Кратні інтеграли

Лекції для студентів механіко-математичного факультету, IV семестр

І. О. Шевчук

Публікується за постановою Вченої ради механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка від 11.04.2011

XIV КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

І. О. ШЕВЧУК

Зміст

1. Міра Жордана

1.1. **Передмова.** Нехай

- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_m)$, $\mathbf{x}_1 = (x_{1,1}, \dots x_{1,m})$, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots x_m^*)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots a_m)$
  $\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_m := (0, \dots, 0, 1)$.
- Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$, $\overline{E}$ – замикання множини E, E^0 – множина внутрішніх точок множини E. *Межею* множини E називається множина

$$\partial E := \overline{E} \setminus E^0.$$

  Зокрема,

$$E^0 = E \setminus \partial E = \overline{E} \setminus \partial E, \qquad \overline{E} = E \cup \partial E = E^0 \cup \partial E.$$

- Буква G буде використана лише для позначення відкритих множин.
- Буква F буде використана лише для позначення замкнених множин.
- Символ " : " завжди читається як *"такий (така, таке, такі), що"*.
- Всі посилання – на підручник А. Я. Дороговцева.

1.2. **Елементарні фігури.**

Означення 1.1 (n-куба та його об'єму)**.** Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. Множину $q_n \subset \mathbb{R}^m$ назвемо *n-кубом*, якщо існують m цілих чисел $j_1, \dots, j_m$ таких, що

$$q_n = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \frac{j_1}{2^n} \le x_1 \le \frac{j_1+1}{2^n}, \dots, \frac{j_m}{2^n} \le x_m \le \frac{j_m+1}{2^n} \right\}.$$

Об'ємом n-куба назвемо число

$$|q_n| := \frac{1}{2^{nm}}.$$

Означення 1.2 (елементарної фігури та її об'єму)**.** Непорожню множину $A \subset \mathbb{R}^m$ назвемо *елементарною фігурою*, якщо вона складена із (є об'єднанням) скінченного числа n-кубів. *Об'ємом елементарної фігури* A назвемо число

$$|A| := l|q_n| = \frac{l}{2^{nm}},$$

де l – кількість n-кубів, з яких вона складена. Порожню множину $\emptyset$ також будемо вважати елементарною фігурою і покладемо $|\emptyset| := 0$.

Зауваження 1.1. Кожен n-куб q_n складений із 2^m $(n+1)$-кубів q_{n+1}. Отже, якщо елементарна фігура A складена із l n-кубів, то вона також складена із $l_1 = 2^m l$ $(n+1)$-кубів. Тоді

$$|A| = l_1|q_{n+1}| = \frac{l2^m}{2^{m(n+1)}} = \frac{l}{2^{nm}} = l|q_n|.$$

Іншими словами, означення об'єму елементарної фігури не залежить від номеру n n-кубів, із яких вона складена.

Нехай елементарні фігури A та B складені відповідно із n_1- та n_2-кубів. Тоді кожна з них складена із n-кубів, де $n = \max\{n_1, n_2\}$. Звідси випливає

Лема 1.1 (Про елементарні фігури)**.** *Нехай A і B є елементарними фігурами. Тоді*
а) їх перетин і об'єднання є також елементарними фігурами і

$$|A \cup B| \le |A| + |B|;$$

б) якщо їх внутрішності A^0 і B^0 не перетинаються, тобто якщо $A^0 \cap B^0 = \emptyset$, то

$$|A \cup B| = |A| + |B|;$$

в) якщо $B \subset A$, то

$$|B| \le |A|;$$

г) замикання їх різниці, тобто $\overline{A \setminus B}$, є елементарною фігурою, і якщо $B \subset A$, то

$$|\overline{A \setminus B}| = |A| - |B|.$$

1.3. Означення міри Жордана.

Означення 1.3 (внутрішньої фігури та зовнішньої фігури)**.** *Внутрішньою фігурою* обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}^m$ назививається множина $E_{(n)}$, складена з усіх n-кубів q_n таких, що $q_n \subset E$. *Зовнішньою фігурою* обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}^m$ називається множина $E^{(n)}$, складена з усіх n-кубів q_n таких, що $q_n \cap E \neq \emptyset$.

Зауваження 1.2. За означенням, $E_{(n)}$ та $E^{(n)}$ є елементарними фігурами, при цьому

$$E_{(n)} \subset E_{(n+1)} \subset E^{(n+1)} \subset E^{(n)}.$$

Звідси

$$|E_{(n)}| \leq |E_{(n+1)}| \leq |E^{(n+1)}| \leq |E^{(n)}|.$$

Отже, обидві послідовності $\left\{|E_{(n)}|\right\}_{n=0}^{\infty}$ та $\left\{|E^{(n)}|\right\}_{n=0}^{\infty}$ є монотонними та обмеженими послідовностями невід'ємних чисел. Тому є коректним наступне означення.

Означення 1.4 (внутрішньої та зовнішньої мір)**.** *Внутрішньою мірою* Жордана обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}^m$ називається число

$$\mu_* E := \lim_{n\to\infty} |E_{(n)}| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |E_{(n)}|.$$

Зовнішньою мірою Жордана обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}^m$ називається число

$$\mu^* E := \lim_{n\to\infty} |E^{(n)}| = \inf_{n\in\mathbb{N}} |E^{(n)}|.$$

Зауваження 1.3. Числа $\mu_* E$ і $\mu^* E$ означені для кожної обмеженої множини,і завжди

$$\mu_* E \leq \mu^* E.$$

Означення 1.5 (міри Жордана)**.** Множина $E \subset \mathbb{R}^m$ називається *вимірною за Жорданом* (або просто *вимірною*), якщо вона обмежена і її внутрішня та зовнішня міри Жордана рівні. *Мірою Жордана* вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^m$ називається число

$$\mu E := \mu_* E = \mu^* E.$$

Приклад 1.1. (Міра в $\mathbb{R}^2$ одиничного квадрата). Нехай $Q = [0,1]^2$ – одиничний квадрат. Тоді, $\forall n$, $E^{(n)} = [-2^{-n}, 1+2^{-n}]^2$ і $E_{(n)} = Q$, звідки $\mu^* E = \mu_* E = 1 = \mu E$.

Приклад 1.2. (Множина $E \subset \mathbb{R}^2$, не вимірна за Жорданом). Нехай $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел, а $Q = [0,1]^2$ – одиничний квадрат. Позначимо $E := Q \cap \mathbb{Q}^2$. Тоді, $\forall n$, $E^{(n)} = [-1-2^{-n}, 1+2^{-n}]^2$ і $E_{(n)} = \emptyset$, звідки $\mu^* E = 1 \neq 0 = \mu_* E$.

Зауваження 1.4. Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – обмежена множина. Якщо $H \subset E$, то

$$H_{(n)} \subset E_{(n)} \quad i \quad H^{(n)} \subset E^{(n)} \quad \Rightarrow \quad \mu_* H \leq \mu_* E \quad \text{та} \quad \mu^* H \leq \mu^* E.$$

1.4. **Критерії вимірності.** Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ - обмежена множина. Позначимо через

$$\Delta E_{(n)} := \overline{E^{(n)} \setminus E_{(n)}} = E^{(n)} \setminus (E_{(n)})^0$$

– замикання різниці зовнішньої і внутрішньої фігур множини E.

Теорема 1.1 (Δ – критерій вимірності). *Для того, щоб множина E була вимірною, необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta E_{(n)}| = 0.$$

Доведення. За означенням зовнішньої та внутрішньої мір,

$$m^*E - m_*E = \lim_{n\to\infty} |E^{(n)}| - \lim_{n\to\infty} |E_{(n)}| = \lim_{n\to\infty} \left(|E^{(n)}| - |E_{(n)}|\right) = \lim_{n\to\infty} |\overline{E^{(n)} \setminus E_{(n)}}|$$
$$= \lim_{n\to\infty} |\Delta E_{(n)}|,$$

де передостання рівність є наслідком властивості г) елементарних фігур. □

Теорема 1.2 (Апроксимаційний критерій вимірності). *Для того, щоб множина E була вимірною, необхідно і достатньо, щоб $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; E_1 \subset \mathbb{R}^m$ та $\exists \; E_2 \subset \mathbb{R}^m$:*

$$E_1 \subset E \subset E_2 \quad \text{та} \quad \mu^*E_2 - \mu_*E_1 < \epsilon.$$

Доведення. Необхідність тривіальна, бо можна взяти $E_1 := E_2 := E$. Доведемо достатність. Оскільки $E_1 \subset E \subset E_2$, то

$$\mu_*E_1 \le \mu_*E \le \mu^*E \le \mu^*E_2,$$

тому

$$\mu^*E - \mu_*E \le \mu^*E_2 - \mu_*E_1 < \epsilon.$$

Отже, внаслідок довільності ϵ, $\mu^*E = \mu_*E$. □

Теорема 1.3 (Межовий критерій вимірності). *Для того, щоб множина E була вимірною, необхідно і достатньо, щоб її межа була вимірною множиною міри нуль.*

Доведення. Позначимо через ∂E межу множини E. Неважко перевірити включення

$$\partial E \subset \Delta E_{(n)} \subset (\partial E)^{(n)},$$

(див. лему 1.2), звідки

$$\Delta E_{(n)} \subset (\partial E)^{(n)} \subset (\Delta E_{(n)})^{(n)}.$$

Оскільки $|(q_n)^{(n)}| = 3^m |q_n|$ для кожного n-куба q_n, то $|(\Delta E_{(n)})^{(n)}| \le 3^m |\Delta E_{(n)}|$, отже

$$|\Delta E_{(n)}| \le |(\partial E)^{(n)}| \le 3^m |\Delta E_{(n)}|.$$

Таким чином, теорема 1.3 зводиться до теореми 1.1. □

1.5. **Про межу множини.** Нагадаємо означення межі множини. Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$, $\overline{E}$ – замикання множини E, E^0 – множина внутрішніх точок множини E.

