\mathcal{E}_{ij}P^T_{\sigma'_j} = 0$ та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Розглянемо розв'язок однорідного рівняння.

Зауважимо, що частинний розв'язок неоднорідного рівняння залежить від підстановок σ'_i, σ'_j та елементів $\alpha_{k\sigma'_i}(k)$, $\alpha_{k\sigma'_j}(k)$, які належать діагональним блокам $\mathcal{E}_{ii}$, $\mathcal{E}_{jj}$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння не залежить від елементів діагональних блоків. Тому матрицю $\mathcal{E}$ можна подати як суму $\mathcal{E} = A + B$, де $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ — блочні $(s \times s)$ - матриці та $A_{ii} = 0$ для всіх i, A_{ij} — загальний розв'язок рівняння, $B_{ii} = \mathcal{E}_{ii}$ для всіх i, B_{ij} — частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Матриця $\mathcal{E}_{kk}$ за теоремою 6.7 залежить від $\left[\frac{m_k}{2}\right]$ параметрів. Оскільки вони задовольняють умову (Ω), то серед них лише

$$b = \left[\frac{m_1}{2}\right] + \left[\frac{m_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{m_s}{2}\right] - (s-1)$$

незалежних. Отже, елементи матриці B виражаються через b незалежних параметрів.

Блоки A_{ij} та A_{ji} є розв'язками системи $A_{ij} + P_{\sigma'_i}A^T_{ji} = 0$, $A_{ji} + P_{\sigma'_j}A^T_{ij} = 0$. Тому $A_{ji} = -P_{\sigma'_j}A^T_{ij}$ і елементи A_{ij} та A_{ji} виражаються через одні і ті ж самі параметри.

За лемою 8.1 розв'язок рівняння є блочною $(u \times v)$ - матрицею

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} F_{ij} & \cdots & F_{ij} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{ij} & \cdots & F_{ij} \end{pmatrix},$$

де $F_{ij} \in M_{d_{ij}}(\mathbb{Z})$, $d_{ij} = (m_i, m_j)$, $m_i = d_{ij}u$, $m_j = d_{ij}v$.

При цьому матриця F_{ij} є лінійною комбінацією з довільними коефіцієнтами степенів матриці перестановки $P_{\tau_{ij}}$, де $\tau_{ij} = (1\ 2\ \ldots\ d_{ij})$, тобто

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{d_{ij}} a_k^{(ij)}(P_{\tau_{ij}})^k.$$

Отже, матриці $\mathcal{E}_{ij}$ та $\mathcal{E}_{ji}$ залежать від d_{ij} параметрів. Тоді матриця A залежить від $a = \sum\limits_{i<j} d_{ij}$ параметрів.

Отже, ми отримали, що $\mathcal{E}$ залежить від

$$a + b = \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{m_k}{2}\right] - (s-1) + \sum_{1\le i<j\le s} (m_i, m_j)$$

параметрів.

При еквівалентних перетвореннях другого типу елементи матриці показників не змінюються (змінюється їх розташування в матриці) і тому загальна кількість параметрів $a + b$ не змінюється.

Еквівалентні перетворення першого типу над матрицею $\mathcal{E}$ можна виконувати або над матрицею A, або над матрицею B.

Діагональні блоки $\mathcal{E}_{ii}$ матриці B вже мають спеціальний вигляд (перший стовпчик нульовий), завдяки якому вони залежать від мінімальної кількості параметрів.

Параметри $a_1^{(ij)}, \dots, a_{d_{ij}}^{(ij)}$ є в кожному рядку матриці A_{ij}, тобто в кожному рядку i - ої блочної смуги матриці A.

Виконаємо наступне перетворення першого типу: від елементів i - ої горизонтальної полоси віднімемо ціле число t, а до елементів i - ої вертикальної полоси додамо число t.

При такому перетворенні вигляд діагональних блоків $\mathcal{E}_{ii}$, а, отже, і матриці B не зміниться. В i - ому блочному рядку і стовпчику отримаємо нові матриці $\bar{A}_{ij} = A_{ij} - tU_{ij}$, $\bar{A}_{ji} = A_{ji} + tU_{ji}$.

Оскільки $A_{ji} = -P_{\sigma'_j} A_{ij}^T$, то

$$\bar{A}_{ij} = -P_{\sigma'_j} A_{ij}^T + tU_{ji} = -P_{\sigma'_j} A_{ij}^T + tP_{\sigma'_j} U_{ji} = -P_{\sigma'_j}(A_{ij} - tU_{ij})^T.$$

При цьому

$$\bar{F}_{ij} = F_{ij} - tU_{ij} = \sum_{k=1}^{d_{ij}} (a_k^{(ij)} - t)(P_{\tau_{ij}})^k.$$

Позначимо $\bar{a}_k^{(ij)} = a_k^{(ij)} - t$, $k = 1, 2, \dots, d_{ij}$. Нові матриці $\bar{A}_{ij}$ та $\bar{A}_{ji}$ залежать також від d_{ij} параметрів $\bar{a}_1^{(ij)}, \dots, \bar{a}_{d_{ij}}^{(ij)}$. Якщо взяти $t = a_k^{(ij)}$ для деякого k, то $\bar{a}_k^{(ij)} = 0$ і кількість параметрів, через які виражаються всі елементи матриці $\bar{A}_{ij}$, зменшується на один.

Всього матриця A містить s горизонтальних і вертикальних блочних рядків і стовпчиків. Від елементів i - ої горизонтальної полоси $(i = 2, \dots, s)$ віднімемо $t_i = a_1^{(i1)}$, а до елементів i - ої вертикальної полоси додамо це число. Тоді кількість параметрів матриці A зменшиться на $s - 1$.

Таким чином, кількість параметрів, через які виражаються всі елементи зведеної горенштейнової матриці показників, дорівнює

$$\sum_{k=1}^{s} \left[\frac{m_k}{2}\right] - 2(s-1) + \sum_{1\le i<j\le s} (m_i, m_j).$$

параметрів.

10 Достатність умови (Ω) для побудови горенштейнової матриці показників із заданими циклічними горенштейновими матрицями на головній блочній діагоналі

Розглянемо матрицю показників $\mathcal{E}_1$ з підстановкою $\sigma_1 = (12\dots m)$ і матрицю показників $\mathcal{E}_2$ з підстановкою $\sigma_2 = (1\,2\,\dots\,n)$. Нехай виконується умова (Ω):

$$\frac{\sum\limits_i \alpha_{i\sigma_1(i)}}{|\langle\sigma_1\rangle|} = \frac{\sum\limits_i \alpha_{i\sigma_s(i)}}{|\langle\sigma_s\rangle|}.$$

Покажемо, що існує зведена горенштейнова матриця показників

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_{1\,2} \\ \mathcal{E}_{2\,1} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix}$$

з підстановкою Кириченка $\sigma = \sigma_1\sigma_2'$, де $\sigma_2' = (m+1\;m+2\;\dots\;m+n)$.

Маємо $\mathcal{E}_{1\,2}$ — матриця розміру $m \times n$, $\mathcal{E}_{2\,1}$ — матриця розміру $n \times m$.

Для знаходження $\mathcal{E}_{1\,2}$ та $\mathcal{E}_{2\,1}$ маємо систему

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{12} + P_{\sigma_1'}\mathcal{E}_{21}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_1'(k)}\}U_{12}, \\ \mathcal{E}_{21} + P_{\sigma_2'}\mathcal{E}_{12}^T = \mathrm{diag}\{\alpha_{k\sigma_2'(k)}\}U_{21}. \end{cases}$$

Цю систему можна подати у вигляді

$$\left(\begin{array}{cc|c} E & A & \bar{a} \\ B & E & \bar{b} \end{array}\right), \tag{16}$$

де $E, A, B \in M_{mn}(\mathbb{Z})$, $A = (A_{ij})$ — блочна $m\times n$ матриця, $B = (B_{ij})$ — блочна $n\times m$ матриця, A_{ij} — матриці розміру $n \times m$, B_{ij} — матриці розміру $m \times n$, причому $A_{ij} = e_{j\sigma_1(i)}$, $B_{ij} = e_{j\sigma_2(i)}$, $\bar{a} = \begin{pmatrix} \bar{a_1} \\ \vdots \\ \bar{a_m} \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b_1} \\ \vdots \\ \bar{b_n} \end{pmatrix}$, $\bar{a_i} = \alpha_{i\sigma_1(i)}\bar{u}_n \in \mathbb{Z}^n$, $\bar{b_i} = \alpha_{i\sigma_2(i)}\bar{u}_m \in \mathbb{Z}^m$.

Домножимо перший блочний рядок системи на $(-B)$ і додамо до другого. Отримаємо

$$\left(\begin{array}{cc|c} E & A & \bar{a} \\ 0 & E-BA & \bar{b}-B\bar{a} \end{array}\right) \tag{17}$$

$BA = C$ — блочна $n\times n$ - матриця, де $C_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_{k\sigma_2(i)}e_{j\sigma_1(k)}$. При цьому $C_{ij} = 0$ при $j \neq \sigma_2(i)$ і $C_{i\sigma_2(i)} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_{k\sigma_2(i)}e_{\sigma_2(i)\sigma_1(k)} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_{k\sigma_1(k)} = P_{\sigma_1}$.

Система лінійних рівнянь (16) сумісна тоді і тільки тоді, коли сумісна система (17).

Розглянемо систему $\left(\begin{array}{c|c} E-BA & \bar{b}-B\bar{a} \end{array}\right)$, де $\bar{b}-B\bar{a}=\bar{c}=\begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_n \end{pmatrix}$, $\bar{c}_i=\bar{b}_i-\sum\limits_{k=1}^{m} B_{ik}\bar{a}_k=\alpha_{i\sigma_2(i)}\bar{u}_m-\sum\limits_{k=1}^{m} e_{k\sigma_2(i)}\alpha_{k\sigma_1(k)}\bar{u}_n$

Оскільки $e_{k\sigma_2(i)}\bar{u}_n=\bar{e_k}=\left(\underbrace{0\,0\,\ldots\,0}_{k-1}\;1\;0\;\ldots\;0\right)^T$, то

$$\bar{c}_i=\alpha_{i\sigma_2(i)}\bar{u}_m-\sum_{k=1}^{m}\alpha_{k\sigma_1(k)}\bar{e}_k=\begin{pmatrix} \alpha_{i\sigma_2(i)}-\alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \alpha_{i\sigma_2(i)}-\alpha_{2\sigma_1(2)} \\ \vdots \\ \alpha_{i\sigma_2(i)}-\alpha_{m\sigma_1(m)} \end{pmatrix}.$$

Система $\left(\begin{array}{c|c} E-BA & \bar{b}-B\bar{a} \end{array}\right)$ набуває вигляду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} E & -P_{\sigma_1} & & & & \bar{c}_1 \\ & E & -P_{\sigma_1} & & & \bar{c}_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & E & -P_{\sigma_1} & \bar{c}_{m-1} \\ -P_{\sigma_1} & & & & E & \bar{c}_m \end{array}\right). \tag{18}$$

Домножимо k-ий блочний рядок системи на $P_{\sigma_1}^k$, $\quad k=\overline{1,m-1}$, і додамо до останнього. Отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} E & -P_{\sigma_1} & & & & \bar{c}_1 \\ & E & -P_{\sigma_1} & & & \bar{c}_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & E & -P_{\sigma_1} & \bar{c}_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & E-P_{\sigma_1}^n & P_{\sigma_1}\bar{c}_1+P_{\sigma_1}^2\bar{c}_2+\ldots+P_{\sigma_1}^{n-1}\bar{c}_{n-1}+\bar{c}_n \end{array}\right)$$

Система лінійних рівнянь (18) сумісна тоді і тільки тоді, коли сумісна наступна система

$$\left(\begin{array}{c|c} E-P_{\sigma_1}^n & P_{\sigma_1}\bar{c}_1+P_{\sigma_1}^2\bar{c}_2+\ldots+P_{\sigma_1}^{m-1}\bar{c}_{m-1}+\bar{c}_m \end{array}\right). \tag{19}$$

Розглянемо квадратну матрицю $E-P_{\sigma_1}^n\in M_m(\mathbb{Z})$. Нехай $m=du$, $n=dv$, де $d=(n,m)$, $(u,v)=1$. Можемо вважати, що $m\geq n$.

Тоді

$$E - P_{\sigma_1}^n = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{E \quad E \quad \ddots \quad E}}^{v} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} E & & & & -E & & & \\ & E & & & & -E & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & E & & & & -E \\ \hline -E & & & & E & & & \\ & -E & & & & E & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & -E & & & & E \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}E\\E\\ \ddots \\E\end{array}}\right\} u - v \\ \vphantom{\begin{array}{c}E\\E\\ \ddots \\E\end{array}} \end{array}$$

де $E \in M_d(\mathbb{Z})$.

Якщо всі блочні рядки матриці $E - P_{\sigma_1}^n$ додамо до останнього, то отримаємо нульовий рядок. Звідси $rank(E - P_{\sigma_1}^n) \leq n - d$. З іншого боку розв'язок X рівняння $X - P_{\sigma_1} X P_{\sigma_2} = 0$ за лемою 8.1 залежить від d параметрів. Це означає, що дефект матриці X дорівнює $def\, X = d$.

Розіб'ємо систему (19) на u смуг ширини d і додамо всі смуги до останньої. Тоді остання смуга основної матриці системи буде нульовою.

Система (19) буде сумісною тоді і тільки тоді, коли в останній смузі розширеної матриці системи вільні члени дорівнюють 0.