Означення 1.6 (межі множини)**.** *Межею* множини E називається множина

$$\partial E := \overline{E} \setminus E^0.$$

Кожна точка $\mathbf{x} \in \partial E$ називається *межовою точкою* множини E.

Зауваження 1.5. Нагадаємо також, що а) мають місце включення $E^0 \subset E \subset \overline{E}$; б) $\overline{F} = F \;\Leftrightarrow\; F$ – замкнена множина; в) $G^0 = G \;\Leftrightarrow\; G$ – відкрита множина; та г)

$$H \subset E \;\Rightarrow\; H^0 \subset E^0 \quad \text{і} \quad \overline{H} \subset \overline{E}.$$

Лема 1.2 (Про межу множини)**.** *Якщо E – обмежена множина, то*

$$\partial E \subset \Delta E_{(n)} \subset (\partial E)^{(n)}.$$

Доведення. Оскільки $E_{(n)} \subset E \subset E^{(n)}$, то $(E_{(n)})^0 \subset E^0$ та $\overline{E} \subset \overline{E^{(n)}} = E^{(n)}$. Тому

$$\partial E = \overline{E} \setminus E^0 \subset \overline{E} \setminus (E_{(n)})^0 \subset E^{(n)} \setminus (E_{(n)})^0 = \overline{E^{(n)} \setminus E_{(n)}} = \Delta E_{(n)}.$$

Перше включення доведене. Доведемо друге. Нехай $q_n \subset \Delta E_{(n)}$. Оскільки $q_n \subset E^{(n)}$, то $\exists\, \mathbf{x}' \in q_n : \mathbf{x}' \in E$. Оскільки $q_n \not\subset E_{(n)}$, то $\exists\, \mathbf{x}'' \in q_n : \mathbf{x}'' \notin E$. Тому відрізок

$$[\mathbf{x}', \mathbf{x}''] := \{\mathbf{x} = t\mathbf{x}' + (1-t)\mathbf{x}'' : \; t \in [0,1]\}$$

з кінцями $\mathbf{x}'$ та $\mathbf{x}''$ містить точку $\mathbf{x} \in \partial E$. Оскільки $[\mathbf{x}', \mathbf{x}''] \subset q_n$, то $q_n \subset (\partial E)^{(n)}$. □

Лема 1.3 (Про межі множин)**.** *Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ та $H \subset \mathbb{R}^m$. Мають місце включення*

$$\partial(E \cup H) \subset \partial E \cup \partial H \qquad \textit{та} \qquad \partial(E \setminus H) \subset \partial E \cup \partial H.$$

Доведення. Оскільки $E \cup H \subset \overline{E} \cup \overline{H}$, то $\overline{E \cup H} \subset \overline{\overline{E} \cup \overline{H}} = \overline{E} \cup \overline{H} \subset \overline{E \cup H}$, тобто $\overline{E \cup H} = \overline{E} \cup \overline{H}$. Ця рівність і включення $E^0 \subset (E \cup H)^0$ та $H^0 \subset (E \cup H)^0$ зумовлюють

$$\begin{aligned} \partial(E \cup H) &= \overline{E \cup H} \setminus (E \cup H)^0 = (\overline{E} \cup \overline{H}) \setminus (E \cup H)^0 \\ &= (\overline{E} \setminus (E \cup H)^0) \cup (\overline{H} \setminus (E \cup H)^0) \subset (\overline{E} \setminus E^0) \cup (\overline{H} \setminus H^0) = \partial E \cup \partial H. \end{aligned}$$

Перше включення доведене. Доведемо друге. Враховуючи зауваження, отримуємо

$$\partial(E \setminus H) = \overline{E \setminus H} \setminus (E \setminus H)^0 \subset \overline{\overline{E} \setminus H^0} \setminus (E^0 \setminus \overline{H})^0 = (\overline{E} \setminus H^0) \setminus (E^0 \setminus \overline{H}) \subset \partial E \cup \partial H.$$

Перевіримо останнє включення. Нехай $\mathbf{x} \in (\overline{E} \setminus H^0) \setminus (E^0 \setminus \overline{H}) \neq \emptyset$. Тоді $\mathbf{x} \in \overline{E}$ та $\mathbf{x} \notin H^0$. Якщо $\mathbf{x} \in \overline{H}$, то $\mathbf{x} \in \partial H$. Якщо ж $\mathbf{x} \notin \overline{H}$, то $\mathbf{x} \notin E^0 \setminus \overline{H} \Rightarrow \mathbf{x} \notin E^0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \partial E$. □

1.6. **Властивості вимірних множин.** Нехай E та H – обмежені множини в $\mathbb{R}^m$. Із рівності $(E \cup H)^{(n)} = E^{(n)} \cup H^{(n)}$ випливає, що $|(E \cup H)^{(n)}| \leq |E^{(n)}| + |H^{(n)}|$, звідки

$$(*) \qquad \mu^*(E \cup H) \leq \mu^* E + \mu^* H.$$

Теорема 1.4 (Про властивості вимірних множин)**.** *Якщо множини E і H вимірні, то вимірними є також їх об'єднання $E \cup H$, різниця $E \setminus H$ та перетин $E \cap H$.*

Доведення. Оскільки E та H вимірні, то їх межі також вимірні і $\mu^*(\partial E) = \mu(\partial E) = 0$ та $\mu^*(\partial H) = \mu(\partial H) = 0$. Звідси та із включення $\partial(E \cup H) \subset \partial E \cup \partial H$ випливає:

$$0 \leq \mu_*(\partial(E \cup H)) \leq \mu^*(\partial(E \cup H)) \leq \mu^*(\partial E \cup \partial H) \leq \mu^*(\partial E) + \mu^*(\partial H) = 0,$$

тобто $\mu_*(\partial(E \cup H)) = \mu^*(\partial(E \cup H)) = 0 = \mu(\partial(E \cup H))$, отже межа $\partial(E \cup H)$ є вимірною множиною міри нуль, і значить об'єднання $E \cup H$ є вимірною множиною. Так само, із включення $\partial(E \setminus H) \subset \partial E \cup \partial H$ випливає вимірність різниці $E \setminus H$. Нарешті, вимірність перетину $E \cap H$ випливає із рівності $E \cap H = E \setminus (E \setminus H)$. □

Наслідок 1.1. *Якщо множина $E \subset \mathbb{R}^m$ є вимірною, то вимірними множинами є також її внутрішність $E^0 = E \setminus \partial E$ та замикання $\overline{E} = E \cup \partial E$.*

Теорема 1.5 (Про властивості міри Жордана)**.** *Нехай E та H – вимірні множини. Тоді а) (монотонність) якщо $E \subset H$, то*

$$\mu E \leq \mu H;$$

б) (напівадитивність)

$$\mu(E \cup H) \leq \mu E + \mu H;$$

в) (адитивність) якщо їх внутрішності E^0 і H^0 не перетинаються, тобто якщо $E^0 \cap H^0 = \emptyset$, то

$$\mu(E \cup H) = \mu E + \mu H.$$

Доведення. а) Якщо $E \subset H$, то $\mu^* E \leq \mu^* H$, звідки $\mu E = \mu^* E \leq \mu^* H = \mu H$.
б) За попередньою теоремою, множина $E \cup H$ є вимірною, тому б) випливає із (*).
в) Оскільки $E^0 \cap H^0 = \emptyset$, то $(E^0)_{(n)} \cap (H^0)_{(n)} = \emptyset$ та $(E^0 \cup H^0)_{(n)} = (E^0)_{(n)} \cup (H^0)_{(n)}$. Тому, за властивістю адитивності об'єму елементарних фігур, $|(E^0 \cup H^0)_{(n)}| = |(E^0)_{(n)}| + |(H^0)_{(n)}|$, звідки $\mu_*(E^0 \cup H^0) = \mu_* E^0 + \mu_* H^0$, тобто $\mu(E^0 \cup H^0) = \mu E^0 + \mu H^0$. Враховуючи наслідок 1.1, пункти а) і б) теореми 1.5 та останню рівність, отримуємо

$$\mu E + \mu H \leq \mu \overline{E} + \mu \overline{H} = \mu(E^0 \cup \partial E) + \mu(H^0 \cup \partial H) \leq \mu E^0 + \mu H^0 = \mu(E^0 \cup H^0)$$
$$\leq \mu(E \cup H) \leq \mu E + \mu H.$$
□

Наслідок 1.2. *Якщо множина E є вимірною, то $\mu E = \mu E^0 = \mu \overline{E}$.*

Лема 1.4 (Про міру куба)**.** *Нехай $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Куб $Q = [a_1, a_1 + h] \times \cdots \times [a_m, a_m + h]$ з ребрами довжини h, паралельними координатним осям, є вимірною множиною та*

$$\mu Q = h^m.$$

Доведення. Позаяк $|Q^{(n)}| \leq (h + \frac{2}{2^n})^m$ і $|Q_{(n)}| \geq (h - \frac{2}{2^n})^m$, то $\mu^* Q = \mu_* Q = h^m = \mu Q$. □

Наслідок 1.3. *Елементарна фігура $A \subset \mathbb{R}^m$ є вимірною множиною і $\mu A = |A|$.*

Означення 1.7 (Відображення зсуву)**.** Відображенням зсуву на вектор $\mathbf{a}$ називається відображення $\varphi(\mathbf{x}) := \mathbf{a} + \mathbf{x}$.

Наслідок 1.4. *При відображенні зсуву образ $\varphi(E)$ вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^m$ є вимірною множиною і $\mu(\varphi(E)) = \mu E$.*

1.7. **Вправи.** Довести наступні твердження.

Вправа 1. *Точка $\mathbf{x}$ є межовою точкою множини E, якщо в кожному околі точки $\mathbf{x}$ існують принаймі дві точки $\mathbf{x}'$ та $\mathbf{x}''$, такі що $\mathbf{x}' \in E$, але $\mathbf{x}'' \notin E$.*

Вправа 2. *Точка $\mathbf{x}$ є межовою точкою множини E, якщо існують дві збіжні до $\mathbf{x}$ послідовності $\{\mathbf{x}'_j\}_{j=1}^{\infty}$ та $\{\mathbf{x}''_j\}_{j=1}^{\infty}$ точок таких, що $\mathbf{x}'_j \in E$, але $\mathbf{x}''_j \notin E$, $\quad \forall j \in \mathbb{N}$.*

Вправа 3. *Нерівність $\mu_*(E_1 \cup E_2) \leq \mu_* E_1 + \mu_* E_2$, взагалі кажучи, не правильна.*

Вправа 4. *Кожний квадрат в $\mathbb{R}^2$ (не обов'язково з ребрами, паралельними координатним осям) є вимірною множиною і його міра дорівнює його площі.*

Вправа 5. *Якщо множина $E \subset \mathbb{R}^2$ є вимірною, то вимірною є такох кожна конгруентна їй множина, і їх міри рівні.*

Вправа 6. *Кожний куб в $\mathbb{R}^3$ є вимірною множиною і його міра дорівнюї h^3, де h – довжина ребра куба.*

Зауваження 1.6. Аналогічне твердження для просторів $\mathbb{R}^m$ буде доведене пізніше.

Вправа 7. *Якщо множини E_1 та E_2 не перетинаються, або перетинаються лише їх межі, то $E_1^0 \cap E_2^0 = \emptyset$.*

Вправа 8. *Твердження, обернене попередньому, взагалі кажучи, неправильне.*

2. Кратні інтеграли по вимірних множинах.

Скрізь надалі, крім розділу 7, всі функціїї $f : E \to \mathbb{R}$ будуть обмеженими. Позначимо

$$M(f, E) := \sup_{\mathbf{x}\in E} |f(\mathbf{x})|.$$

2.1. **Розбиття множини. Верхня та нижня суми Дарбу.** Нагадаємо, що діаметром обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}^m$ називається число

$$\text{diam } E := \sup_{\mathbf{x}'\in E, \mathbf{x}''\in E} \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|.$$

Наприклад, diam $q_n = \frac{\sqrt{m}}{2^n}$.

Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – вимірна множина, $f : E \to \mathbb{R}$ – обмежена функція.

Означення 2.1 (розбиття)**.** Скінченний набір $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множин E_j називається *розбиттям* множини E, якщо а) всі множини E_j є вимірними; б) $\cup_{j=1}^l E_j = E$; в)якщо $i \neq j$, то внутрішності $(E_i)^0$ та $(E_j)^0$ множин E_i та E_j не перетинаються, тобто $(E_i)^0 \cap (E_j)^0 = \emptyset$. Число

$$|\lambda| = \max_{j=1,\dots,l} \text{diam } E_j$$

називається *діаметром розбиття* $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множини E.

Зауваження 2.1. Існує розбиття як завгодно малого діаметра. Скажімо, нехай $\{q_{n,j}\}_{j=1}^l$ – набір n-кубів, що складають $E^{(n)}$. Візьмемо $\lambda = \{E \cap q_{n,j}\}_{j=1}^l$. Тоді $|\lambda| \le \frac{\sqrt{m}}{2^n}$.

Означення 2.2 (верхньої та нижньої сум Дарбу)**.** *Верхньою (нижньою) сумою Дарбу* функції f за розбиттям $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множини E називається число

$$U(f, \lambda) := \sum_{j=1}^l \left(\sup_{\mathbf{x}\in E_j} f(\mathbf{x})\right) \mu E_j \qquad \left(L(f, \lambda) := \sum_{j=1}^l \left(\inf_{\mathbf{x}\in E_j} f(\mathbf{x})\right) \mu E_j\right).$$

Зауваження 2.2. Оскільки $|\sup_{\mathbf{x}\in E_j} f(\mathbf{x})| \le M(f, E)$, то

$$|U(f, \lambda)| = |\sum_{j=1}^l \left(\sup_{\mathbf{x}\in E_j} f(\mathbf{x})\right) \mu E_j| \le M(f, E) \sum_{j=1}^l \mu E_j = M(f, E)\mu E,$$

аналогічно $|L(f, \lambda)| \le M(f, E)\mu E$. Тому завжди існують верхній та нижній інтеграли.

Означення 2.3 (верхнього та нижнього інтегралів)**.** *Верхнім (нижнім) інтегралом* від функції f по множині E називається число

$$\overline{\int}_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \inf_\lambda U(f, \lambda) \qquad \left(\underline{\int}_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \sup_\lambda L(f, \lambda)\right),$$

де інфімум (супремум) береться по всіх розбиттях λ множини E.

2.2. **Означення інтеграла Рімана. Підрозбиття.** Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – вимірна множина і $f : E \to \mathbb{R}$ – обмежена функція. Дамо означення підрозбиття і покажемо, що

$$(*) \qquad \underline{\int}_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \le \overline{\int}_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Означення 2.4 (підрозбиття)**.** Розбиття $\lambda' = \{E_i'\}_{i=1}^s$ множини E називається *підрозбиттям* розбиття $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множини E, якщо для кожного $i = 1, \dots, s$ існує $j = 1, \dots, l$ таке, що $E_i' \subset E_j$.

Лема 2.1 (Про підрозбиття)**.** *Якщо λ' – підрозбиття розбиття λ множини E, то*

$$U(f, \lambda') \le U(f, \lambda) \qquad \text{та} \qquad L(f, \lambda') \ge L(f, \lambda).$$

Доведення. Якщо $E_i' \subset E_j$, то $\sup_{\mathbf{x}\in E_i'} f(\mathbf{x}) \le \sup_{\mathbf{x}\in E_j} f(\mathbf{x})$, тому

$$U(f, \lambda') = \sum_{j=i}^{s} \left(\sup_{\mathbf{x}\in E_i'} f(\mathbf{x})\right) \mu E_i' = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i:E_i'\subset E_j} \left(\sup_{\mathbf{x}\in E_i'} f(\mathbf{x})\right) \mu E_i'$$
$$\le \sum_{j=1}^{l} \sum_{i:E_i'\subset E_j} \left(\sup_{\mathbf{x}\in E_j} f(\mathbf{x})\right) \mu E_i' = \sum_{j=1}^{l} \left(\sup_{\mathbf{x}\in E_j} f(\mathbf{x})\right) \sum_{i:E_i'\subset E_j} \mu E_i' = \sum_{j=1}^{l} \left(\sup_{\mathbf{x}\in E_j} f(\mathbf{x})\right) \mu E_j$$
$$= U(f, \lambda).$$

Перша нерівність доведена. Аналогічно доводиться друга нерівність. □

Лема 2.2 (Про спільне підрозбиття)**.** *Нехай λ_1 та λ_2 – два розбиття множини E. Тоді існує розбиття λ', яке є одночасно підрозбиттям розбиття λ_1 і розбиття λ_2.*

Доведення. Нехай $\lambda_1 = \{E_j\}_{j=1}^l$ а $\lambda_2 = \{H_i\}_{i=1}^s$. Шуканим спільним підрозбиттям λ' є, скажімо, набір усіх непорожніх множин вигляду $E_j \cap H_i$, $j = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, s$. □

Зауваження 2.3. Дві останні леми спричиняють нерівності

$$L(f, \lambda_1) \le L(f, \lambda') \le U(f, \lambda') \le U(f, \lambda_2),$$

які тягнуть за собою (*).