Маємо $P_{\sigma_1^k} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_{i\sigma_1^k(i)}$. Тоді

$$P_{\sigma_1^k} \cdot \bar{c}_k = \sum_{k=1}^{m} e_{i\sigma_1^k(i)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{i\sigma_2(i)} - \alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \alpha_{i\sigma_2(i)} - \alpha_{2\sigma_1(2)} \\ \vdots \\ \alpha_{i\sigma_2(i)} - \alpha_{m\sigma_1(m)} \end{pmatrix} = \alpha_{i\sigma_2(i)} \bar{u}_m - \begin{pmatrix} \alpha_{k+1\,\sigma_1(k+1)} \\ \vdots \\ \alpha_{n\,\sigma_1(n)} \\ \alpha_{1\,\sigma_1(1)} \\ \vdots \\ \alpha_{k\,\sigma_1(k)} \end{pmatrix}.$$

$$\bar{c}_n + P_{\sigma_1}\bar{c}_1 + P_{\sigma_1}^2\bar{c}_2 + \ldots + P_{\sigma_1}^{n-1}\bar{c}_{n-1} = (\alpha_{1\sigma_2(1)} + \ldots + \alpha_{n\sigma_2(n)})\bar{u}_n -$$

$$- \left(\begin{pmatrix} \alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \alpha_{2\sigma_1(2)} \\ \vdots \\ \alpha_{m\sigma_1(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{2\sigma_1(2)} \\ \vdots \\ \alpha_{m\sigma_1(m)} \\ \alpha_{1\sigma_1(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{3\sigma_1(3)} \\ \vdots \\ \alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \alpha_{2\sigma_1(2)} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \alpha_{n\sigma_1(n)} \\ \vdots \\ \alpha_{m\sigma_1(m)} \\ \alpha_{1\sigma_1(1)} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1\sigma_1(n-1)} \end{pmatrix} \right).$$

Додамо всі смуги ширини d до останньої. Отримаємо

$$u\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k\sigma_2(k)}\bar{u}_d - v\sum_{k=1}^{m}\alpha_{k\sigma_2(k)}\bar{u}_d = \bar{0}_d.$$

Отже, система (19) сумісна. Тому початкова система також сумісна. Це означає, що умова (Ω) є достатньою для побудови горенштейнової матриці показників із заданими циклічними горенштейновими матрицями на головній блочній діагоналі.

11 Горенштейнові (0,1) - матриці

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена горенштейнова $(0,1)$ - матриця з підстановкою Кириченка σ. Підстановка σ розкладається в добуток циклів, що не перетинаються. Розглянемо спочатку циклічні горенштейнові $(0,1)$ - матриці. Можливі два випадки:

1) існує число i таке що $\alpha_{i\sigma(i)} = 0$;

2) $\alpha_{i\sigma(i)} = 1$ для всіх i.

11.1 Циклічні горенштейнові матриці, для яких існує i таке, що $\alpha_{i\sigma(i)} = 0$

Переставимо i - ий рядок на перше місце, а $\sigma(i)$ - ий стовпчик на n - е місце. Тоді $i = 1$, $\sigma(i) = n$, $\alpha_{1n} = 0$. Матриця $\mathcal{E}$ має вигляд:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & * & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathcal{E}$ зведена, тому вона не містить більше нульових рядків. Для $i \neq 1$ $\alpha_{i\sigma(i)} = 1$, тому $\alpha_{i1} + \alpha_{1\sigma(i)} = 1$, звідси $\alpha_{i1} = 1$ при $i \neq 1$. Матриця $\mathcal{E}$ має вигляд:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & 0 \\ 1 & & & & & 0 \\ \vdots & & & * & & \vdots \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо другий рядок, матриці $\mathcal{E}$. Існує i таке, що $\sigma(i) = 1$. Можна вважати, що $i = 2$ (цього можна досягти перестановкою рядків). Тоді $\alpha_{2j} + \alpha_{j\sigma(2)} = \alpha_{2\sigma(2)}$ або $\alpha_{2j} + \alpha_{j1} = 1$. Оскільки $\alpha_{j1} = 1$ для всіх

$j > 1$, то $\alpha_{2j} = 0$. Отримаємо:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & 0 \\ 1 & & & & & 0 \\ \vdots & & & * & & \vdots \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо і запишемо другий стовпчик. $\alpha_{i2} + \alpha_{2\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)} = 1$ при $i > 1$. Звідси, оскільки $\alpha_{2\sigma(i)} = 0$ при $i \neq 1$, отримуємо $\alpha_{i2} = 1$ при $i \neq 1$. Матриця $\mathcal{E}$ набуває вигляду:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & & & & & 0 \\ 1 & 1 & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & * & & \vdots \\ 1 & 1 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Шукаємо третій рядок: існує i таке, що $\sigma(i) = 2$. Можна вважати, що $i = 3$. Тоді $\alpha_{3j} + \alpha_{j2} = 1$. Оскільки $\alpha_{j2} = 1$ при $j > 2$, то звідси випливає, що $\alpha_{3j} = 0$ при $j > 2$. Продовжуючи цей процес, отримуємо матрицю вигляду:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

з підстановкою

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

11.2 Циклічні горенштейнові матриці, у яких $\alpha_{i\sigma(i)} = 1$ для всіх i

Нехай $\alpha_{i\sigma(i)} = 1$ для будь-якого i, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$. Будемо вважати, що $n > 2$. Нехай $\alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = 1, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \ldots, \alpha_{1(n-1)}, \alpha_{1n}$ — елементи першого рядка матриці $\mathcal{E}$.

Маємо

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ & & & * & & & \end{pmatrix}.$$

Знайдемо другий стовпчик цієї матриці. З рівності $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)} = 1$ при $i=1$ маємо $\alpha_{1j}+\alpha_{j2} = 1$, звідси $\alpha_{j2} = 1-\alpha_{1j}$. Матриця $\mathcal{E}$ набуває вигляду:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ * & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ * & 1-\alpha_{13} & 0 & 1 & \cdots & * & * \\ * & 1-\alpha_{14} & * & 0 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & 1-\alpha_{1(n-1)} & * & * & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{1n} & * & * & \cdots & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо другий рядок: З рівності $\alpha_{i2}+\alpha_{2\sigma(i)} = 1$ отримуємо $\alpha_{2\sigma(i)} = 1-\alpha_{i2}$. Оскільки

$$\sigma(i) = \begin{cases} i+1, & \text{якщо } i<n \\ 1, & \text{якщо } i=n \end{cases},$$

то $\alpha_{2(i+1)} = 1-\alpha_{i2}$ при $i<n$, та $\alpha_{21} = 1-\alpha_{n2}$. Враховуючи, що $\alpha_{i2} = 1-\alpha_{1i}$, отримуємо $\alpha_{2(i+1)} = 1-(1-\alpha_{1i}) = \alpha_{1i}$ при $i<n$. Позаяк, з одного боку $\alpha_{21} = 1-\alpha_{n2} = 1-(1-\alpha_{1n}) = \alpha_{1n}$, а з іншого $\alpha_{21} = 1-\alpha_{13}$ (бо $\alpha_{1i}+\alpha_{1(i+1)} = 1$), то $1-\alpha_{13} = \alpha_{1n}$. Матриця $\mathcal{E}$ має вигляд:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ 1-\alpha_{13} & 0 & 1 & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1(n-2)} & \alpha_{1(n-1)} \\ * & 1-\alpha_{13} & 0 & 1 & \cdots & * & * \\ * & 1-\alpha_{14} & * & 0 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & 1-\alpha_{1(n-1)} & * & * & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{1n} & * & * & \cdots & * & 0 \end{pmatrix},$$

причому $\alpha_{13}+\alpha_{1n} = 1$.

Знайдемо елементи третього стовпчика. З рівності $\alpha_{2j}+\alpha_{j3} = 1$ маємо $\alpha_{j3} = 1-\alpha_{2j}$. Оскільки $\alpha_{2j} = \alpha_{1(j-1)}$ при $j>2$, то $\alpha_{j3} = 1-\alpha_{1(j-1)}$ при $j>2$. Матриця $\mathcal{E}$ набуває вигляду:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ 1-\alpha_{13} & 0 & 1 & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1(n-2)} & \alpha_{1(n-1)} \\ * & 1-\alpha_{13} & 0 & 1 & \cdots & * & * \\ * & 1-\alpha_{14} & 1-\alpha_{13} & 0 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & 1-\alpha_{1(n-1)} & 1-\alpha_{1(n-2)} & * & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{1n} & 1-\alpha_{1(n-1)} & * & \cdots & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо третій рядок: Оскільки $\alpha_{i3}+\alpha_{3\sigma(i)} = 1$, то $\alpha_{3\sigma(i)} = 1-\alpha_{i3}$. Звідси $\alpha_{3(i+1)} = 1-\alpha_{i3}$ для $i<n$ та $\alpha_{31} = 1-\alpha_{n3} = 1-(1-\alpha_{1(n-1)}) = \alpha_{1(n-1)}$; $\alpha_{32} = 1-\alpha_{13}$. З іншого боку $\alpha_{31}+\alpha_{14} = 1$. Тому $\alpha_{31} = 1-\alpha_{14}$

і $1-\alpha_{14}=\alpha_{1(n-1)}$. Матриця $\mathcal{E}$ набуває вигляду:

$$\mathcal{E}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ 1-\alpha_{13} & 0 & 1 & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1(n-2)} & \alpha_{1(n-1)} \\ 1-\alpha_{14} & 1-\alpha_{13} & 0 & 1 & \cdots & \alpha_{1(n-3)} & \alpha_{1(n-2)} \\ * & 1-\alpha_{14} & 1-\alpha_{13} & 0 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & 1-\alpha_{1(n-1)} & 1-\alpha_{1(n-2)} & * & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{1n} & 1-\alpha_{1(n-1)} & * & \cdots & * & 0 \end{pmatrix},$$

причому $\alpha_{13}+\alpha_{1n}=1$, $\alpha_{14}+\alpha_{1(n-1)}=1$ю

Аналогічно шукаються всі інші рядки та стовпчики. Для n - го стовпчика маємо: $\alpha_{(n-1)j}+\alpha_{jn}=1$, звідси отримаємо $\alpha_{jn}=1-\alpha_{(n-1)j}$. Для n - го рядка: $\alpha_{in}+\alpha_{n\sigma(i)}=1$, звідси отримаємо $\alpha_{n\sigma(i)}=1-\alpha_{in}$ або $\alpha_{n(i+1)}=1-\alpha_{in}$ для $i<n$.

Таким чином, ми отримали матрицю вигляду:

$$\mathcal{E}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ 1-\alpha_{13} & 0 & 1 & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1(n-2)} & \alpha_{1(n-1)} \\ 1-\alpha_{14} & 1-\alpha_{13} & 0 & 1 & \cdots & \alpha_{1(n-3)} & \alpha_{1(n-2)} \\ 1-\alpha_{15} & 1-\alpha_{14} & 1-\alpha_{13} & 0 & \cdots & \alpha_{1(n-4)} & \alpha_{1(n-3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-\alpha_{1n} & 1-\alpha_{1(n-1)} & 1-\alpha_{1(n-2)} & 1-\alpha_{1(n-3)} & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{1n} & 1-\alpha_{1(n-1)} & 1-\alpha_{1(n-2)} & \cdots & 1-\alpha_{13} & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що $\alpha_{ij}+\alpha_{j\sigma(i)}=\alpha_{i\sigma(i)}=1$ для всіх $i<n$, $j\leq n$. Рівність $\alpha_{nj}+\alpha_{j1}=1$ дає систему

$$\begin{gathered} (1-\alpha_{13})+(1-\alpha_{1n})=1 \\ (1-\alpha_{14})+(1-\alpha_{1(n-1)})=1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (1-\alpha_{1k})+(1-\alpha_{1(n+3-k)})=1 \end{gathered} \tag{20}$$

або

$$\begin{gathered} \alpha_{13}+\alpha_{1n}=1 \\ \alpha_{14}+\alpha_{1(n-1)}=1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1k}+\alpha_{1(n+3-k)}=1 \end{gathered} \tag{21}$$

для всіх $k=3,\dots,n$.

Припустимо, що n непарне. Тоді з (21) при $k=\frac{n+3}{2}$ маємо $\alpha_{1(\frac{n+3}{2})}=\frac{1}{2}$. Отримали протиріччя.

Отже, число n парне. Матриця зведена, тому $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>0$. При $i=1$ маємо $\alpha_{1j}+\alpha_{j1}\geq 1$ або

$\alpha_{1j} + (1 - \alpha_{1(j+1)}) \geq 1$. З системи нерівностей

$$\begin{gathered}\alpha_{13} + (1 - \alpha_{14}) \geq 1 \\ \alpha_{14} + (1 - \alpha_{15}) \geq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1(n-1)} + (1 - \alpha_{1n}) \geq 1\end{gathered}$$

отримуємо такий ланцюг нерівностей:

$$\alpha_{13} \geq \alpha_{14} \geq \alpha_{15} \geq \dots \geq \alpha_{1(n-1)} \geq \alpha_{1n}.$$

З рівності $\alpha_{1k} + \alpha_{1(n+3-k)} = 1$ при $k = \frac{n}{2} + 1$ отримуємо $\alpha_{1(\frac{n}{2}+1)} + \alpha_{1(\frac{n}{2}+2)} = 1$. Оскільки $\alpha_{1(\frac{n}{2}+1)} \geq \alpha_{1(\frac{n}{2}+2)}$, то $\alpha_{1(\frac{n}{2}+1)} = 1$, $\alpha_{1(\frac{n}{2}+2)} = 0$. Тоді $\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = \dots = \alpha_{1(\frac{n}{2}+1)} = 1$ а $\alpha_{1(\frac{n}{2}+2)} = \dots = \alpha_{1n} = 0$.

Матриця $\mathcal{E}$ набуває вигляду:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\alpha_{nk} = 1 - \alpha_{1(n+2-k)}$, то $\alpha_{n(\frac{n}{2}+1)} = 1 - \alpha_{1(\frac{n}{2}+1)} = 1 - 1 = 0$. При цьому не виконується кільцева нерівність $\alpha_{1n} + \alpha_{n(\frac{n}{2}+1)} \geq \alpha_{1(\frac{n}{2}+1)}$. $(0 + 0 \geq 1)$. Отримали протиріччя.

Таким чином, не існує циклічних горенштейнових $(0, 1)$-матриць, для яких довжина циклу більша за 2.

11.3 Загальний випадок

Покажемо, що якщо існує i таке, що $\alpha_{i\sigma(i)} = 0$, то σ — цикл. Припустимо, що σ розкладається в добуток циклів $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$, де
$\sigma_1 = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ — цикл і $\alpha_{1\sigma_1(1)} = 0$.

Можливі два випадки:

1) існує k таке, що $\alpha_{k\sigma_l(k)} = 0$.

2) $\alpha_{k\sigma_l(k)} = 1$ для всіх k та для всіх l.

Розглянемо випадок 1.

В цьому випадку маємо два нульових рядка: $\alpha_{1j} = \alpha_{1\sigma_1(1)} - \alpha_{j\sigma_1(1)} = 0$ та $\alpha_{kj} = \alpha_{k\sigma_l(k)} - \alpha_{j\sigma_l(k)} = 0$. Тоді $\alpha_{1k} + \alpha_{k1} = 0$, що суперечить зведеності матриці.