Означення 2.5 (інтеграла Рімана)**.** Кажуть, що обмежена функція $f : E \to \mathbb{R}$ *інтегровна* за Ріманом на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^m$, і пишуть $f \in R(E)$, якщо її верхній і нижній інтеграли по множині E рівні. *Інтегралом Рімана* від функції $f \in R(E)$ по множині E називається число

$$\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \overline{\int}_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \underline{\int}_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Зауваження 2.4. Надалі замість *"інтеграл Рімана"* будемо писати *"інтеграл"*.

2.3. **Критерії інтегровності.** Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – вимірна множина, а $f : E \to \mathbb{R}$ – обмежена функція. Позначимо

$$\overline{I} := \overline{\int}_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \underline{I} := \underline{\int}_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \qquad \text{та} \qquad I := \int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \text{якщо } I \text{ існує.}$$

Теорема 2.1 (Критерій інтегровності 1)**.** *Функція f інтегровна на множині E тоді і тільки тоді, коли для довільного $\epsilon > 0$ існує розбиття λ множини E таке, що*

$$(*) \qquad U(f, \lambda) - L(f.\lambda) < \epsilon.$$

Доведення. $\Leftarrow$ (достатність). За означенням верхнього і нижнього інтегралів,

$$\overline{I} - \underline{I} \leq U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \epsilon.$$

Оскільки $\overline{I} - \underline{I} \geq 0$, а ϵ – довільне, то $\overline{I} = \underline{I}$, тобто $f \in R(E)$. Достатність доведена.

$\Rightarrow$ (необхідність). За означенням верхнього і нижнього інтегралів та властивостями інфімума і супремума, існують розбиття λ_1 і λ_2 множини E такі, що

$$U(f, \lambda_1) - I = U(f, \lambda_1) - \overline{I} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{та} \quad I - L(f, \lambda_2) = \underline{I} - L(f, \lambda_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Нехай λ – спільне підрозбиття розбиттів λ_1 та λ_2. Тоді
$U(f, \lambda) - L(f, \lambda) \leq U(f, \lambda_1) - L(f, \lambda_2) = (U(f, \lambda_1) - I) + (I - L(f, \lambda_2)) < \epsilon.$ □

Надалі корисним буде наступне

Означення 2.6 (коливання)**.** *Коливанням функції f* на множиніE називається число

$$\omega(f, E) := \sup_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in E} f(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x}' \in E, \mathbf{x}'' \in E} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')|.$$

Негайно із означення випливають такі властивості коливання: а) якщо $H \subset E$, то

$$\omega(f, H) \leq \omega(f, E);$$

б)
$$0 \leq \omega(f, E) \leq 2M(f, E);$$

в) якщо $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ – розбиття множини E, то

$$U(f, \lambda) - L(f, \lambda) = \sum_{j=1}^{l} \omega(f, E_j) \mu E_j.$$

Теорема 2.2 (Критерій інтегровності 2)**.** *Функція f інтегровна на множині E тоді і тільки тоді, коли для довільного $\epsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для кожного розбиття λ множини E такого, що $|\lambda| < \delta$, має місце нерівність (*).*

Доведення. $\Leftarrow$. Достатність перевіряється так само, як і в попередній теоремі.

$\Rightarrow$ (необхідність). За умовою, функція f інтегровна на E. Тому за критерієм інтегровності 1 існує розбиття $\tilde{\lambda} = \{H_i\}_{i=1}^s$ множини E таке, що $U(f,\tilde{\lambda}) - L(f,\tilde{\lambda}) \le \frac{\epsilon}{2}$. Позначимо через $\Gamma := \cup_{i=1}^s \partial H_i$. Оскільки всі H_i є вимірними множинами, то $\mu\Gamma = 0$, звідки

$$|(\Gamma^{(n)})^{(n)}| \le 3^m |\Gamma^{(n)}| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тому існує n таке, що

$$|(\Gamma^{(n)})^{(n)}| < \frac{\epsilon}{4M(f,E)}.$$

Покажемо, що шуканим в теоремі є, скажімо,

$$\delta = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Для цього розглянемо яке-небудь розбиття $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множини E таке, що $|\lambda| < \delta$. Будемо писати $j \in \kappa,\ j = 1,\dots l$, якщо існує $i = 1,\dots,s$ таке, що $E_j \subset H_i$. Різницю

$$\sigma := U(f,\lambda) - L(f,\lambda) = \sum_{i=1}^{l} \omega(f,E_j)\mu E_j$$

представимо у вигляді $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, де

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_{j\in\kappa} \omega(f,E_j)\mu E_j = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j:E_j\in H_i} \omega(f,E_j)\mu E_j \le \sum_{i=1}^{s} \sum_{j:E_j\in H_i} \omega(f,H_i)\mu E_j \\
&= \sum_{i=1}^{s} \omega(f,H_i) \sum_{j:E_j\in H_i} \mu E_j \le \sum_{i=1}^{s} \omega(f,H_i)\mu H_i \\
&= U(f,\tilde{\lambda}) - L(f,\tilde{\lambda}) < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Тепер, оскільки $\omega(f,E_j) \le 2M(f,E)$, то

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= \sum_{j\notin\kappa} \omega(f,E_j)\mu E_j \le 2M(f,E) \sum_{j\notin\kappa} \mu E_j \ = 2M(f,E)\mu\left(\cup_{j\notin\kappa} E_j\right) \\
&\le 2M(f,E)\mu\left((\Gamma^{(n)})^{(n)}\right) < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Залишилось перевірити включення $\cup_{j=1:j\notin\kappa}^{l} E_j \subset (\Gamma^{(n)})^{(n)}$, тобто включення

$$E_j \in (\Gamma^{(n)})^{(n)}, \qquad j \notin \kappa.$$

Справді, оскільки $j \notin \kappa$, то існує номер $i = 1,\dots s$ та існують принаймі дві точки $\mathbf{x}' \in E_j$ та $\mathbf{x}'' \in E_j$ такі, що $\mathbf{x}' \in H_i$ але $\mathbf{x}'' \notin H_i$. Тому відрізок $[\mathbf{x}',\mathbf{x}'']$ з кінцями $\mathbf{x}'$ та $\mathbf{x}''$ містить точку $\mathbf{x}_* \in \partial E_j \Rightarrow \mathbf{x}_* \in \Gamma$. Оскільки $diam E_j < \delta$, то, $\forall \mathbf{x} \in E_j$, маємо

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_*\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < 2\delta = \frac{1}{2^n}.$$

Отже $\mathbf{x} \in (\Gamma^{(n)})^{(n)}$, звідки $E_j \in (\Gamma^{(n)})^{(n)}$. $\square$

2.4. **Інтеграл як границя інтегральних сум.** Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – вимірна множина, а $f : E \to \mathbb{R}$ – обмежена функція.

Означення 2.7 (інтегральної суми)**.** Інтегральною сумою функції f за розбиттям $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множини E та набором $X = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^l$ точок $\mathbf{x}_j \in E_j$ називається число

$$S(f, \lambda, X) := \sum_{j=1}^{l} f(\mathbf{x}_j)\mu E_j.$$

Зауваження 2.5. Для кожного розбиття $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множиниE справедливі рівності

(1) $$\sup_X S(f, \lambda, X) = U(f, \lambda) \quad \text{та} \quad \inf_X S(f, \lambda, X) = L(f, \lambda),$$

де супремум та інфімум беруться по всіх наборах $X = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^l$ точок $\mathbf{x}_j \in E_j$. Зокрема

(2) $$U(f, \lambda) \le S(f, \lambda, X) \le U(f, \lambda).$$

Означення 2.8 (границі інтегральних сум)**.** Кажуть, що число J є границею інтегральних сум $S(f, \lambda, X)$, і пишуть

$$\lim_{|\lambda| \to 0} S(f, \lambda, X) = J,$$

якщо $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ таке, що для кожного розбиття $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множини E з діаметром $|\lambda| < \delta$ і для всякого набору $X = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^l$ точок $\mathbf{x}_j \in E_j$ має місце нерівність

$$|S(f, \lambda, X) - J| < \epsilon.$$

Якщо таке число J існує, то кажуть, що інтегральні суми функції f збігаються наE.

Теорема 2.3 (Критерій інтегровності 3)**.** *Для того, щоб функція f була інтегровною на E, необхідно та достатньо, щоб її інтегральні суми збігались на E. При цьому*

(3) $$\lim_{|\lambda| \to 0} S(f, \lambda, X) = \int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Доведення. $\Rightarrow$ (необхідність). Нехай $f \in R(E)$. Позначимо $I := \int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. Візьмемо $\epsilon > 0$. За критерієм інтегровності 2, $\exists \delta > 0 : \forall \lambda : |\lambda| < \delta$ має місце нерівність $U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \epsilon$. Звідси, $\forall \lambda = \{E_j\}_{j=1}^l : |\lambda| < \delta$ та $\forall X = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^l : \mathbf{x}_j \in E_j$, маємо

$$S(f, \lambda, X) - I \le U(f, \lambda) - I \le U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \epsilon, \quad \text{аналогічно} \quad I - S(f, \lambda, X) < \epsilon,$$

тобто $|I - S(f, \lambda, X)| < \epsilon$. Необхідність доведена. Також доведено (3), якщо $f \in R(E)$.
$\Leftarrow$ (достатність). Візьмемо $\epsilon > 0$. За означенням 2.8, $\exists \lambda = \{E_j\}_{j=1}^l : \forall X = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^l :$ $\mathbf{x}_j \in E_j$ маємо $-\frac{\epsilon}{3} < S(f, \lambda, X) - J < \frac{\epsilon}{3}$. Тому $U(f, \lambda) - L(f, \lambda) = \sup_X (S(f, \lambda, X) - J) + \inf_X (J - S(f, \lambda, X)) \le \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$. Отже $f \in R(E)$ за критерієм інтегровності 1. $\square$

2.5. **Інтегровність неперервної функції.**

Лема 2.3 (Про інтегровність неперервної функції). *Якщо функція $f : E \to \mathbb{R}$ є неперервною на замкненій вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^m$, то вона інтегровна на E.*

Доведення. Візьмемо $\epsilon > 0$. Оскільки множина E є замкненою і обмеженою в $\mathbb{R}^m$, тобто компатною, то функція f рівномірно неперервна на E. Тому інує $\delta > 0$ таке, що для кожної пари точок $\mathbf{x}' \in E$ та $\mathbf{x}'' \in E$ таких, що $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta$, маємо

$$|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \frac{\epsilon}{2\mu E}.$$

Нехай $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^s$ – яке-небудь розбиття множини E з $|\lambda| < \delta$. Враховуючи, що

$$\omega(f, E_j) \leq \frac{\epsilon}{2\mu E},$$

отримуємо

$$U(f,\lambda) - L(f,\lambda) = \sum_{j=1}^s \omega(f, E_j)\mu E_j \leq \frac{\epsilon}{2\mu E} \sum_{j=1}^s \mu E_j = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Отже функція f є інтегровною на E за критерієм інтегровності 1. □

Теорема 2.4 (Про інтегровність неперервної функції). *Якщо функція $f : E \to \mathbb{R}$ є неперервною і обмеженою на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^m$, то вона інтегровна на E.*

Доведення. Візьмемо $\epsilon > 0$. Оскільки множина E є вимірною, то існує n таке, що

$$\mu E - \mu E_{(n)} \leq \frac{\epsilon}{4M(f,E)}.$$

Внутрішня фігура $E_{(n)}$ є замкненою множиною. Тому, за попередньою лемою та критерієм інтегровності 1, існує розбиття $\lambda^* = \{E_j\}_{j=1}^s$ множини $E_{(n)}$ таке, що

$$\sum_{j=1}^s \omega(f, E_j)\mu E_j < \frac{\epsilon}{2}.$$

Позначимо $E_{s+1} := E \setminus E_{(n)}$. Тоді $\lambda := \{E_j\}_{j=1}^{s+1}$ є розбиттям множини E. Таким чином,

$$\begin{aligned} U(f,\lambda) - L(f,\lambda) &= \sum_{j=1}^{s+1} \omega(f, E_j)\mu E_j = \sum_{j=1}^{s} \omega(f, E_j)\mu E_j + \omega(f, E_{s+1})\mu E_{s+1} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + 2M(f,E)\mu E_{s+1} = \frac{\epsilon}{2} + 2M(f,E)(\mu E - \mu E_{(n)}) < \epsilon. \end{aligned}$$

Отже функція f є інтегровною на E за критерієм інтегровності 1. □

Вправа 9. *Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – вимірна множина. Довести: а) $\mu E = 0 \Leftrightarrow E^0 = \emptyset$; б) якщо $\mu E = 0$, то кожна обмежена на E функція f є інтегровною на E і інтеграл від f по E рівний нулю; в) якщо $\mu E \neq 0$, то існує обмежена на E функція $f \notin R(E)$.*

2.6. **Властивості інтеграла Рімана.**

Теорема 2.5 (Про властивості інтеграла Рімана)**.** *Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – вимірна множина, функція f інтегровна на E. Тоді а) якщо $a \in \mathbb{R}$ і $b \in \mathbb{R}$ – сталі та $g \in R(E)$, то*

$$\exists \int_E (af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = a\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + b\int_E g(\mathbf{x})d\mathbf{x};$$

б) якщо $f(\mathbf{x}) \geq 0$ для всіх $\mathbf{x} \in E$, то

$$\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq 0;$$

в) функція $|f|$ також є інтегровною на E та

$$\left|\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| \leq \int_E |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x};$$

г) якщо $g \in R(E)$, то і $fg \in R(E)$.

Доведення. а) Позначимо $I := \int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, $J := \int_E g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ та $c := |a| + |b| + 1$. Візьмемо $\epsilon > 0$. Оскільки $f \in R(E)$ та $g \in R(E)$, то, за теоремою 2.3 і означенням 2.8, існує $\delta > 0$ таке, що для кожного розбиття $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множини E з діаметром $|\lambda| < \delta$ і для всякого набору $X = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^l$ точок $\mathbf{x}_j \in E_j$ мають місце нерівності

$$|S(f, \lambda, X) - I| < \frac{\epsilon}{c} \quad \text{та} \quad |S(g, \lambda, X) - J| < \frac{\epsilon}{c}.$$

Тому, для кожного такого розбиття λ та всякого такого набору точок X, рівність

$$S(af + bg, \lambda, X) = aS(f, \lambda, X) + bS(g, \lambda, X)$$

зумовлює наступну оцінку, яка спричиняє справедливість твердження пункту а):

$$|S(af + bg, \lambda, X) - aI - bJ| \leq |a||S(f, \lambda, X) - I| + |b||S(g, \lambda, X) - J| < \frac{|a|\epsilon}{c} + \frac{|b|\epsilon}{c} \leq \epsilon.$$

б) Пункт б) випливає з нерівностей $I \geq L(f, \lambda) \geq 0$, правильних для кожного λ.
в) Для коливань функцій $|f|$ та f по будь-якій множині $H \subset E$ справедлива оцінка

$$\omega(|f|, H) \leq \omega(f, H),$$

зокрема $\omega(|f|, H) = \omega(f, H)$, якщо f не змінює знак на H. Тому, для всіх λ, маємо

$$U(|f|, \lambda) - L(|f|, \lambda) \leq U(f, \lambda) - L(f, \lambda).$$

Тепер інтегровність функції $|f|$ на E випливає із критерія інтегровності 1(або 2). Нерівність в пункті в) є наслідком пунктів а), б) і нерівностей $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.
г) Аналогічно, цей пункт є наслідком нерівності, для будь-якої підмножини $H \subset E$,

$$\omega(fg, H) \leq M(f, E)\omega(g, H) + M(g, E)\omega(f, H).$$

□

2.7. **Адитивність інтеграла Рімана.** Ще однією важливою властивістю інтеграла Рімана є

Теорема 2.6 (Про адитивність інтеграла Рімана). *Нехай $E_1 \subset \mathbb{R}^m$ та $E_2 \subset \mathbb{R}^m$ – дві вимірні множини, внутрішності E_1^0 та E_2^0 яких не перетинаються. Функція $f : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}$ є інтегровною на об'єднанні $E_1 \cup E_2$ тоді і тільки тоді, коли вона є інтегровною на кожній із множин E_1 та E_2. При цьому має місце рівність*