Розглянемо випадок 2.

$\sigma = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n+1 & n+2 \end{pmatrix} \cdot \dots$. Маємо

$\alpha_{1j} + \alpha_{jn} = \alpha_{1n} = 0$ для всіх j;

$\alpha_{ij} + \alpha_{j(i-1)} = \alpha_{i(i-1)} = 1$ для всіх j, $1 < i \leq n$;

$\alpha_{(n+1)j} + \alpha_{j(n+2)} = \alpha_{(n+1)(n+2)} = 1$ для всіх j;

$\alpha_{(n+12)j} + \alpha_{j(n+1)} = \alpha_{(n+2)(n+1)} = 1$ для всіх j.

Матриця $\mathcal{E}$ має вигляд:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{matrix} & * & * \\ * & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Лема 11.1. *Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена горенштейнова $(0,1)$-матриця показників з підстановкою Кириченка σ. Якщо для деяких значень i та j виконуються рівності $\sigma(i) = j$, а $\sigma(j) = i$, причому $\alpha_{i\sigma(i)} = \alpha_{j\sigma(j)} = 1$, то $\alpha_{ik} = \alpha_{jk}$, $\alpha_{ki} = \alpha_{kj}$ для будь-якого $k \neq i, j$.*

Доведення. Зведена матриця $\mathcal{E}$ не має симетричних нулів, тому $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} \geq 1$ для $k \neq i$. Умова горенштейновості дає рівність $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = 1$. З цих двох співвідношень одержуємо нерівність $\alpha_{ki} \geq \alpha_{k\sigma(i)}$ для $k \neq i$. Аналогічно $\alpha_{kj} \geq \alpha_{k\sigma(j)}$ для $k \neq j$. Отже, $\alpha_{ki} \geq \alpha_{kj}$ і $\alpha_{kj} \geq \alpha_{ki}$, тобто $\alpha_{kj} = \alpha_{ki}$, якщо $k \neq i, j$. Тому при тих же i, j, k маємо наступну рівність $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = 1$. Аналоічно $\alpha_{jk} + \alpha_{kj} = 1$. Тому $\alpha_{ik} = \alpha_{jk}$ для будь-якого $k \neq i, j$. Твердження доведено. □

З рівностей $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ отримуємо

$$\begin{gathered} \alpha_{(i+1)(n+1)} + \alpha_{(n+1)i} = \alpha_{(i+1)i} = 1 \\ \alpha_{(i+1)(n+2)} + \alpha_{(n+2)i} = \alpha_{(i+1)i} = 1 \\ \alpha_{1(n+1)} + \alpha_{(n+1)n} = \alpha_{1n} = 0 \\ \alpha_{1(n+2)} + \alpha_{(n+2)n} = \alpha_{1n} = 0 \\ \alpha_{(n+1)i} + \alpha_{i(n+2)} = \alpha_{(n+1)(n+2)} = 1 \\ \alpha_{(n+2)i} + \alpha_{i(n+1)} = \alpha_{(n+2)(n+1)} = 1 \end{gathered} \tag{22}$$

для всіх $i \leq n$.

З умови горенштейновості $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ маємо для $k \leq n$

$$\begin{gathered}
\alpha_{(k+1)(n+1)} + \alpha_{(n+1)k} = \alpha_{(k+1)k} = 1 \\
\alpha_{(k+1)(n+2)} + \alpha_{(n+2)k} = \alpha_{(k+1)k} = 1 \\
\alpha_{1(n+1)} + \alpha_{(n+1)n} = \alpha_{1n} = 0 \\
\alpha_{1(n+2)} + \alpha_{(n+2)n} = \alpha_{1n} = 0 \\
\alpha_{(n+1)k} + \alpha_{k(n+2)} = \alpha_{(n+1)(n+2)} = 1 \\
\alpha_{(n+2)k} + \alpha_{k(n+1)} = \alpha_{(n+2)(n+1)} = 1
\end{gathered} \tag{23}$$

За лемою $\alpha_{(k+1)(n+1)} = \alpha_{(k+1)(n+2)}$, $\alpha_{(n+1)k} = \alpha_{(n+2)k}$. З першої рівності $\alpha_{(n+1)k} = 1 - \alpha_{(k+1)(n+1)}$. Тоді, підставляючи у п'яту, отримаємо $(1 - \alpha_{(k+1)(n+1)}) + \alpha_{k(n+2)} = 1$. Звідси $\alpha_{(k+1)(n+1)} = \alpha_{k(n+2)}$ і з урахуванням леми $\alpha_{(k+1)(n+1)} = \alpha_{k(n+2)} = \alpha_{k(n+1)}$. За лемою $\alpha_{(k+1)(n+1)} = \alpha_{(k+1)(n+2)}$ та $\alpha_{k(n+1)} = \alpha_{k(n+2)}$. Тому отримуємо

$$\alpha_{n(n+1)} = \alpha_{(n-1)(n+1)} = \alpha_{(n-2)(n+1)} = \cdots = \alpha_{3(n+1)} = \alpha_{2(n+1)} = \alpha_{1(n+1)},$$

$$\alpha_{n(n+2)} = \alpha_{(n-1)(n+2)} = \alpha_{(n-2)(n+2)} = \cdots = \alpha_{3(n+2)} = \alpha_{2(n+2)} = \alpha_{1(n+2)},$$

причому $\alpha_{1(n+1)} = \alpha_{1(n+12)}$. Але тоді

$$\alpha_{(n+1)k} = 1 - \alpha_{(k+1)(n+1)} = 1 - \alpha_{k(n+1)} = \alpha_{(n+1)(k-1)}$$

і маємо ще два ланцюги

$$\alpha_{(n+1)n} = \alpha_{(n+1)(n-1)} = \alpha_{(n+1)(n-2)} = \cdots = \alpha_{(n+1)3} = \alpha_{(n+1)2} = \alpha_{(n+1)1},$$

$$\alpha_{(n+2)n} = \alpha_{(n+2)(n-1)} = \alpha_{(n+2)(n-2)} = \cdots = \alpha_{(n+2)3} = \alpha_{(n+2)2} = \alpha_{(n+2)1},$$

причому $\alpha_{(n+1)1} = \alpha_{(n+2)1}$. Оскільки $\alpha_{n(n+1)} = \alpha_{1(n+1)}$, то

$$1 = \alpha_{(n+2)(n+1)} = \alpha_{(n+2)n} + \alpha_{n(n+1)} = \alpha_{(n+2)n} + \alpha_{1(n+1)}.$$

Отримали протиріччя, бо з $\alpha_{1j} + \alpha_{jn} = \alpha_{1n} = 0$ $(\alpha_{1j} + \alpha_{j\sigma(1)} = \alpha_{1\sigma(1)} = 0)$ випливає, що $\alpha_{1(n+1)} = 0$ та $\alpha_{(n+2)n} = 0$.

Таким чином, ми показали, що якщо існує i таке, що $\alpha_{i\sigma(i)} = 0$, то підстановка σ не розкладається в добуток циклів, тобто сама є циклом. В цьому випадку матриця $\mathcal{E}$ має вигляд:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Нехай $\alpha_{i\sigma(i)} = 1$ для будь-якого i. Тоді за доведеним σ є добутком циклів довжини 2: $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}2n-1 & 2n\end{pmatrix}$. Тоді з рівностей $\alpha_{ij} + \alpha_{j\sigma(i)} = 1$ маємо:

$$\begin{gathered}
\alpha_{(2i-1)(2j-1)} + \alpha_{(2j-1)(2i)} = 1 \\
\alpha_{(2i-1)(2j)} + \alpha_{(2j)(2i)} = 1 \\
\alpha_{(2i)(2j-1)} + \alpha_{(2j-1)(2i-1)} = 1 \\
\alpha_{(2i)(2j)} + \alpha_{(2j)(2i-1)} = 1 \\
\alpha_{(2j-1)(2i-1)} + \alpha_{(2i-1)(2j)} = 1 \\
\alpha_{(2j-1)(2i)} + \alpha_{(2i)(2j)} = 1 \\
\alpha_{(2j)(2i-1)} + \alpha_{(2i-1)(2j-1)} = 1 \\
\alpha_{(2j)(2i)} + \alpha_{(2i)(2j-1)} = 1
\end{gathered}$$

Звідси отримуємо, що

$$\alpha_{(2i-1)(2j-1)} = \alpha_{(2i-1)(2j)} = \alpha_{(2i)(2j-1)} = \alpha_{(2i)(2j)},$$

$$\alpha_{(2j-1)(2i-1)} = \alpha_{(2j-1)(2i)} = \alpha_{(2j)(2i-1)} = \alpha_{(2j)(2i)},$$

причому $\alpha_{(2i)(2j)} + \alpha_{(2j)(2i)} = 1$.

Отже, матриця $\mathcal{E}$ розбивається на n^2 квадратних блоків другого порядку. Діагональні блоки дорівнюють $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а недіагональні дорівнюють $x_{ij}U_2$, де $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матриця $\mathcal{E}$ має вигляд:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix}
\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & x_{12}U_2 & x_{13}U_2 & \cdots & x_{1n}U_2 \\
x_{21}U_2 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & x_{23}U_2 & \cdots & x_{2n}U_2 \\
x_{31}U_2 & x_{32}U_2 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \cdots & x_{3n}U_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n1}U_2 & x_{n2}U_2 & x_{n3}U_2 & \cdots & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}
\end{pmatrix},$$

причому $x_{ij} + x_{ji} = 1$.

Нехай $\alpha_{ij} = 0 \ (i \neq j)$. Тоді з нерівностей

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}, \quad \alpha_{ki} + \alpha_{ij} \geq \alpha_{kj},$$

отримуємо $\alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ і $\alpha_{ki} \geq \alpha_{kj}$ для всіх k. Тому кількість нулів в i -му рядку не менша за кількість нулів у j -му рядку.

Нехай i -й рядок міститься в l -ому блочному рядку, а j -ий рядок міститься в s -ому блочному рядку ($l \neq s$). Тоді з $\alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для будь-якого k випливає, що $x_{sq} \geq x_{lq}$ для довільних q. Матриця (α_{ij})

зведена, тому $\alpha_{ji} = 1$, а тоді $x_{sl} = 1$. На місці (l, l) стоїть блок $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а на місці (s, l) — $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. З урахуванням нерівності $x_{sq} \geq x_{lq}$ для всіх q отримуємо, що s -ий блочний рядок містить нулів менше, ніж l -ий блочний рядок.

Оскільки $x_{km} + x_{mk} = 1$ для всіх $m, k \ (m \neq k)$, то одне з цих чисел дорівнює 0, а інше — 1. Тому блочні рядки з номерами k і m мають різну кількість нулів. Звідси випливає, що всі блочні рядки матриці показників мають різну кількість нулів.

Крім цього, з рівності $x_{km} + x_{mk} = 1$ для всіх $m, k \ (m \neq k)$ отримуємо, що серед чисел x_{km} рівно $\frac{n(n-1)}{2}$ нулів і $\frac{n(n-1)}{2}$ одиниць.

Рядки містять різну кількість чисел x_{km}, що дорівнюють нулеві, тому для кожного $p = 0, 1, \ldots, n-1$ існує блочний рядок з номером $\tau(p)$, в якому серед чисел $x_{\tau(p)\nu}$ рівно p нулів.

Еквівалентними перетвореннями другого типу переставимо рядок, у якого всі x_{km} дорівнюють 0, на перше місце; рядок, у якого $(n-2)$ числа x_{km} дорівнюють 0, переставимо на друге і так далі. Отримаємо матрицю

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & O & O & \cdots & O \\ U_2 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & O & \cdots & O \\ U_2 & U_2 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_2 & U_2 & U_2 & \cdots & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

з підстановкою $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 2n-1 & 2n \end{pmatrix}$, де $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Одночасною перестановкою рядків та стовпчиків матриці показників її можна звести до вигляду:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

з підстановкою $\sigma = \begin{pmatrix}1 & n+1\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}2 & n+2\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}n & 2n\end{pmatrix}$.

Таким чином, з точністю до еквівалентності існує дві зведені горенштейнові $(0,1)$ - матриці показників парного порядку $2n$:

а)

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

з підстановкою $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots n-2 & n-1\end{pmatrix}$.

в)

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

з підстановкою $\sigma = \begin{pmatrix}1 & n+1\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}2 & n+2\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}n & 2n\end{pmatrix}$.

а непарного порядку n існує одна горенштейнова $(0,1)$ - матриця, а саме:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

з підстановкою $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots n-2 & n-1\end{pmatrix}$.

12 Кільце множників радикалу Джекобсона

Нехай M — допустимий правий Λ-модуль, $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Розглянемо зведені черепичні порядки $\Gamma = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Gamma) = (\gamma_{ij})\}$, для яких M є також правим Γ-модулем. Тоді повинні виконуватися нерівності $\alpha_i + \gamma_{ij} \geq \alpha_j$. Серед цих порядків існує найбільший за включенням з матрицею показників $\mathcal{E}(\Gamma) = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$.

Нехай $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$, — розклад правого Λ-модуля M в пряму суму допустимих правих Λ-модулів, $\mathcal{E}(M_k) = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kn})$. Тоді нерівності $\alpha_{ki} + \gamma_{ij} \geq \alpha_{kj}$ повинні виконуватися для будь-якого $k = 1, \ldots, s$. Для найбільшого такого порядку $\gamma_{ij} = \max\limits_k(\alpha_{kj} - \alpha_{ki})$.

Нехай N — допустимий лівий Λ-модуль, $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$. Розглянемо зведені черепичні порядки $\Gamma = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Gamma) = (\gamma_{ij})\}$, для яких N є таком лівим Γ-модулем. Тоді повинні виконуватися нерівності $\gamma_{ij} + \alpha_j \geq \alpha_i$. Серед цих порядків існує найбільший за включенням з матрицею показників $\mathcal{E}(\Gamma) = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$.

Нехай $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$, — розклад лівого Λ-модуля N в пряму суму допустимих лівих Λ-модулів, $\mathcal{E}(N_k) = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{nk})^T$. Тоді нерівності $\gamma_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ повинні виконуватися для будь-якого $k = 1, \ldots, s$. Для найбільшого такого порядку $\gamma_{ij} = \max\limits_k(\alpha_{ik} - \alpha_{jk})$.

Означення 12.1. *Найбільший за включенням зведений черепичний порядок, для якого Λ-модуль M є також модулем, називається кільцем множників модуля M.*

Кільце множників модуля M будемо позначати через $O(M)$.

Радикал Джекобсона R черепичного порядку є двостороннім ідеалом. Тому для нього визначено праве $O_r(R)$ (кільце множників радикалу як правого модуля) та ліве $O_l(R)$ (кільце множників радикалу як лівого модуля) кільце множників радикалу.

Твердження 12.2. *Ліве та праве кільця множників радикалу Джекобсона зведеного горенштейнового черепичного порядку співпадають.*

Доведення. Нехай $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників зведеного горенштейнового черепичного порядку, $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$ — матриця показників радикалу Джекобсона, $\mathcal{E}(O_r(R)) = (\gamma^r_{ij})$, $\mathcal{E}(O_l(R)) = (\gamma^l_{ij})$ — матриці показників правого та лівого кільця множників радикалу.

Очевидно при $i = j$ маємо: $\gamma^r_{ii} = \gamma^l_{ii} = 0$.

Нехай $i \neq j$. Оскільки $\beta_{kk} = 1$ для всіх k та $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$ при $k \neq j$, то

$$\gamma^r_{ij} = \max_k(\beta_{kj} - \beta_{ki}) = \max(1 - \beta_{ji}, \beta_{ij} - 1, \max_{k \neq i,j}(\beta_{kj} - \beta_{ki})) = \max(1 - \alpha_{ji}, \alpha_{ij} - 1, \max_{k \neq i,j}(\alpha_{kj} - \alpha_{ki})).$$

Розглянемо спочатку випадок $j \neq \sigma(i)$.

Очевидно, що $\alpha_{kj} - \alpha_{ki} \leq \alpha_{ij}$.

Припустимо, що $\max\limits_{k \neq i,j}(\alpha_{kj} - \alpha_{ki}) < \alpha_{ij}$. Тоді для всіх $k \neq i, j$ маємо $\alpha_{kj} - \alpha_{ki} < \alpha_{ij}$ або $\alpha_{kj} < \alpha_{ki} + \alpha_{ij}$. Але при $k = \sigma^{-1}(j) \neq i$ маємо $\alpha_{ki} + \alpha_{ij} = \alpha_{kj}$. Отримали протиріччя.

Таким чином, при $j \neq \sigma(i)$ маємо $\max\limits_{k \neq i,j}(\alpha_{kj} - \alpha_{ki}) = \alpha_{ij}$.

Оскільки кільце зведене, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 1$ і тоді

$$\gamma^r_{ij} = \max_k(\beta_{kj} - \beta_{ki}) = \max(1 - \alpha_{ji}, \alpha_{ij} - 1, \max_{k\neq i,j}(\alpha_{kj} - \alpha_{ki})) = \max(1 - \alpha_{ji}, \alpha_{ij} - 1, \alpha_{ij}) = \alpha_{ij}.$$

Отже, при $j \neq \sigma(i)$ $\gamma^r_{ij} = \alpha_{ij}$.

Розглянемо тепер випадок $j = \sigma(i)$.

$\gamma^r_{i\sigma(i)} = \max_k(\beta_{k\sigma(i)} - \beta_{ki}) = \max(1 - \beta_{\sigma(i)i}, \beta_{i\sigma(i)} - 1, \max_{k\neq i,\sigma(i)}(\beta_{k\sigma(i)} - \beta_{ki})) = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1, \max_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{k\sigma(i)} - \alpha_{ki}))$.

Враховуючи, що $\alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)} - \alpha_{ik}$ та $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} \geq 1$ отримаємо

$$\max_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{k\sigma(i)} - \alpha_{ki}) = \max_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{i\sigma(i)} - (\alpha_{ik} + \alpha_{ki}) = \alpha_{i\sigma(i)} - \min_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki}) \leq \alpha_{i\sigma(i)} - 1.$$

Тоді

$$\gamma^r_{i\sigma(i)} = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1, \max_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{k\sigma(i)} - \alpha_{ki})) = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1, \alpha_{i\sigma(i)} - \min_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{ik} + \alpha_{ki})) = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1). \quad (24)$$

Таким чином, $\gamma^r_{i\sigma(i)} = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1)$.

Нехай $i \neq j$. Оскільки $\beta_{kk} = 1$ для всіх k та $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$ при $k \neq j$, то

$$\gamma^l_{ij} = \max_k(\beta_{ik} - \beta_{jk}) = \max(1 - \beta_{ji}, \beta_{ij} - 1, \max_{k\neq i,j}(\beta_{ik} - \beta_{jk})) = \max(1 - \alpha_{ji}, \alpha_{ij} - 1, \max_{k\neq i,j}(\alpha_{ik} - \alpha_{jk})).$$

Розглянемо спочатку випадок $j \neq \sigma(i)$.

Очевидно, що $\alpha_{ik} - \alpha_{jk} \leq \alpha_{ij}$. Припустимо, що $\max_{k\neq i,j}(\alpha_{ik} - \alpha_{jk}) < \alpha_{ij}$. Тоді для всіх $k \neq i, j$ маємо $\alpha_{ik} - \alpha_{jk} < \alpha_{ij}$ або $\alpha_{ik} \leq \alpha_{jk} + \alpha_{ij}$. Але при $k = \sigma(i) \neq j$ маємо $\alpha_{jk} + \alpha_{ij} = \alpha_{ik}$. Отримали протиріччя.

Таким чином, при $j \neq \sigma(i)$ маємо $\max_{k\neq i,j}(\alpha_{ik} - \alpha_{jk}) = \alpha_{ij}$.

Оскільки кільце зведене, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 1$ і тоді

$$\gamma^l_{ij} = \max_k(\beta_{ik} - \beta_{jk}) = \max(1 - \alpha_{ji}, \alpha_{ij} - 1, \max_{k\neq i,j}(\alpha_{ik} - \alpha_{jk})) = \max(1 - \alpha_{ji}, \alpha_{ij} - 1, \alpha_{ij}) = \alpha_{ij}.$$

Отже, при $j \neq \sigma(i)$ $\gamma^l_{ij} = \alpha_{ij}$.

Розглянемо тепер випадок $j = \sigma(i)$.

$$\gamma^l_{i\sigma(i)} = \max_k(\beta_{ik} - \beta_{\sigma(i)k}) = \max(1 - \beta_{\sigma(i)i}, \beta_{i\sigma(i)} - 1, \max_{k\neq i,\sigma(i)}(\beta_{ik} - \beta_{\sigma(i)k})) = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1, \max_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{ik} - \alpha_{\sigma(i)k})). \quad (25)$$

Враховуючи, що $\alpha_{ik} = \alpha_{i\sigma(i)} - \alpha_{k\sigma(i)}$ та $\alpha_{\sigma(i)k} + \alpha_{k\sigma(i)} > 1$, отримаємо

$$\max_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{ik} - \alpha_{\sigma(i)k}) = \max_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{i\sigma(i)} - (\alpha_{\sigma(i)k} + \alpha_{k\sigma(i)}) = \alpha_{i\sigma(i)} - \min_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{\sigma(i)k} + \alpha_{k\sigma(i)}) \leq \alpha_{i\sigma(i)} - 1.$$

Тоді

$$\gamma^l_{i\sigma(i)} = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1, \max_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{ik} - \alpha_{\sigma(i)k})) = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1, \alpha_{i\sigma(i)} - \min_{k\neq i,\sigma(i)}(\alpha_{\sigma(i)k} + \alpha_{k\sigma(i)})) = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1). \quad (26)$$

Таким чином, $\gamma^l_{i\sigma(i)} = \max(1 - \alpha_{\sigma(i)i}, \alpha_{i\sigma(i)} - 1)$ і маємо $\gamma^r_{i\sigma(i)} = \gamma^l_{i\sigma(i)} = \gamma_{i\sigma(i)}$. $\square$

Ми отримали, що

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } j \neq \sigma(i), \\ \max(\alpha_{i\sigma(i)} - 1, 1 - \alpha_{\sigma(i)i}), & \text{якщо } j = \sigma(i). \end{cases}$$

Позаяк можливі два випадки:

1) $1 - \alpha_{\sigma(i)i} = \alpha_{i\sigma(i)}$;

2) $1 - \alpha_{\sigma(i)i} \leq \alpha_{i\sigma(i)} - 1$,

то

$$\gamma_{i\sigma(i)} = \begin{cases} \alpha_{i\sigma(i)}, & \text{якщо } \alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)i} = 1, \\ \alpha_{i\sigma(i)} - 1, & \text{якщо } \alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)i} \geq 2. \end{cases}$$

Отже

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } j \neq \sigma(i), \\ \alpha_{i\sigma(i)}, & \text{якщо } \alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)i} = 1, \\ \alpha_{i\sigma(i)} - 1, & \text{якщо } \alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{\sigma(i)i} \geq 2. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що в кожному рядку та у кожному стовпчику матриці $\mathcal{E}(O(R))$ може бути не більш ніж одна двійка. Враховуючи порядок елементів матриці (γ_{ij}) в рядках та стовпчиках, одержимо, що серед елементів матриці (γ_{ij}) можлива лише одна двійка. Якщо існують такі i та j, при яких $\gamma_{ij} = 2$, то $i = n$, $j = 1$.

13 Зміна кільця множників радикалу Джекобсона при ізоморфізмі горенштейнових порядків

Нехай Λ — зведений горенштейновий первинний напівмаксимальний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$, R — його радикал Джекобсона, $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$.

Нагадаємо, що два зведених напівмаксимальних порядки в $M_n(D)$ ізоморфні тоді та тільки тоді, коли їх матриці показників отримуються одна з одної перетвореннями наступних двох типів:

(1) віднімання від i - го рядка цілого раціонального числа з одночасним додаванням до i - го стовпчика цього ж числа;

(2) одночасна перестановка двох рядків та відповідних їм стовпчиків.

Вияснимо спочатку, як змінюється матриця показників кільця множників радикалу $\mathcal{E}(O(R))$ при ізоморфізмі кільця Λ.

Нехай $\varphi : \mathcal{E}(\Lambda) \to \mathcal{E}(A)$ — перетворення першого типу, $\mathcal{E}(A) = (a_{ij})$, тобто для деякого фіксованого l

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } i \neq l, j \neq l, \\ \alpha_{ij} + t, & \text{якщо } i = l, j \neq l, \\ \alpha_{ij} - t, & \text{якщо } i \neq l, j = l, \\ 0, & \text{якщо } i = l, j = l. \end{cases}$$

Якщо $\mathcal{E}(radA) = B = (b_{ij})$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } i \neq l, j \neq l, i \neq j, \\ \alpha_{ij} + t, & \text{якщо } i = l, j \neq l, \\ \alpha_{ij} - t, & \text{якщо } i \neq l, j = l, \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Оскільки

$$\mathcal{E}(O(R)) = \max_k(\beta_{kj} - \beta_{ki}),\ \mathcal{E}(O(B)) = \max_k(b_{kj} - b_{ki}),$$

то при $i \neq l$, $j \neq l$, $i \neq j$ маємо

$$\max_k(b_{kj} - b_{ki}) = \max_k(\alpha_{kj} - \alpha_{ki}) = \max_k(\beta_{kj} - \beta_{ki});$$

при $i \neq l$, $j = l$

$$\max_k(b_{kj} - b_{ki}) = \max_k((\alpha_{kl} - t) - \alpha_{ki}) = \max_k(\alpha_{kl} - \alpha_{ki}) - t;$$

при $i = l$, $j \neq l$

$$\max_k(b_{kj} - b_{kl}) = \max_k(\alpha_{kj} - (\alpha_{kl} - t)) = \max_k(\alpha_{kj} - \alpha_{kl}) + t.$$

Таким чином $\varphi(O(rad\Lambda)) = O(rad(\varphi(\Lambda)))$.

Нехай τ — перетворення другого типу, $\tau : \mathcal{E}(\Lambda) \to \mathcal{E}(A)$. Тоді $\mathcal{E}(A) = P_\tau^T \mathcal{E}(\Lambda) P_\tau$, а тому і $\mathcal{E}(B) = P_\tau^T \mathcal{E}(R) P_\tau$, тобто $a_{ij} = \alpha_{\tau(i)\tau(j)}$, $b_{ij} = \beta_{\tau(i)\tau(j)}$ при $i \neq j$ і $r_{ii} = 1$. Маємо

$$\max_k(b_{kj} - b_{ki}) = \max_k(\beta_{\tau(k)\tau(j)} - \beta_{\tau(k)\tau(i)}) = \max_p(\beta_{p\tau(j)} - \beta_{p\tau(i)}).$$

Отже, при перетвореннях другого типу над порядком Λ, аналогічні перетворення відбуваються над порядком $O(R)$ і для довільного перетворення ψ (першого чи другого типу) $\psi(O(rad\Lambda)) = O(rad(\psi(\Lambda)))$.

Спадковий порядок ізоморфний кільцю $H_s(\mathcal{O})$. Тому можна вважати, що $O(R) = O^r(R) = H$. Тоді

$$\max_k(\beta_{kj} - \beta_{ki}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \leq j, \\ 1, & \text{якщо } i > j. \end{cases}$$

Звідси отримуємо при $j = i + 1$, що $\beta_{ki+1} \leq \beta_{ki}$ для будь-якого i, а при $j = 1$, $i = s$ $\beta_{k1} \leq \beta_{ks} + 1$. В результаті маємо ланцюг

$$\beta_{ks} \leq \beta_{ks-1} \leq \cdots \leq \beta_{k2} \leq \beta_{k1} \leq \beta_{ks} + 1.$$

Позаяк $\beta_{kk} = 1$, то $0 \leq \beta_{ks} \leq 1$ і $0 \leq \beta_{ij} \leq 2$, причому при фіксованому k або $0 \leq \beta_{kj} \leq 1$ для всіх j або $1 \leq \beta_{kj} \leq 2$ для всіх j. Крім цього $\beta_{kj} \leq 1$ при $j > k$ і $\beta_{kj} \geq 1$ при $j < k$.