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{E_1} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{E_2} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Доведення. Зауважимо, що множина $E := E_1 \cup E_2$ є вимірною як об'єднання вимірних множин. Нехай $\lambda_1 = \{E_{j,1}\}_{j=1}^{l_1}$ – розбиття множини E_1, а $\lambda_2 = \{E_{j,2}\}_{j=1}^{l_2}$ – розбиття множини E_2. Тоді

$$\lambda = \{E_j\}_{j=1}^{l_1+l_2} := \{E_{1,1}, \ldots, E_{l_1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{l_2,2}\} \tag{2}$$

є розбиттям множини E. При цьому

$$U(f,\lambda) = U(f,\lambda_1) + U(f,\lambda_2) \quad \text{та} \quad L(f,\lambda) = L(f,\lambda_1) + L(f,\lambda_2). \tag{3}$$

$\Leftarrow$ (достатність). Припустимо, що $f \in R(E_1)$ та $f \in R(E_2)$ і доведемо що $f \in R(E)$. Візьмемо $\epsilon > 0$. За критерієм інтегровності 1, існує розбиття λ_1 множини E_1 таке, що $U(f,\lambda_1) - L(f,\lambda_1) < \frac{\epsilon}{2}$. Також існує розбиття λ_2 множини E_2 таке, що $U(f,\lambda_2) - L(f,\lambda_2) < \frac{\epsilon}{2}$. Тоді, для розбиття λ множини E, означеного рівністю (2), маємо

$$\begin{aligned} U(f,\lambda) - L(f,\lambda) &= U(f,\lambda_1) - L(f,\lambda_1) + U(f,\lambda_2) - L(f,\lambda_2) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Отже, $f \in R(E)$ за критерієм інтегровності 1. Достатність доведена.
$\Rightarrow$ (необхідність). Припустимо, що $f \in R(E)$ і доведемо, що $f \in R(E_1)$. Візьмемо $\epsilon > 0$. За критерієм інтегровності 2, існує $\delta > 0$ таке, що для кожного розбиття λ множини E такого, що $|\lambda| < \delta$, має місце нерівність $U(f,\lambda) - L(f,\lambda) < \epsilon$. Візьмемо розбиття λ_1 множини E_1 таке, що $|\lambda_1| < \delta$ та розбиття λ_2 множини E_2 таке, що $|\lambda_2| < \delta$. Тоді і для розбиття λ множини E, означеного рівністю (2), маємо $|\lambda| < \delta$. Тому

$$\begin{aligned} U(f,\lambda_1) - L(f,\lambda_1) &\le U(f,\lambda_1) - L(f,\lambda_1) + U(f,\lambda_2) - L(f,\lambda_2) = U(f,\lambda) - L(f,\lambda) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Отже, $f \in R(E_1)$ за критерієм інтегровності 1. Аналогічно, $f \in R(E_2)$. Необхідність доведена. Тепер рівність (1) випливає із (3). □

3. Циліндричні множини.

Означення множини, вимірної за Жорданом, та міри Жордана залежить від розмірності m евклідового простору. Справді, нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – обмежена множини. Як ми бачили, вона може бути вимірною в $\mathbb{R}^m$ а може і не бути. В той же час E є завжди вимірною в $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ і її міра в $\mathbb{R}^{m+1}$ рівна нулю. Надалі, якщо мова йтиме про один і той же евклідів простір, будемо користуватися тими ж позначеннями, що і в попередньому параграфі. Якщо ж мова одночасно йтиме про різні евклідові простори, як в цьому параграфі, то замість слів "вимірна" та "міра" будемо писати "m-вимірна" та "m-міра або "$(m+1)$-вимірна" та "$(m+1)$-міра або "p-вимірна" та "p-міра". Для простору $\mathbb{R}^m$ $\mathbf{x}$, μ та λ будуть означати те ж саме, що і в попередньому параграфі. Щоб не викликати плутанини, в просторі $\mathbb{R}^{m+1}$ будемо позначати через $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mu}$ та $\tilde{\lambda}$ відповідно точку $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{m+1}$, міру Жордана та розбиття множини $H \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Зокрема, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, а $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$. Нарешті, для скорочення записів, замість $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$ будемо писати $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, x_{m+1})$.

3.1. **Найпростіші циліндричні множини.** Так само, як лема 1.4, доводиться

Лема 3.1. *Нехай $q_n \subset \mathbb{R}^m$ – m-мірний n-куб, а $L = const \geq 0$. Множина*

$$H := q_n \times [0, L] \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

є $(m+1)$-вимірною та $\tilde{\mu} H = L\ \mu q_n$.

Лема 3.2. *Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – m-вимірна множина, а $L = const \geq 0$. Множина*

$$H := E \times [0, L] \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

є $(m+1)$-вимірною та $\tilde{\mu} H = L\ \mu E$.

Доведення. Позначимо $H_n := E_{(n)} \times [0, L]$ та $H(n) := E^{(n)} \times [0, L]$. Тоді $H_n \subset H \subset H(n)$. За попередньою лемою та властивістю адитивності міри,

$$\tilde{\mu} H_n = L\ \mu E_{(n)} \quad \text{та} \quad \tilde{\mu} H(n) = L\ \mu E^{(n)}.$$

Оскільки множина E є m-вимірною, то за означенням 1.5 вимірної множини,

$$\tilde{\mu} H(n) - \tilde{\mu} H_n = L(\mu E^{(n)} - \mu E_{(n)}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

отже множина H є $(m+1)$-вимірною за апроксимаційним критерієм вимірності. Із

$$L\ \mu E = L \lim_{n\to\infty} \mu E_{(n)} = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu} H_n \leq \tilde{\mu} H \leq \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu} H(n) = L \lim_{n\to\infty} \mu E^{(n)} = L\ \mu E$$

випливає рівність $\tilde{\mu} H = L\ \mu E$. □

3.2. **Обчислення інтегралів по найпростіших циліндричних множинах.** Має місце

Лема 3.3. *Нехай* $E \subset \mathbb{R}^m$ *– m-вимірна множина,* $K = const \geq 0$, *та*

$$H := E \times [-K, K]$$

– циліндрична множина. Якщо функція $f : H \to \mathbb{R}$ *є інтегровною на* H, *то*

$$\int_H f(\tilde{\mathbf{x}})d\tilde{\mathbf{x}} = \int_E \left(\overline{\int}_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_m)dx_{m+1} \right) d\mathbf{x} = \int_E \left(\underline{\int}_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x}.$$

Зокрема, якщо для всіх $\mathbf{x} \in E$ *існує* $\int_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1}$, *то*

$$\int_H f(\tilde{\mathbf{x}})d\tilde{\mathbf{x}} = \int_E \left(\int_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x}.$$

Доведення. Візьмемо $\epsilon > 0$. За критерієм інтегровності 2, існує $\delta > 0$ таке, що для кожного розбиття $\tilde{\lambda}$ множини H такого, що $|\lambda| < \delta$, справедливі нерівності

$$U(f, \tilde{\lambda}) - \epsilon < \int_H f(\tilde{\mathbf{x}})d\tilde{\mathbf{x}} := I \quad \text{та} \quad L(f, \tilde{\lambda}) + \epsilon > I.$$

Нехай $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^{l}$ – яке-небудь розбиття множини E таке, що $|\lambda| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ а $\lambda_1 = \{J_i\}_{i=1}^{s}$ – яке небудь розбиття відрізка $[-K, K] \subset \mathbb{R}$ на відрізки J_i довжини $|J_i| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Тоді $\tilde{\lambda} = \{J_i \times E_j\}_{i=1}^{s}{}_{j=1}^{l}$ є розбиттям множини H, та $|\tilde{\lambda}| < \delta$. Тому

$$\overline{\int}_E \left(\overline{\int}_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x} \leq \sum_{j=1}^{l} \left(\sup_{\mathbf{x} \in E_j} \overline{\int}_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) \mu E_j$$

$$\leq \sum_{j=1}^{l} \left(\sup_{\mathbf{x} \in E_j} \sum_{i=1}^{s} \sup_{x_{m+1} \in J_i} f(\mathbf{x}, x_{m+1})|J_i| \right) \mu E_j \leq \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{s} \left(\sup_{\mathbf{x} \in E_j} \sup_{x_{m+1} \in J_i} f(\mathbf{x}, x_{m+1}) \right) |J_i| \mu E_j$$

$$\leq \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{s} \left(\sup_{\tilde{\mathbf{x}} \in E_j \times J_i} f(\tilde{\mathbf{x}}) \right) |J_i| \mu E_j = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{s} \left(\sup_{\tilde{\mathbf{x}} \in E_j \times J_i} f(\tilde{\mathbf{x}}) \right) \tilde{\mu}(J_i \times E_j)$$

$$= U(f, \tilde{\lambda}) < I + \epsilon,$$

де рівність у передостанньому рядку є наслідком леми 3.2. Отже

$$\overline{\int}_E \left(\underline{\int}_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x} \leq \overline{\int}_E \left(\overline{\int}_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x} < I + \epsilon.$$