$O(R) = O^l(R) = H$

$$\max_k(\beta_{ik} - \beta_{jk}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \leq j, \\ 1, & \text{якщо } i > j. \end{cases}$$

Звідси отримуємо при $j = i + 1$, що $\beta_{ik} \leq \beta_{i+1k}$ для будь-якого i, а при $j = 1$, $i = s$ $\beta_{sk} \leq \beta_{1k} + 1$. В результаті маємо ланцюг

$$\beta_{1k} \leq \beta_{2k} \leq \cdots \leq \beta_{s-1k} \leq \beta_{sk} \leq \beta_{1k} + 1.$$

Позаяк $\beta_{kk} = 1$, то $0 \leq \beta_{1k} \leq 1$ і $0 \leq \beta_{ij} \leq 2$, причому при фіксованому k або $0 \leq \beta_{ik} \leq 1$ для всіх i або $1 \leq \beta_{ik} \leq 2$ для всіх i. Крім цього $\beta_{kj} \leq 1$ при $j > k$ і $\beta_{kj} \geq 1$ при $j < k$.

14 Горенштейнові черепичні порядки зі спадковим кільцем множників радикалу Джекобсона

Теорема 14.1. *Нехай Λ — зведений первинний горенштейновий напівмаксимальний порядок і кільце множників радикалу Джекобсона цього кільця є спадковим. Тоді Λ Моріта еквівалентне одному з чотирьох кілець*
(a) $H_s(\mathcal{O})$

$$\mathcal{E}(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & s-1 & s \\ s & 1 & 2 & \cdots & s-2 & s-1 \end{pmatrix};$$

(b) G_{2s}

$$\mathcal{E}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & s-1 & s & s+1 & s+2 & s+3 & \cdots & 2s-1 & 2s \\ s+1 & s+2 & s+3 & \cdots & 2s-1 & 2s & 1 & 2 & 3 & \cdots & s-1 & s \end{pmatrix};$$

(c) Γ_s

$$\mathcal{E}(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & s-1 & s \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & s & 1 \end{pmatrix};$$

(d) F_{2s}

$$\mathcal{E}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2s-2 & 2s-1 & 2s \\ 2s & 3 & 2 & 5 & 4 & \cdots & 2s-1 & 2s-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. З точністю до ізоморфізму існує єдиний спадковий порядок $H_s(\mathcal{O})$ з матрицею показників

$$\mathcal{E}(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & s-1 & s \\ s & 1 & 2 & \cdots & s-2 & s-1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок, коли існують p та q такі що $\alpha_{pq} = 2$. Тоді $\alpha_{s1} = 2$. Припустимо, що перший стовпчик матриці містить більше ніж одну двійку — існує $k \le s-1$ таке що $\alpha_{k+11} = 2$ і перший стовпчик матриці показників має вигляд: $(\underbrace{011\cdots1}2\cdots2)^T$. Порядок горенштейновий тому існує l для якого $\sigma(l) = 1$ $l \ge k$ та $\alpha_{lj} + \alpha_{j1} = \alpha_{l1} = 2$. Звідси $\alpha_{j1} = 2 - \alpha_{lj}$ і l-ий рядок матриці показників має вигляд: $(\underbrace{211\cdots1}0\cdots0)$. Оскільки $\alpha_{l1} = 2$, то $\beta_{lj} \ge 1$ для всіх j. Тому $\alpha_{lj} = 0$ лише при $j = l$. Отже, $k = s-1$.

Припустимо, що останній рядок матриці містить більше ніж одну двійку — існує $k \ge s-1$ таке що $\alpha_{sk} = 2$ і останній рядок матриці показників має вигляд: $(\underbrace{222\cdots2}1\cdots10)$. Порядок горенштейновий тому існує l для якого $\sigma(s) = l$ $l \le k$ та $\alpha_{sj} + \alpha_{jl} = \alpha_{sl} = 2$. Звідси $\alpha_{jl} = 2 - \alpha_{sj}$ і l-ий стовпчик матриці показників має вигляд: $(\underbrace{000\cdots0}1\cdots12)^T$. Оскільки $\alpha_{sl} = 2$, то $\beta_{il} \ge 1$ для всіх i. Тому $\alpha_{il} = 0$ лише при $k = l$. Отже, $k = 1$.

Таким чином якщо серед елементів матриці показників горенштейнового порядку є двійка, то вона єдина і знаходиться у лівому нижньому куту матриці: $\alpha_{s1} = 2$.

Отже, якщо існує $\alpha_{pq} = 2$, то $p = s$, $q = 1$. В цьому випадку половина елементів матриці показників

$\mathcal{E}(\Lambda)$ відома

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * & * & * \\ 1 & 0 & * & \cdots & * & * & * \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & * \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $i > j$ маємо

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \neq s, j \neq 1 \\ 2, & \text{якщо } i = s, j = 1. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Існує i таке що $\alpha_{i\sigma(i)} = 0$. Тоді це $i = 1$ а $\sigma(i) = n$, $\alpha_{1\sigma(1)} = 0$. Перший рядок та останній стовпчик матриці показників нульові. Порядок зведений, тому більше не існує нульових рядків та стовпчиків $\alpha_{k\sigma(k)} = 1$ $k = 2, \ldots, n-1$, $\alpha_{n\sigma(n)} = 2$.

Нехай в k-му рядку i_k одиниць та $n - i_k$ нулів $k = 2, \ldots, n-1$. В 1-ому рядку 0 одиниць та n нулів. В n-ому рядку $n-2$ одиниці, одна двійка та один 0.

Оскільки $\alpha_{kj} + \alpha_{j\sigma(k)} = \alpha_{k\sigma(k)} = 1$ $k = 2, \ldots, n-1$, то в $\sigma(1)$-стовпчику 0 одиниць та n нулів, в $\sigma(k)$-му стовпчику $n - i_k$ одиниць та i_k нулів $k = 2, \ldots, n-1$, в $\sigma(n)$-ому стовпчику $n-2$ одиниці, одна двійка 2 та один 0.

Обчислимо суму d всіх елементів матриці показників. З одного боку

$$d = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} = i_2 + \cdots + i_{n-1} + (2 + n - 2) \quad (i_1 = 0).$$

З іншого боку

$$d = (n - i_2) + \cdots + (n - i_{n-1}) + (2 + n - 2).$$

Прирівнюючи отримані вирази для d, отримаємо

$$i_2 + \cdots + i_{n-1} + (2 + n - 2) = (n - i_2) + \cdots + (n - i_{n-1}) + (2 + n - 2).$$

Звідси $2(i_2 + \cdots + i_{n-1}) = (n-2)n$ і n повинно бути парним $n = 2t$. Тоді $i_2 + \cdots + i_{n-1} = \frac{n(n-2)}{2}$.

Обчислимо суму всіх елементів матриці показників під головною діагоналлю.

$$d_- = 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (2 + n - 2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2} + (2 + n - 2).$$

Тому для суми всіх елементів над діагоналлю маємо

$$d_+ = d - d_- = \frac{(n-2)n}{2} + (2 + n - 2) - (\frac{(n-2)(n-1)}{2} + (2 + n - 2)) = \frac{n-2}{2}.$$

$d_+ = d - d_- = \frac{n-2}{2}$.

Випадок 2. $\alpha_{i\sigma(i)} = 1$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Нехай в k-му рядку i_k одиниць та $n-i_k$ нулів $k=1,2,\dots,n-1$. В n-ому рядку $n-2$ одиниці, одна двійка та один 0.

Оскільки $\alpha_{kj}+\alpha_{j\sigma(k)}=\alpha_{k\sigma(k)}=1$ $k=1,2,\dots,n-1$, то в $\sigma(k)$-му стовпчику $n-i_k$ одиниць та i_k нулів $k=1,2,\dots,n-1$, в $\sigma(n)$-ому стовпчику $n-2$ одиниці, одна двійка 2 та один 0.

Обчислимо суму всіх елементів матриці показників. З одного боку

$$d=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}=i_1+i_2+\dots+i_{n-1}+(2+n-2).$$

З іншого боку

$$d=(n-i_1)+(n-i_2)+\dots+(n-i_{n-1})+(2+n-2).$$

Прирівнюючи отримані вирази для d, отримаємо

$$i_1+i_2+\dots+i_{n-1}+(2+n-2)=(n-i_1)+(n-i_2)+\dots+(n-i_{n-1})+(2+n-2).$$

Звідси $2(i_1+i_2+\dots+i_{n-1})=(n-1)n$. Тоді $i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=\frac{(n-1)n}{2}$.

Обчислимо суму всіх елементів матриці показників під головною діагоналлю.

$$d_-=1+2+\dots+(n-2)+(2+n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}+(2+n-2).$$

Тому для суми всіх елементів над діагоналлю маємо

$$d_+=d-d_-=\frac{(n-1)n}{2}+(2+n-2)-(\frac{(n-2)(n-1)}{2}+(2+n-2))=n-1.$$

$d_+=d-d_-=n-1.$

Нехай для кожного i $\alpha_{i\sigma(i)}=1$. Очевидно $\sigma(s)=1$

Тоді матриця показників горенштейнового порядку має вигляд

$$\begin{pmatrix} * & & & * & \\ & 0 & * & * & * \\ & 1 & 0 & * & * \\ * & 1 & 1 & 0 & * \\ & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma(s-1)=s$ бо інакше $\alpha_{s-1s}=0$ і тоді s-ий стовпчик матриці показників нульовий. Для $\sigma(s-2)$ маємо дві можливості $\sigma(s-2)=s-3$ або $\sigma(s-2)=s-1$. Якщо $\sigma(s-2)=s-3$, то $\alpha_{s-2s-1}=0$ і $(s-1)$-ий стовпчик матриці має вигляд $(00\cdots01)^T$. Тоді не існує такого k що $\sigma(k)=s-1$ k-ий рядок матриці повинен мати вигляд $(11\cdots10)$. Отже $\sigma(s-2)=s-1$.

$$\begin{pmatrix} * & & & * & & \\ & 0 & * & * & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для $\sigma(s-3)$ теж маємо дві можливості $\sigma(s-3)=s-4$ або $\sigma(s-3)=s-2$. Якщо $\sigma(s-3)=s-4$, то $\alpha_{s-3s-2}=0$ і $(s-2)$-ий стовпчик матриці має вигляд $(0\cdots 011)^T$. Тоді не існує такого k для якого $\sigma(k)=s-2$ та k-ий рядок має вигляд $(11\cdots 100)$. Отже, $\sigma(s-3)=s-2$.

Продовжуючи аналогічно, будемо мати $\sigma(i)=i+1$ для всіх $i<s$. Отримаємо матрицю

(c) Γ_s

$$\mathcal{E}(\Gamma)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & s-1 & s\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & s & 1 \end{pmatrix};$$

Нехай $s=2t$ — парне число та існує i таке що $\alpha_{i\sigma(i)}=0$. Тоді очевидно $i=1$, $\sigma(1)=s$.

$$\begin{pmatrix} * & & & * & & \\ & 0 & * & * & * & 0\\ & 1 & 0 & * & * & 0\\ * & 1 & 1 & 0 & * & 0\\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді $\sigma(s-1)=s-2$. $(s-1)$-ий стовпчик матриці показників має вигляд $(0\cdots 0*01)^T$. Тому k-ий рядок, для якого $\sigma(k)=s-1$ має вигляд $(1\cdots 1*10)$. Звідси для k маємо дві можливості $k=s-2$ або $k=s$. Так як $\sigma(s)=1\neq s-1$, то $k=s-2$. Отже, $\sigma(s-2)=s-1$.

$$\begin{pmatrix} * & & & * & & & \\ & 0 & * & * & * & 0 & 0\\ & 1 & 0 & * & * & 0 & 0\\ & 1 & 1 & 0 & * & 0 & 0\\ * & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді $\sigma(s-3)=s-4$. $(s-3)$-ий стовпчик матриці показників має вигляд $(0\cdots 0*0111)^T$. Тому k-ий рядок, для якого $\sigma(k)=s-3$ має вигляд $(1\cdots 1*1000)$. Звідси $k=s-4$. Отже, $\sigma(s-3)=s-4$.

Продовжуючи аналогічно, будемо мати $\sigma(2i-1)=2i-2$ $\sigma(2i-2)=2i-1$ для всіх i $2i\leq s$. Отримаємо матрицю

(d) F_{2s}

$$\mathcal{E}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2s-2 & 2s-1 & 2s \\ 2s & 3 & 2 & 5 & 4 & \cdots & 2s-1 & 2s-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця показників горенштейнового порядку не містить двійок, то вона є (0, 1)-матрицею. Горенштейнові (0, 1)-порядки добре відомі. З точністю до Моріта-еквівалентності є два горенштейнових (0, 1)-порядка. Це $H_s(\mathcal{O})$ та $G_{2s}(\mathcal{O})$.

Таким чином, з точністю до ізоморфізму для парного n існує чотири зведених горенштейнових черепичних порядки в $M_n(D)$ зі спадковим кільцем множників радикалу Джекобсона: H_n, G_n, Γ_n, F_n. А для непарного n — лише два, а саме: H_n, F_n.

$\square$

15 Матриці показників та латинські квадрати

Означення 15.1. *Латинський квадрат порядку n— це квадратна матриця, у якої кожен рядок і кожен стовпчик є перестановкою елементів множини $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$.*

Далі будемо розглядати матриці з невід'ємними елементами.

Теорема 15.2. *Нехай матриця суміжності $[Q] = (q_{ij})$ сагайдака Q має вигляд $[Q] = E + P_\tau + q_{13}P_{\tau^2} + \cdots + q_{1n}P_{\tau^{n-1}}$, де $q_{ij} \in \{0, 1\}$, P_τ — матриця циклічної підстановки $\tau = (1\ 2\ \cdots\ n)$. Тоді існує зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ вигляду $\mathcal{E} = \alpha_{12}P_\tau + \alpha_{13}P_{\tau^2} + \cdots + \alpha_{1n}P_{\tau^{n-1}}$, сагайдак якої $Q(\mathcal{E})$ співпадає з сагайдаком Q.*

Навпаки, якщо зведена матриця показників має вигляд $\mathcal{E} = \alpha_{12}P_\tau + \alpha_{13}P_{\tau^2} + \cdots + \alpha_{1n}P_{\tau^{n-1}}$, де $\tau = (1\ 2\ \cdots\ n)$, $1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_{13} \leq \cdots \leq \alpha_{1n}$, то матриця суміжності $[Q(\mathcal{E})]$ сагайдака $Q(\mathcal{E})$ має вигляд $[Q] = E + P_\tau + q_{13}P_{\tau^2} + \cdots + q_{1n}P_{\tau^{n-1}}$.