Аналогічно,

$$\underline{\int}_E \left(\overline{\int}_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x} \geq \underline{\int}_E \left(\underline{\int}_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x} > I - \epsilon.$$

Оскільки $\epsilon > 0$ – довільне, із цих нерівностей випливає справедливість леми 3.3. $\square$

3.3. **Вимірність циліндричної множини.**

Означення 3.1 (циліндричної множини)**.** Нехай на m-вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^m$ задані дві інтегровні функції $u : E \to \mathbb{R}$ та $v : E \to \mathbb{R}$ такі, що

$$u(\mathbf{x}) \le v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E.$$

Циліндричною множиною у напрямку осі Ox_{m+1} з основою E називається множина

$$H := \{\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{x} \in E \quad \text{та} \quad u(\mathbf{x}) \le x_{m+1} \le v(\mathbf{x})\} \quad (\subset \mathbb{R}^{m+1}).$$

Зауваження 3.1. Функції u та v часто називають відповідно нижньою та верхньою кришками множини H.

Теорема 3.1. *Циліндрична множина є $(m+1)$-вимірною множиною.*

Доведення. Спочатку доведемо теорему для випадку $u(\mathbf{x}) \equiv 0$. Візьмемо $\epsilon > 0$. Оскільки $v \in R(E)$, то за критерієм інтегровності 1, існує розбиття $\lambda = \{E_j\}_{j=1}^l$ множини E таке, що

$$U(v, \lambda) - L(v, \lambda) < \epsilon.$$

Позначимо $\quad m_j = \inf_{\mathbf{x} \in E_j} v(\mathbf{x}), \qquad M_j = \sup_{\mathbf{x} \in E_j} v(\mathbf{x}) \quad$,

$$H_1 := \cup_{j=1}^l E_j \times [0, m_j] \qquad \text{та} \qquad H_2 := \cup_{j=1}^l E_j \times [0, M_j].$$

Тоді

$$H_1 \subset H \subset H_2.$$

За лемою 3.2 та властивістю адитивності міри,

$$\tilde{\mu} H_1 = \sum_{j=1}^{l} m_j \mu E_j = L(v, \lambda) \quad \text{та} \quad \tilde{\mu} H_2 = \sum_{j=1}^{l} M_j \mu E_j = U(v, \lambda).$$

Звідси $\tilde{\mu} H_2 - \tilde{\mu} H_1 < \epsilon$, отже, множина H є $(m+1)$-вимірною за апроксимаційним критерієм вимірності. У випадку $u(\mathbf{x}) \equiv 0$ теорему доведено.

Щоб довести теорему у загальному випадку, позначимо $L := \inf_{\mathbf{x} \in E} u(\mathbf{x})$,

$$H_3 := \{\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{x} \in E \quad \text{та} \quad 0 \le x_{m+1} \le v(\mathbf{x}) - L\}$$

та

$$H_4 := \{\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{x} \in E \quad \text{та} \quad 0 \le x_{m+1} \le u(\mathbf{x}) - L\}.$$

За щойно доведеним частинним випадком, обидві циліндричні множини H_3 та H_4 є $(m+1)$-вимірними. Нарешті, $(m+1)$-вимірність множини H випливає із включень $H_3 \setminus H_4 \subset H \subset \overline{H_3 \setminus H_4}$. $\square$

3.4. Теорема про обчислення інтегралів по циліндричних множинах.

Теорема 3.2. *Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – m-вимірна множина, $u : E \to \mathbb{R}$ та $v : E \to \mathbb{R}$ – дві інтегровні на E функції такі, що $u(\mathbf{x}) \le v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E$,*

$$H := \{\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \mathbf{x} \in E \quad \text{та} \quad u(\mathbf{x}) \le x_{m+1} \le v(\mathbf{x})\}$$

– циліндрична множина. Якщо функція $f : H \to \mathbb{R}$ є інтегровною на H, та для всіх $\mathbf{x} \in E$ існує $\int_{u(\mathbf{x})}^{v(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, x_m)dx_m$, то

$$\int_H f(\tilde{\mathbf{x}})d\tilde{\mathbf{x}} = \int_E \left(\int_{u(\mathbf{x})}^{v(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Доведення. Позначимо $K := \sup_{\mathbf{x}\in E}(|u(\mathbf{x})| + |v(\mathbf{x})|)$, $H_K := E \times [-K, K]$ та

$$\hat{f}(\tilde{\mathbf{x}}) := \begin{cases} f(\tilde{\mathbf{x}}), & \tilde{\mathbf{x}} \in H, \\ 0, & \tilde{\mathbf{x}} \in H_K \setminus H. \end{cases}$$

Користуючись адитивністю інтеграла та попередньою лемою, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_H f(\tilde{\mathbf{x}})d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{H_K} f(\tilde{\mathbf{x}})d\tilde{\mathbf{x}} = \int_E \left(\int_{-K}^{K} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x} \\ = \int_E \left(\int_{u(\mathbf{x})}^{v(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

□

Наслідок 3.1. *Якщо, H - циліндрична множина із теореми 3.2, а функкція f є неперервною і обмеженою на H, то має місце рівність (1).*

Наслідок 3.2. *Для циліндричної множини H із теореми 3.2 має місце рівність*

$$\mu H = \int_E (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}))d\mathbf{x}.$$

Вправа 10. *Довести наступну теорему.*

Теорема 3.3. *– циліндрична множина із теореми 3.2. Якщо функція $f : H \to \mathbb{R}$ є інтегровною на H, то*

$$\int_H f(\tilde{\mathbf{x}})d\tilde{\mathbf{x}} = \int_E \left(\int_{u(\mathbf{x})}^{\bar{v}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, x_{m+1})dx_{m+1} \right) d\mathbf{x}$$

4. Об'єм та міра паралелепіпеда.

4.1. p – **мірний паралелепіпед.** Нехай задано систему $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^p$, $1 \le p \le m$, векторів $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jm}) \in \mathbb{R}^m$ і точка $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m}) \in \mathbb{R}^m$.

Означення 4.1 (p-мірного паралелепіпеда)**.** p-мірним паралелепіпедом $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p; \mathbf{x}_0)$, визначеним системою $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^p$ векторів $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ і точкою $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, називається множина

$$P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p; \mathbf{x}_0) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{p} t_j \mathbf{a}_j, \quad t_j \in [0,1] \right\}.$$

p-мірний паралелепіпед $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p; \mathbf{x}_0)$ називають виродженим, якщо система $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^p$ векторів $\mathbf{a}_j$ є лінійно залежною, і невиродженим, якщо він не є виродженим.

Зауваження 4.1. Добре відомо (і це легко перевірити), що система $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^p$ векторів $\mathbf{a}_j$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли її визначник Грамма

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_p) \end{vmatrix} = 0.$$

Зауважимо, 1-мірним паралелепіпедом $P(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_0)$ є відрізок з кінцями в точках $\mathbf{x}_0$ та $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_1$, довжину якого назвемо об'ємом і поначимо $|P(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_0)|$, тобто

$$|P(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_0)| := \|\mathbf{a}_1\|.$$

При $p > 1$ об'ємом p-мірного паралелепіпеда назвемо "добуток об'єму основи на висоту", точніше дамо

Означення 4.2 (об'єму p-мірного паралелепіпеда)**.** Нехай $p > 1$. *Об'ємом p-мірного паралелепіпеда* $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p; \mathbf{x}_0)$ називається число

$$|P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p; \mathbf{x}_0)| := \|\mathbf{h}\| \; |P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{p-1}; \mathbf{x}_0)|,$$

де $\mathbf{h}$ – вектор, визначений рівністю

$$\mathbf{h} := \mathbf{a}_p + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \mathbf{a}_j,$$

а числа α_j є розв'язком системи рівнянь

$$(\mathbf{h}, \mathbf{a}_j) = 0, \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Зауваження 4.2. Якщо $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{p-1}; \mathbf{x}_0)$ невироджений то вектор $\mathbf{h}$ єдиний.