Доведення. Сагайдак Q має петлю в кожній вершині та є сильно звязним, бо містить цикл $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n \to 1$. Тому за наслідком 1.17 з теореми 1.15 отримуємо, що він допустимий.

Нехай $q_{11}, q_{12}, q_{1i_1}, q_{1i_2}, \ldots, q_{1i_p}$ — всі ненульові елементи першого рядка матриці суміжності $[Q]$, тобто $[Q] = E + P_\tau + P_{\tau^{i_1-1}} + P_{\tau^{i_2-1}} + \cdots + P_{\tau^{i_p-1}}$. Можемо вважати, що $3 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$. Оскільки

$q_{1i_k}P_{\tau^{i_k-1}} = q_{1i_k}\sum\limits_{j=1}^{n} e_{j\tau^{i_k-1}(j)}$ та $\tau^{i_k-1}(j) \equiv j+i_k-1 \pmod n$, то $q_{1i_k} = q_{2,i_k+1} = q_{\tau(1)\tau(i_k)} = q_{\tau^2(1)\tau^2(i_k)} = \cdots = q_{\tau^{n-1}(1)\tau^{n-1}(i_k)} = 1$. Взагалі $q_{ij} = q_{\tau(i)\tau(j)}$ для всіх i,j. Визначимо на множині стрілок AQ вагову функцію $\omega\colon AQ \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ наступним чином. Оскільки $q_{ij} = q_{\tau(i)\tau(j)}$ для довільних i,j, то разом із стрілкою σ_{ij} сагайдак Q містить стрілки $\sigma_{\tau(i)\tau(j)}, \sigma_{\tau^2(i)\tau^2(j)}, \ldots, \sigma_{\tau^{n-1}(i)\tau^{n-1}(j)}$. Покладемо $\omega(\sigma_{ij}) = \omega(\sigma_{\tau(i)\tau(j)})$ для довільної стрілки $\sigma_{ij}\in AQ$.

Позаяк τ — цикл, то досить задати вагу кожної стрілки, що виходить з вершини 1. Тоді будемо мати $\omega(\sigma_{1i_k}) = \omega(\sigma_{\tau(1)\tau(i_k)}) = \cdots = \omega(\sigma_{\tau^{n-1}(1)\tau^{n-1}(i_k)})$ або $\omega(\sigma_{1i_k}) = \omega(\sigma_{2\tau(i_k)}) = \cdots = \omega(\sigma_{n\tau^{n-1}(i_k)})$. Значення $\omega(\sigma_{12}), \omega(\sigma_{1i_1}), \ldots, \omega(\sigma_{1i_p})$ визначимо індуктивно. Покладемо $\omega(\sigma_{12}) = x_0 \geq 2$. Нехай визначено значення $\omega(\sigma_{12}), \omega(\sigma_{1i_1}), \ldots, \omega(\sigma_{1i_k})$. Покладемо $\omega(\sigma_{1i_{k+1}}) = \min\ \omega\left(P(1,i_{k+1})\right)-1$, де $P(1,i_{k+1})$ — шлях у сагайдаку Q із вершини 1 у вершину i_{k+1}, що не є стрілкою, а мінімум береться по всім таким шляхам.

Так визначена вагова функція ω задовольняє всім умовам теореми 1.15. Дійсно, вага будь-якої стрілки додатна (це легко отримується індукцією за номером k стрілки σ_{1i_k}). Тому вага довільного циклу, що не є петлею, більша, ніж 1. За побудовою вагової функції вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geqslant 2$.

Тому за ваговою функцією легко будується зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$, сагайдак якої співпадає з даним. А саме: $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i та при $i\neq j$ $\alpha_{ij} = \min\ \omega\left(P(i,j)\right)$, де мінімум береться по всім шляхам $P(i,j)$ із вершини i у вершину j.

Оскільки стрілки σ_{ij} та $\sigma_{\tau(i)\tau(j)}$ існують у сагайдаку Q одночасно для довільних i,j, то і шляхи $P(i,j) = \{i\to k_1\to k_2\to\cdots k_s\to j\}$ та $P(\tau(i),\tau(j)) = P_\tau(i,j) = \{\tau(i)\to\tau(k_1)\to\tau(k_2)\to\cdots\tau(k_s)\to\tau(j)\}$ існують одночасно у сагайдаку Q, причому $\omega\left(P(i,j)\right) = \omega\left(P_\tau(i,j)\right)$. Тому $\alpha_{ij} = \alpha_{\tau(i)\tau(j)}$ для всіх i,j. Це означає, що $\mathcal{E} = \alpha_{12}P_\tau + \alpha_{13}P_{\tau^2} + \cdots + \alpha_{1n}P_{\tau^{n-1}}$.

Навпаки, нехай $\mathcal{E} = \alpha_{12}P_\tau + \alpha_{13}P_{\tau^2} + \cdots + \alpha_{1n}P_{\tau^{n-1}}$, де $1\leq\alpha_{12}\leq\alpha_{13}\leq\cdots\leq\alpha_{1n}$ та $\tau = (1\ 2\ \cdots\ n)$. Це рівносильно тому, що $\alpha_{ij} = \alpha_{\tau(i)\tau(j)}$ для всіх i,j. Очевидно, що для елементів матриці $\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}+E = (\beta_{ij})$ також виконується рівність $\beta_{ij} = \beta_{\tau(i)\tau(j)}$. Для елементів γ_{ij} матриці $\mathcal{E}^{(2)}$ маємо $\gamma_{ij} = \min\limits_k\ (\beta_{ik}+\beta_{kj}) = \min\limits_k\ \left(\beta_{\tau(i)\tau(k)}+\beta_{\tau(k)\tau(j)}\right) = \gamma_{\tau(i)\tau(j)}$.

Звідси для елементів q_{ij} матриці суміжності $[Q(\mathcal{E})] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ сагайдака $Q(\mathcal{E})$ маємо рівність $q_{ij} = \gamma_{ij}-\beta_{ij} = \gamma_{\tau(i)\tau(j)}-\beta_{\tau(i)\tau(j)} = q_{\tau(i)\tau(j)}$. Це означає, що $[Q] = q_{11}E + q_{12}P_\tau + q_{13}P_{\tau^2} + \cdots + q_{1n}P_{\tau^{n-1}}$.

З $\alpha_{1j}>0$ для всіх $j\neq 1$ випливає, що $\beta_{ij}\geq 1$ для всіх i,j. Тому $\gamma_{ii} = 2$ та $q_{ii} = 1$ для всіх i. Оскільки $1\leq\alpha_{12}\leq\alpha_{1k}$ та $\alpha_{k2}>0$ для всіх $k\geq 2$, то $\alpha_{1k}+\alpha_{k2}>\alpha_{12}$ для всіх $k\neq 1,2$ і тоді $q_{12} = 1$. Отже, $[Q(\mathcal{E})] = E + P_\tau + q_{13}P_{\tau^2} + \cdots + q_{1n}P_{\tau^{n-1}}$. Теорема доведена. □

Зауваження 15.3. *Для довільного сагайдака Q з матрицею суміжності $[Q] = E + P_\tau + q_{13}P_{\tau^2} + \cdots + q_{1n}P_{\tau^{n-1}}$, де $q_{ij}\in\{0,1\}$, P_τ — матриця циклічної підстановки $\tau = (1\ 2\ \cdots\ n)$, ми побудували зліченну кількість зведених матриць показників $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x_0)$ вигляду $\mathcal{E} = \alpha_{12}P_\tau + \alpha_{13}P_{\tau^2} + \cdots + \alpha_{1n}P_{\tau^{n-1}}$ з $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

Теорема 15.4. *Нехай матриця суміжності $[Q] = (q_{ij})$ сагайдака Q має вигляд $[Q] = E + P_\tau + q_{13}P_{\tau^2} + \cdots + q_{1n}P_{\tau^{n-1}}$, де $q_{ij}\in\{0,1\}$, P_τ — матриця циклічної підстановки $\tau = (1\ 2\ \cdots\ n)$. Тоді існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, яка є латинським квадратом, і сагайдак якої $Q(\mathcal{E})$ співпадає з сагайдаком Q.*

Доведення. Покажемо, що зведена матриця показників $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x_0)$, побудована при доведенні попередньої теореми, при $x_0 \geq 2$ є латинським квадратом. Із вершини 1 виходить рівно $(p+1)$-а стрілка: $\sigma_{12}, \sigma_{1i_1}, \sigma_{1i_2}, \ldots, \sigma_{1i_p}$. Нехай $\omega(\sigma_{12}) = x_0$, $\omega(\sigma_{1i_1}) = x_1$, $\omega(\sigma_{1i_2}) = x_2$, ..., $\omega(\sigma_{1i_p}) = x_p$. Оскільки $\omega(\sigma_{ij}) = \omega(\sigma_{\tau(i)\tau(j)})$ для всіх i, j, для яких існує стрілка, то множина AQ всіх стрілок сагайдака Q ділиться на $p+1$ клас рівних за вагою стрілок. Причому класи не перетинаються.

Зазначимо, що вага шляху з однієї вершини у іншу вершину залежить від кількості стрілок кожного класу у цьому шляху і не залежить від порядку класів стрілок, що задається порядком слідування стрілок у шляху. Наприклад, є 3 шляхи з 1 у i_1+2: $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{3,i_1+2}$, $\sigma_{12}\sigma_{2,i_1+1}\sigma_{i_1+1,i_1+2}$, $\sigma_{1i_1}\sigma_{i_1,i_1+1}\sigma_{i_1+1,i_1+2}$. Кожен із цих шляхів містить 2 стрілки з класу ваги x_0 (де знаходиться стрілка σ_{12}) і 1 стрілку з класу ваги x_1 (де знаходиться стрілка σ_{1i_1}). Вага кожного з цих шляхів дорівнює $2x_0 + x_1$.

Розглянемо шлях $P(1, k+1)$ із вершини 1 у вершину $k+1$. Нехай $i_l \leq k+1 < i_{l+1}$ для деякого l. Тоді цей шлях містить $y_{k+1,l}$ стрілок ваги x_l, $y_{k+1,l-1}$ стрілок ваги x_{l-1}, ..., $y_{k+1,0}$ стрілок ваги x_0 (тут деякі $y_{k+1,j}$ можуть дорівнювати 0). Оскільки вага шляху не залежить від порядку класів стрілок у цьому шляху, то ми можемо вважати, що в шляху із вершини 1 у вершину $k+1$ спочатку ідуть $y_{k+1,l}$ стрілок ваги x_l, потім $y_{k+1,l-1}$ стрілок ваги x_{l-1} і т.д. Останніми будуть $y_{k+1,0}$ стрілок ваги x_0 (якщо такі є у цьому шляху). Стрілка ваги x_k починається у деякій вершині t та закінчується у вершині $t + i_k - 1$. Тому $(k+1) - 1 = y_{k+1,l}(i_l - 1) + y_{k+1,l-1}(i_{l-1} - 1) + \cdots + y_{k+1,1}(i_1 - 1) + y_{k+1,0}(2-1)$,
$\omega\left(P(1, k+1)\right) = y_{k+1,l}x_l + y_{k+1,l-1}x_{l-1} + \cdots + y_{k+1,1}x_1 + y_{k+1,0}x_0$.

Припустимо, що $y_{k+1,l} > 0$. Розглянемо тепер шлях $P'(1, k+1)$, який відрізняється від шляху $P(1, k+1)$ тим, що замість однієї стрілки ваги x_l має $s_{l,l-1}$-у стрілку ваги x_{l-1}, ..., $s_{l,1}$-у стрілку ваги x_1, $s_{l,0}$-у стрілку ваги x_0, Тоді $i_l - 1 = s_{l,l-1}(i_{l-1} - 1) + \cdots + s_{l,1}(i_1 - 1) + s_{l,0}(2-1)$, причому $0 \leq s_{l,l-1} \leq y_{k+1,l-1}, \ldots, 0 \leq s_{l,1} \leq y_{l,1}, 0 \leq s_{l,0} \leq s_{l,0}$. Вага цього шляху $\omega\left(P'(1, k+1)\right) = (y_{k+1,l} - 1)x_l + (s_{l,l-1}x_{l-1} + \cdots + s_{l,1}x_1 + s_{l,0}x_0) + y_{k+1,l-1}x_{l-1} + \cdots + y_{k+1,1}x_1 + y_{k+1,0}x_0$.

Оскільки $x_l < s_{l,l-1}x_{l-1} + \cdots + s_{l,1}x_1 + s_{l,0}x_0$, то $\omega\left(P'(1, k+1)\right) < \omega\left(P(1, k+1)\right)$.

Звідси отримуємо, що у шляху мінімальної ваги

$$y_{k+1,l} = \left[\frac{(k+1) - 1}{i_l - 1}\right].$$

Цілком аналогічно у шляху мінімальної ваги отримуємо

$$y_{k+1,l-1} = \left[\frac{(k+1) - 1 - y_{k+1,l}(i_l - 1)}{i_{l-1} - 1}\right].$$

При $j < l$

$$y_{k+1,j} = \left[\frac{(k+1) - 1 - y_{k+1,l}(i_l - 1) - \cdots - y_{k+1,j+1}(i_{j+1} - 1)}{i_j - 1}\right].$$

За ваговою функцією ω будується зведена матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ вигляду $\mathcal{E} = \alpha_{12}P_\tau + \alpha_{13}P_{\tau^2} + \cdots + \alpha_{1n}P_{\tau^{n-1}}$, сагайдак якої співпадає з даним. А саме: $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i та при $i \neq j$ $\alpha_{ij} = \min\ \omega\left(P(i,j)\right)$, де мінімум береться по всім шляхам $P(i,j)$ із вершини i у вершину j.

Нехай $P(1, k)$ та $P(1, k+1)$ — шляхи мінімальної ваги з вершини 1 у вершини k та $k+1$ відповідно. Можливі два випадки.

- Шлях $P(1,k+1)$ містить хоча б одну стрілку ваги x_0. Це рівносильно тому, що число k не подається у вигляді лінійної комбінації з цілими невід'ємними коефіцієнтами чисел $i_p-1, i_{p-1}-1, \dots, i_2-1, i_1-1$. Тоді $P(1,k+1) = P(1,k)\sigma_{k,k+1}$ і тому $\alpha_{1,k+1} = \alpha_{1,k} + x_0$.
- Шлях $P(1,k+1)$ не містить жодної стрілки ваги x_0. Це рівносильно тому, що число k подається у вигляді лінійної комбінації з цілими невід'ємними коефіцієнтами чисел $i_p-1, i_{p-1}-1, \dots, i_2-1, i_1-1$. Тоді шлях $P(1,k+1)$ отримується з шляху $P(1,k)\sigma_{k,k+1}$ заміною декількох стрілок однією стрілкою більшої ваги. Тому $\alpha_{1,k+1} = \alpha_{1,k} + x_0 - 1$.

В обох випадках $\alpha_{1,k+1} > \alpha_{1,k}$ при $x_0 \geq 2$. Тому всі елементи першого рядка матриці $\mathcal{E}$ є попарно різними числами. Оскільки матриця показників $\mathcal{E}$ має вигляд $\mathcal{E} = \alpha_{12}P_\tau + \alpha_{13}P_{\tau^2} + \dots + \alpha_{1n}P_{\tau^{n-1}}$, то вона є латинським квадратом. Теорема доведена. $\square$

Приклад 15.5. *Таблицю Келі четверної групи Клейна* $(2) \times (2)$ *можна записати у вигляді:*

$$K = K(4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

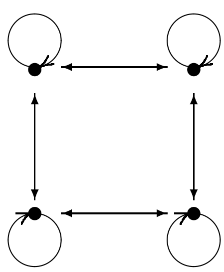
Тоді $K(4)$ *є зведеною горенштейновою матрицею показників з підстановкою Кириченка* $\sigma = \sigma(K(4)) = (14)(23)$. *Очевидно, що*

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

і

$$[Q(K)] = K^{(2)} - K^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot P_1,$$

де P_1 *є двічі стохастичнолю матрицею, а сагайдаком* $Q(K)$ *є*



Означення 15.6. *Квазігрупа Q, яка задовольняє рівність $(xu)(vy) = (xv)(uy)$ для $x, y, u, v \in Q$ називається* **ентропічною**.

Для таблиці Келі

$$\mathcal{E}(n) = \begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 & n-1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ентропічної квазігрупи $Q(n)$, розглянутої як матриці показників горенштейнового черепичного порядку, маємо $[Q(\mathcal{E}(n))] = E_n + J_n^-(0) + e_{1n}$, де $J_n^-(0) = e_{21} + \ldots + e_{nn-1}$ є нільпотентним нижнім жордановим блоком.

Означення 15.7. *Скінченна квазігрупа Q, визначена на множині $S = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ називається горенштейновою, якщо її таблиця Келі $C(Q) = (\alpha_{ij})$ має нулі на головній діагоналі та існує підстановка $\sigma : i \to \sigma(i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ така що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i = 1, \ldots, n$.*

Теорема 15.8. *Для довільної підстановки $\sigma \in S_n$ без фіксованих елементів існує зведений горенштейновий черепичний порядок Λ з підстановкою Кириченка $\sigma(\Lambda) = \sigma$.*

Доведення. Нехай підстановка σ не має циклів довжини 1 і розкладається у добуток циклів, які не перетинаються $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, де σ_i має довжину m_i. Позначимо через t найменше спільне кратне чисел $m_1 - 1, \ldots, m_k - 1$.

Розглянемо матрицю

$$\mathcal{E}(m_1, \ldots, m_s) = \begin{pmatrix} t_1\mathcal{E}(m_1) & tU_{m_1 \times m_2} & tU_{m_1 \times m_3} & \dots & tU_{m_1 \times m_k} \\ 0 & t_2\mathcal{E}(m_2) & tU_{m_2 \times m_3} & \dots & tU_{m_2 \times m_k} \\ 0 & 0 & t_3\mathcal{E}(m_3) & \dots & tU_{m_3 \times m_k} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_k\mathcal{E}(m_k) \end{pmatrix},$$

де $t_j = \frac{t}{m_j - 1}$, $U_{m_i \times m_j}$ є $m_i \times m_j$ - матрицею, чиї елементи дорівнюють 1;

$\mathcal{E}(m) = (\varepsilon_{ij})$, $\varepsilon_{ij} = \begin{cases} i - j, & \text{якщо } i \geq j; \\ i - j + m, & \text{якщо } i < j. \end{cases}$

Тоді виконується рівність $\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{j\sigma(i)} = \varepsilon_{i\sigma(i)} = m - 1$ для всіх i, j.

Очевидно, $\mathcal{E}(m_1, \ldots, m_s)$ є матрицею показників з підстановкою

$$\pi(A) = (123 \ldots m_1)(m_1 + 1 \ldots m_1 + m_2) \cdots (m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1} + 1 \ldots m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1} + m_k).$$

Оскільки підстановки σ та π мають один тип, то вони спряжені, тобто існує підстановка τ така що $\sigma = \tau^{-1}\pi(A)\tau$.

За твердженнями 1.5 та 1.7 матриця $P_\tau^T \mathcal{E}(m_1, \dots, m_s) P_\tau$ є матрицею показників горенштейнового черепичного порядку Λ з підстановкою $\sigma(\Lambda) = \sigma$. $\square$

16 Глобальна розмірність кілець

Нехай A —кільце. Позначимо через $\mathrm{mod} - A$ ($A - \mathrm{mod}$ категорію правих (лівих) A-модулів.

Означення 16.1. . *Проективною резольвентою A-модуля M називається точна послідовність A-модулів*

$$\cdots \longrightarrow P_{(2)} \xrightarrow{d_2} P_{(1)} \xrightarrow{d_1} P_{(0)} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0 \ ,$$

в якій всі модулі P_i проективні. Якщо існує n таке, що $P_n \neq 0$ а $P_k = 0$ для всіх $k > n$, то говорять, що довжина проективної резольвенти дорівнює n (і ∞, якщо такого числа не існує).

Означення 16.2. *Говорять, що проективна розмірність A-модуля M дорівнює n та пишуть $\mathrm{proj.dim}_A M = n$, якщо існує проективна резольвента довжини n:*

$$0 \longrightarrow P_{(n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{(1)} \longrightarrow P_{(0)} \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ ,$$

та не існує коротшої проективної резольвенти.

Якщо не існує проективної резольвенти скінченної довжини, то покладають $\mathrm{proj.dim}_A M = \infty$.

Ін'єктивна резольвента та ін'єктивна розмірність модуля визначається дуальним чином.

Твердження 16.3. *Кожен модуль має як ін'єктивну, так і проективну резольвенти.*

Означення 16.4. *Права проективна глобальна розмірність кільця A визначається наступним чином:*

$$\mathrm{r.proj.gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{proj.dim}_A M \ : \ M \in \mathrm{mod} - A\}.$$

Аналогічно визначається ліва проективна глобальна розмірність кільця:

$$\mathrm{l.proj.gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{proj.dim}_A N \ : \ N \in A - \mathrm{mod}\}.$$

Означення 16.5. *Права ін'єктивна глобальна розмірність кільця A визначається наступним чином:*

$$\mathrm{r.inj.gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{inj.dim}_A M \ : \ M \in \mathrm{mod} - A\}.$$

Аналогічно визначається ліва ін'єктивна глобальна розмірність кільця:

$$\mathrm{l.inj.gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{inj.dim}_A N \ : \ N \in A - \mathrm{mod}\}.$$

Теорема 16.6. *Для будь-якого кільця A мають місце рівності*

$$\mathrm{r.proj.gl.dim}\, A = \mathrm{r.inj.gl.dim}\, A, \quad \mathrm{l.proj.gl.dim}\, A = \mathrm{l.inj.gl.dim}\, A.$$

Враховуючи попередню теорему, можна визначити праву (ліву) глобальну розмірність кільця як спільне значення правої (лівої) проективної глобальної розмірності та правої (лівої) ін'єктивної глобальної розмірності:

$$\mathrm{r.gl.dim}\, A = \mathrm{r.proj.gl.dim}\, A = \mathrm{r.inj.gl.dim}\, A,$$

$$\mathrm{l.gl.dim}\, A = \mathrm{l.proj.gl.dim}\, A = \mathrm{l.inj.gl.dim}\, A$$

Твердження 16.7. *Глобальна розмірність кільця є інваріантною в сенсі Моріти.*

Теорема 16.8. *Якщо A — кільце, то* $\mathrm{r.gl.dim}\, A = \sup\limits_{I \subseteq A}\{\mathrm{proj.dim}_A(A/I)\}$, *тобто права глобальна розмірність кільця A дорівнює точній верхній межі проективних розмірностей циклічних правих A-модулів.*

Наслідок 16.9. *Для довільного кільця A*

$$\mathrm{r.gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{proj.dim}_A M \;:\; M_A \text{— скінченно породжений } A\text{-модуль } \}.$$

Зауваження 16.10. *Права та ліва глобальна розмірність у випадку довільного кільця можуть не співпадати. Зокрема, спадкове справа кільце може не бути спадковим зліва (приклад такого кільця навів Капланський у 1958 році).*

Теорема 16.11. ***М. Ауслендер.*** *Якщо A — нетерове справа та зліва кільце, то* $\mathrm{r.gl.dim}\, A = \mathrm{l.gl.dim}\, A$.

Нехай маємо точну послідовність $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ та проективні резольвенти A-модулів M' та M'' відповідно:

$$\cdots \longrightarrow P'_{(2)} \longrightarrow P'_{(1)} \longrightarrow P'_{(0)} \longrightarrow M' \longrightarrow 0\ ,$$

$$\cdots \longrightarrow P''_{(2)} \longrightarrow P''_{(1)} \longrightarrow P''_{(0)} \longrightarrow M'' \longrightarrow 0\ .$$

Тоді наступна точна послідовність

$$\cdots \longrightarrow P'_2 \oplus P''_2 \longrightarrow P'_1 \oplus P''_1 \longrightarrow P'_0 \oplus P''_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

є резольвентою модуля M. Звідси $\mathrm{proj.dim}_A M \le \max(\mathrm{proj.dim}_A M', \mathrm{proj.dim}_A M'')$. Зокрема, якщо $M = M' \oplus M''$, то $\mathrm{proj.dim}_A M = \max(\mathrm{proj.dim}_A M', \mathrm{proj.dim}_A M'')$.

В загальному випадку, якщо $M = \bigoplus\limits_i M_i$, то

$$\mathrm{proj.dim}_A M = \sup_i(\mathrm{proj.dim}_A M_i). \tag{27}$$

Нехай A — зведене напівдосконале кільце, $1 = e_1 + \cdots + e_n$ — розклад $1 \in A$ в суму локальних взаємно ортогональних ідемпотентів, $R = \mathrm{rad}\, A$ — радикал Джекобсона кільця A. Тоді всі прості праві (ліві) A-модулі з точністю до ізоморфізму вичерпуються модулями $U_1 = e_1A/e_1R, \ldots, U_n = e_nA/e_nR$ ($V_1 = Ae_1/Re_1, \ldots, V_n = Ae_n/Re_n$).

За теоремою Баса кожен скінченнопороджений A-модуль M над напівдосконалим кільцем має проективне накриття $P(M)$, причому $P(M) = P(M/\operatorname{rad} M)$. Оскільки для довільного модуля $M/\operatorname{rad} M \simeq \bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_i^{m_i}$ — напівпростий модуль, то

$$P(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} P(U_i)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{n} (e_i A)^{m_i}.$$

Звідси, враховуючи наслідок 16.9 та (27) отримуємо, що

$$\text{r.gl.dim}\, A = \max_{1 \le i \le n} \{\text{proj.dim}_A U_i\}. \tag{28}$$

Останню рівність можна подати у вигляді

$$\text{r.gl.dim}\, A = \{\text{proj.dim}_A (A/R)\}. \tag{29}$$

Якщо напівдосконале кільце нетерове справа та зліва, то

$$\text{gl.dim}\, A = \max_{1 \le i \le n} \{\text{proj.dim}_A U_i\}. \tag{30}$$

Останню рівність можна подати у вигляді

$$\text{gl.dim}\, A = \{\text{proj.dim}_A (A/R)\}. \tag{31}$$

Нехай M — правий A-модуль і припустимо, що модуль M не є проективним. Можна завжди знайти проективний модуль P_0, такий що P_0 відображається на M (наприклад, можна взяти за P_0 вільний модуль, фактор-модулем якого є M). Тоді отримуємо точну послідовність:

$0 \longrightarrow K_0 \xrightarrow{h_0} P^{(0)} \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0$ де K_0 — ядро відображення $g_0 \colon P_0 \to M$ та h_0 — занурення K_0 у P_0. Якщо K_0 не проективний, ми можемо знайти проективний модуль P_1, такий що P_1, який відображається на K_0 при деякому відображенні g_1. Маємо діаграму

$$\begin{tikzcd}
 & & P_1 \arrow[dr, "g_1"] & & P_0 \arrow[r, "g_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & K_1 \arrow[ur, "h_1"] & & K_0 \arrow[ur, "h_0"] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

де K_1 — ядро g_1, а h_1 — включення K_1 в P_1. Якщо покласти то послідовність

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_0} P^{(0)} \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0$$

буде точною.

Теорема 16.12. *Глобальна розмірність горенштейнового черепичного порядку дорівнює або* 1 *або* ∞.

Доведення Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ горенштейновий черепичний порядок. Можна вважати порядок Λ зведеним. Розглянемо випадок, коли глобальна розмірність кільця Λ скінченна: $\mathrm{gl.dim}\Lambda = n < \infty$. Тоді існує правий Λ-модуль M, проективна розмірність $\mathrm{proj.dim}_\Lambda(M)$ якого дорівнює n. Це означає, що модуль M має проективну резольвенту довжини n

$$0 \longrightarrow P^{(n)} \longrightarrow P^{(n-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{(1)} \longrightarrow P^{(0)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

В цій точній послідовності модулі $P^0, P^1, \ldots, P^{(n)}$ проективні.

Розглянемо проективну резольвенту модуля M разом з допоміжними точними короткими послідовностями

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & P^{(n)} \arrow[r, "f_n"] & P^{(n-1)} \arrow[rr, "f_{n-1}"] \arrow[dr, "g_{n-1}"] & & P^{(n-2)} \arrow[rr, "f_{n-2}"] \arrow[dr, "g_{n-2}"] & & \cdots \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"] & & P^{(1)} \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"] & & P^{(0)} \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & K_{n-2} \arrow[ur, "h_{n-1}"] \arrow[dr] & & K_{n-3} \arrow[ur, "h_{n-2}"] \arrow[dr] & \cdots & K_1 \arrow[ur, "h_2"] \arrow[dr] & & K_0 \arrow[ur, "h_1"] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$0 \to K_i \xrightarrow{h_i} P^{(i)} \xrightarrow{g_i} K_{i-1} \to 0$

де $K_i = \ker g_i$, $K_0 = \ker f_0$ — непроективні модулі $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Припустимо, що $n > 1$. Оскільки коротка послідовність

$$0 \longrightarrow P^{(n)} \longrightarrow P^{(n-1)} \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow 0$$

точна, то точною буде послідовність

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(P^{(n-1)}, \mathcal{O}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(P^{(n)}, \mathcal{O}\right) \longrightarrow 0$$

Модулі $P^{(k)}$ проективні, тому $P^{(k)} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} (e_{ii}\Lambda)^{k_i}$. Тоді

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(P^{(k)}, \mathcal{O}\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\bigoplus_{i=1}^{m} (e_{ii}\Lambda)^{k_i}, \mathcal{O}\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left((e_{ii}\Lambda)^{k_i}, \mathcal{O}\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left((e_{ii}\Lambda), \mathcal{O}\right)\right)^{k_i}.$$

Оскільки Λ — горенштейновий черепичний порядок, то $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left((e_{ii}\Lambda), \mathcal{O}\right) \simeq \Lambda e_{\sigma(i)\sigma(i)}$ — проективний лівий Λ-модуль, де σ — підстановка Кириченка горенштейнового порядку Λ. Отже, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(P^{(k)}, \mathcal{O}\right) \simeq \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left((e_{ii}\Lambda), \mathcal{O}\right)\right)^{k_i} = Q^{(k)}$ — проективний лівий Λ-модуль. Маємо точну послідовність

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O}) \longrightarrow Q^{(n-1)} \longrightarrow Q^{(n)} \longrightarrow 0$$

Модуль $Q^{(n)}$ проективний, тому ця послідовність розщеплюється: $Q^{(n-1)} \simeq Q^{(n)} \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O})$. Звідси лівий модуль $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O})$ є проективним. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O}) \simeq \bigoplus\limits_{j=1}^{m} (\Lambda e_{jj})^{t_j}$ Тоді

$$K_{n-2} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O}), \mathcal{O}\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\bigoplus_{j=1}^{m} (\Lambda e_{jj})^{t_j}, \mathcal{O}\right) \simeq \bigoplus_{j=1}^{m} \left(e_{\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(j)}\Lambda\right)^{t_j}.$$

Тому K_{n-2} є проективним модулем, що суперечить тому, що проективна розмірність модуля M дорівнює $n > 1$. Отже, $n \le 1$. Добре відомо, що глобальна розмірність кільця A дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли кільце A є напівпростим. Горенштейновий черепичний порядок Λ не є напівпростим кільцем, тому $\mathrm{gl.dim}\Lambda = 1$. Це спадковий горенштейновий черепичний порядок. Він Моріта-еквівалентний порядку $H_m(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(H_m) = (\alpha_{ij})\}$ з підстановкою Кириченка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$, де $\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \le j \\ 1, & \text{якщо } i > j \end{cases}$ Не спадкові горенштейнові черепичні порядки мають глобальну розмірність ∞.

Якщо $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{i\sigma(i)} < m$, то $\mathrm{gl.dim}\Lambda = 1$. У всіх інших горенштейнових порядків $\mathrm{gl.dim}\Lambda = \infty$.

Означення 16.13. *Нехай M — A-модуль. Ін'єктивною резольвентою модуля M називається точна послідовність A-модулів*

$$0 \to M \xrightarrow{i} Q_{(0)} \xrightarrow{d_0} Q_{(1)} \xrightarrow{d_1} Q_2 \to \cdots,$$

в якій всі модулі Q_i ін'єктивні. Якщо існує n таке, що $Q_n \ne 0$ а $Q_k = 0$ для всіх $k > n$, то говорять, що довжина ін'єктивної резольвенти дорівнює n (і ∞, якщо такого числа не існує).

Означення 16.14. *Нехай A —кільце і M — правий A-модуль. Говорять, що ін'єктивна розмірність модуля M дорівнює n та пишуть $\mathrm{inj.dim}_A M = n$, якщо існує ін'єктивна резольвента довжини n:*

$$0 \to M \to Q_0 \to \cdots \to Q_{(n-1)} \to Q_{(n)} \to 0,$$

та не існує коротшої ін'єктивної резольвенти.

Якщо не існує ін'єктивної резольвенти скінченної довжини, то покладають $\mathrm{inj.dim}_A M = \infty$.

17 Напівдосконалі кільця ін'єктивної розмірності один

Нехай $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел, $\mathbb{Q}$ — поле раціональних чисел, $p \in \mathbb{Z}$ просте число. Позначимо через $\mathbb{Z}_p$ наступне кільце:

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} | (n,p) = 1 \right\}.$$

Очевидно, кожен ненульовий власний ідеал J в $\mathbb{Z}_p$ є головним та має вигляд $p^k\mathbb{Z}_p$ для деякого натурального k. $\mathbb{Z}_p$ є областю головних ідеалів і всі його ідеали утворюють спадний ланцюг:

$$\mathbb{Z}_p \supset p\mathbb{Z}_p \supset p^2\mathbb{Z}_p \supset \cdots \supset p^k\mathbb{Z}_p \supset \cdots.$$

Очевидно $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} p^k\mathbb{Z}_p = 0$.

Розглянемо наступну точну послідовність

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_p \to 0.$$

Добре відомо, що $\mathbb{Z}_p$-модулі $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_p$ (нагадаємо, що $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_p$ є абелевою групою p^∞) є ін'єктивними. Тому $\text{inj.dim}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p = 1$.

Нехай $\vec{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Відношення порядку $\vec{a} \preccurlyeq \vec{b}$ в $S_r(A)$ визначається наступним чином:

$$\vec{a} \preccurlyeq \vec{b} \Longleftrightarrow\Leftrightarrow \alpha_i \geq \beta_i \text{для } i = 1, \ldots, n.$$

Оскільки кільце A є напівдистрибутивним, то $S_r(A)$ та $S_l(A)$ є дистрибутивними гратками відносно додавання та перетину.

Твердження 17.1. *Існує з точністю до ізоморфізму лише скінченне число незвідних A-граток.*

Доведення. Нехай $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ — черепичний порядок з матрицею показникі $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$. Ми можемо вважати, що $\alpha_{ij} \geq 0$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$. Нехай $M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_r(A)$. Розглядаючи ізоморфний модуль можемо також вважати, що всі $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ є додатними цілими числами. Позначимо $a = \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тоді є незвідною $M_1 = (\alpha_1 - a, \ldots, \alpha_n - a)$ є незвідною A-граткою та $M_1 \simeq M$. Припустимо, що $\alpha_i = a$. Тоді $M_1 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, де $\beta_1, \ldots, \beta_n$ —невід'мні та $\beta_i = 0$. Тому кожна незвідна A-гратка M ізоморфна гратці M_1 з хоча б однією нульовою координатою. З (4) ми отримуємо, що $0 \leq \beta_j \leq \alpha_{ij}$. Таким чином, кількість незвідних A-граток вигляду M_1 є скінченним. Твердження доведено. □

Наступне твердження встановлює цікавий факт про ін'єктивну розмірність гратки ${}_AA^\star$.

Твердження 17.2. *Нехай A — черепичний порядок. Тоді* $\text{inj.dim}_A({}_AA^\star) = 1$.

Доведення. Нехай $\mathcal{I}$ — правий ідеал кільця A. Розглянемо точну послідовність $0 \to \mathcal{I} \to A \to A/\mathcal{I} \to 0$. Тоді ми отримуємо $\text{Ext}^2_A(A/\mathcal{I}, {}_AA^\star) = \text{Ext}^1_A(\mathcal{I}, {}_AA^\star)$. Але $\text{Ext}^1_A(\mathcal{I}, {}_AA^\star) = 0$ за наслідком 3.8. Отже, $\text{inj.dim}_A({}_AA^\star) \leq 1$. Оскільки $\text{inj.dim}_A({}_AA^\star) \neq 0$, ми отримуємо, що $\text{inj.dim}_A({}_AA^\star) = 1$, що й вимагалось. □

Розглянемо фактор-модуль $Q_1 = M_n(D)/{}_AA^\star$. Маємо точну послідовність

$$0 \to {}_AA^\star \to Q_0 = M_n(D) \to Q_1 \to 0.$$

За твердженням 17.2 ми отримуємо, що Q_1 є ін'єктивним A-модулем. Припустимо, що черепичний порядок A є зведеним. Тоді ін'єктивні оболонки простих A-модулів $U_1, \ldots, U_s$ за лемою 3.14 можуть бути записані у наступному вигляді: $E(U_i) = e_{ii}M_n(D)/e_{ii}\Delta$, де e_{ii} — матричні ідемпотенти, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Розглянемо особливий тип черепичних порядків, які можна визначити еквівалентними умовами наступної теореми.

Теорема 17.3. *Наступні умови для черепичного порядку A еквівалентні:*

- *(i)* $\text{inj.dim}_A A_A = 1$*;*
- *(ii)* $\text{inj.dim}_{A\,A} A = 1$*;*
- *(iii) $A^\star_A$ — проективний лівий A-модуль;*

- *(iv)* ${}_AA^\star$ *— проективний правий* A*-модуль.*

Доведення. (i) $\Rightarrow$ (iv) Позначимо $Q = Q_0 = M_n(D)$. За твердженням 3.1 Q є ін'єктивним правим та лівим A-модулем. Якщо $\text{inj.dim}_A A_A = 1$, то існує точна послідовність

$$0 \to A_A \to Q_0 \to Q_0/A_A \to 0.$$

Тоді модуль Q_0/A_A ін'єктивний. Очевидно, що кожен нерозкладний прямий доданок модуля Q_0/A_A має вигляд $e_{ii}Q_0/e_{ii}A$. Оскільки $e_{ii}Q_0/e_{ii}A$ є нерозкладним ін'єктивним, то $\text{soc}(e_{ii}Q_0/e_{ii}A)$ є простим. Тому кожний $e_{ii}A$ є відносно ін'єктивною незвідною A-граткою і A_A є відносно ін'єктивним правим A-модулем. За означенням $A_A \simeq {}_AP^\star$. ${}_AP = {}_AP_1 \oplus \cdots \oplus {}_AP_s \oplus P$ ${}_AP_1, \ldots, {}_AP_s$ A P ${}_AP_i$ ${}_AA^\star$ A

За наслідком 3.13 ми маємо (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Нарешті ми отримуємо (iv) $\Rightarrow$ (i) за твердженням 17.2 ітог факту, що ${}_AA^\star$ та A_A містять однакові нерозкладні доданки, якщо ${}_AA^\star$ є проективним. Рівносильність (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) для лівих модулів доводиться як (i) $\Leftrightarrow$ (iv) для правих модулів. □

Означення 17.4. *Черепичний порядок A, який задовольняє еквівалентним умовам теореми 17.3, називається горенштейновим черепичним порядком.*

Як слідує з теореми 17.3 означення горенштейнового черепичного порядку є право-ліво симетричним.

Теорема 17.5. *Нехай $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ — зведений черепичний порядок з матрицею показників $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$. Порядок A горенштейновий тоді і тільки тоді, коли матриця $\mathcal{E}(A)$ є горенштейновою, тобто існує підстановка σ множини $\{1, \ldots, n\}$ така, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i, k = 1, \ldots, n$.*

Доведення. Оскільки порядок A зведений, то маємо $A^\star \simeq A_A$. Але

$$\mathcal{E}({}_AA) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

і

$$\mathcal{E}({}_AA^\star) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{21} & \cdots & -\alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому існує підстановка σ множини $\{1, \ldots, n\}$ така, що

$$(\alpha_{i1}, \ldots, 0, \ldots, \alpha_{in}) = (-\alpha_{1\sigma(i)} + c_i, \ldots, -\alpha_{n\sigma(i)} + c_i),$$

де $c_i \in \mathbb{Z}$ для $i = 1, \ldots, n$. Тому $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = c_i$ для $i, k = 1, \ldots, n$. При $i = k$ ми отримуємо $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ і $\mathcal{E}(A)$ є горенштейновою матрицею. Навпаки, якщо матриця $\mathcal{E}(A)$ є горенштейновою, то ${}_AA^\star \simeq A_A$ і за теоремою 17.3 черепичний порядок A є горенштейновим. Теорема доведена. □

Приклад 17.6. *Нехай* $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{ij} \subset M_n(Q)$, *де* $f_{ij} = c_{ij} e_{ij}$ *для* $i, j = 1, \ldots, n$ *та* $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$. *Покладемо* $c_{ij} = 1$ *при* $i \geq j$ *та* $c_{ij} = n$ *при* $i < j$. *Тоді* A *є* $\mathbb{Z}$*-порядком в* $M_n(Q)$ *наступного вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & n\mathbb{Z} & n\mathbb{Z} & \cdots & n\mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & n\mathbb{Z} & \cdots & n\mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \cdots & n\mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \cdots & \mathbb{Z} & n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \cdots & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

для $n \in \mathbb{N}$. *Використовуючи результати Фаддеєва про локалізацію , отримуємо що* $\text{inj.dim}_A A_A = 1$.

Приклад 2.

Література

[1] A.G. Zavadskij and V.V. Kirichenko, *Torsion-free Modules over Prime Rings*, Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov. Inst. (LOMI) - 1976. - v. 57. - p. 100-116 (in Russian). English translation in J. of Soviet Math., v. 11, N 4, April 1979, p. 598-612.

[2] M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules.* Vol. 1, Series: Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish., 2004. xii+380pp.

[3] M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko, *Algebras, Rings and Modules.* Vol. 2, Series: Mathematics and Its Applications, **586**. Springer, Dordrecht, 2007. xii+400pp.

[4] V. V. Kirichenko and M. A. Khibina, *Semi-perfect semi-distributive rings*, In: Infinite Groups and Related Algebraic Topics, Institute of Mathematics NAS Ukraine, 1993, pp. 457–480 (in Russian).

[5] Kirichenko V.V., *On semiperfect rings of injective dimension one*, Sao Paulo J. Math. Sci., 1, 1, 2007, 111-132.