4.2. **Об'єм p-мірного паралелепіпеда.**

Лема 4.1 (Про об'єм p-мірного паралелепіпеда)**.** *Квадрат об'єму p-мірного паралелепіпеда, визначеного системою $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^p$ векторів $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ дорівнює визначнику Грамма цієї системи, тобто*

$$|P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p;\mathbf{x}_0)|^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_p) \end{vmatrix}.$$

Доведення. За означенням, $|P(\mathbf{a}_1,\mathbf{x}_0)|^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2 = (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1)$, тобто лема справедлива при $p = 1$. Припустимо за індукцією, що лема справедлива для числа $p-1 \geq 1$. Користуючись означенням об'єму p-мірного паралелепіпеда, елементарними властивостями визначників та припущенням індукції, отримуємо

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_{p-1}) & (\mathbf{a}_1,\mathbf{h}-\sum_{j=1}^{p-1}\alpha_j\mathbf{a}_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_{p-1}) & (\mathbf{a}_p,\mathbf{h}-\sum_{j=1}^{p-1}\alpha_j\mathbf{a}_j) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_{p-1}) & -\sum_{j=1}^{p-1}\alpha_j(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_j) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_{p-1},\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{p-1},\mathbf{a}_{p-1}) & -\sum_{j=1}^{p-1}\alpha_j(\mathbf{a}_{p-1},\mathbf{a}_j) \\ (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_{p-1}) & -\sum_{j=1}^{p-1}\alpha_j(\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_j)+(\mathbf{a}_p,\mathbf{h}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_{p-1}) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_{p-1},\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{p-1},\mathbf{a}_{p-1}) & 0 \\ (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_{p-1}) & (\mathbf{a}_p,\mathbf{h}) \end{vmatrix} = (\mathbf{a}_p,\mathbf{h}) \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_{p-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_{p-1},\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{p-1},\mathbf{a}_{p-1}) \end{vmatrix}$$

$$= (\mathbf{a}_p,\mathbf{h})|P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{p-1};\mathbf{x}_0)|^2 = (\mathbf{h},\mathbf{h})|P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{p-1};\mathbf{x}_0)|^2 = \|\mathbf{h}\|^2|P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{p-1};\mathbf{x}_0)|^2$$
$$= |P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p;\mathbf{x}_0)|^2$$

□

Скрізь надалі для скорочення запису введемо такі позначення. Якщо $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, то позначимо

$$P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p) := P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p;\mathbf{0}).$$

За останньою лемою (і здоровим глуздом), об'єм p-мірного паралелепіпеда не залежить від точки $\mathbf{x}_0$, тому позначимо

$$|P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p)| := |P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p;\mathbf{x}_0)|.$$

4.3. **Паралелепіпед, об'єм проекції.** Паралелепіпедом називається m-мірний паралелепіпед.

Лема 4.2 (Про об'єм паралелепіпеда)**.** *Має місце рівність*

$$|P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m)| = |\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}|$$

Доведення. Лема випливає із попередної леми і рівності

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

□

Із леми випливає, що об'єм проекції p-мірного паралелепіпеда $P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p) \subset \mathbb{R}^m$ на підпростір $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^m$ з базисом $\{\mathbf{e}_{j_1},\dots,\mathbf{e}_{j_p}\}$ дорівнює модулю визначника

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{pj_1} & \cdots & a_{pj_p} \end{vmatrix}.$$

Лема 4.3 (Про об'єм проекції $(m-1)$-мірного паралелепіпеда)**.** *Об'єм $|P^*|$ проекції P^* $(m-1)$-мірного паралелепіпеда $P \subset \mathbb{R}^m$ на підпростір $\mathbb{R}^{m-1}$ дорівнює добутку об'єму $|P|$ на модуль косинуса кута між віссю $\mathbf{e}_m$ та перпендикуляром до P.*

Доведення. Нехай $P = P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{m-1})$, $\mathbf{a}_m := \mathbf{e}_m = (0,\dots,0,1)$, та $\mathbf{h}$ – висота паралелепіпеда $P = P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m)$ визначена в означенні 3.3 для $p = m-1$. Тоді модуль косинуса кута між віссю $\mathbf{e}_m$ та перпендикуляром до P знаходиться із рівності

$$|\cos\alpha| = \frac{|(\mathbf{a}_m,\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\left(\mathbf{h} - \sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j\mathbf{a}_j, \mathbf{h}\right) = \frac{(\mathbf{h},\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \|\mathbf{h}\|.$$

Тому

$$|P||\cos\alpha| = |P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{m-1})|\|\mathbf{h}\| = |P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m)|$$

$$= |\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}| = |\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1)1} & \cdots & a_{(m-1)(m-1)} & a_{(m-1)m} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}| = |\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1)1} & \cdots & a_{(m-1)(m-1)} \end{vmatrix}|$$

$= |P^*|$. □

4.4. **Теорема Піфагора.** Має місце

Теорема 4.1 (Піфагора)**.** *Квадрат об'єму p-мірного паралелепіпеда* $P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p)\subset\mathbb{R}^m$ *дорівнює сумі квадратів об'ємів всіх його проекцій на p-мірні підпростори, тобто*

$$(1)\qquad |P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p)|^2=\sum_{1\le j_1<\dots<j_p\le m}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_p}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{pj_1} & \cdots & a_{pj_p}\end{vmatrix}^2.$$

Для випадків $p=1$ та $p=m$ теорема Піфагора очевидна. Для випадку $p=m-1$ вона випливає з попередньої леми. Зокрема, теорема Піфагора вже доведена для всіх $1\le p\le m\le 3$.

Щоб довести теорему у загальному випадку, застосуємо рівність

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^m\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1^{(i)},\mathbf{a}_1^{(i)}) & \cdots & (\mathbf{a}_1^{(i)},\mathbf{a}_p^{(i)})\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (\mathbf{a}_p^{(i)},\mathbf{a}_1^{(i)}) & \cdots & (\mathbf{a}_p^{(i)},\mathbf{a}_p^{(i)})\end{vmatrix}=(m-p)\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_p)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_p,\mathbf{a}_p)\end{vmatrix},$$

в якій, при кожному $j=1,\dots,p$, $\mathbf{a}_j^{(0)}:=(0,a_{j,2},\dots,a_{j,m})$, $\mathbf{a}_j^{(m)}:=(a_{j,1},\dots,a_{j,m-1},0)$, та $\mathbf{a}_j^{(i)}:=(a_{j,1},\dots,a_{j,i-1},0,a_{j,i+1},\dots,a_{j,m})$, якщо $i=2,\dots,m-1$. Ця рівність випливає безпосередньо із означення визначника порядку p.

Доведення. теореми Піфагора. Доведемо теорему за індукцією по m. Припустимо, що рівність (1) є правильною для числа $m-1\ge 1$, тоді, враховуючи (2), маємо

$$\begin{aligned}(m-p)|P(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p)|^2=&\sum_{i=1}^m\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1^{(i)},\mathbf{a}_1^{(i)}) & \cdots & (\mathbf{a}_1^{(i)},\mathbf{a}_p^{(i)})\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (\mathbf{a}_p^{(i)},\mathbf{a}_1^{(i)}) & \cdots & (\mathbf{a}_p^{(i)},\mathbf{a}_p^{(i)})\end{vmatrix}\\ =&\sum_{i=1}^m\sum_{1\le j_1<\dots<j_p\le m, j_1\ne i,\dots,j_p\ne i}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_p}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{pj_1} & \cdots & a_{pj_p}\end{vmatrix}^2\\ =&(m-p)\sum_{1\le j_1<\dots<j_p\le m}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_p}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{pj_1} & \cdots & a_{pj_p}\end{vmatrix}^2.\end{aligned}$$

□

5. Відображення вимірних множин.

Нагадаємо, буквою G ми позначаємо виключно відкриті множини, буквою F – замкнені. Якщо в одному і тому ж співвідношенні будуть фігурувати елементи просторів різної розиірності, скажімо, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^p$ та $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^q$, то, щоб розрізняти норми в різних просторах, будемо писати $\|\mathbf{x}\|_p$ і, відповідно, $\|\mathbf{y}\|_q$.

5.1. **Гомеоморфізм.** Нехай $\varphi : E \to \mathbb{R}^m$ – неперервне відображення множини $E \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$, та $\varphi(E)$ – образ множини E. Нагадаємо, відображення φ називається гомеоморфізмом між E та $\varphi(E)$, якщо воно є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) між E та $\varphi(E)$ і обернене відображення φ^{-1} є неперервним на E.

Якщо φ є гомеоморфізмом між відкритими множинами $G \subset \mathbf{R}^m$ та $\varphi(G) \subset \mathbf{R}^m$, то за теоремою про характеризацію неперервної функції, образ кожної відкритої або замкненої підмножини множини G є віповідно відкритою або замкненою підмножиною множини $\varphi(G)$ і навпаки, прообраз кожної відкритої або замкненої підмножини множини $\varphi(G)$ є віповідно відкритою або замкненою підмножиною множини G.

Лема 5.1 (про образ межі замкненої множини)**.** *Нехай φ є гомеоморфізмом між відкритими множинами $G \subset \mathbf{R}^m$ та $\varphi(G) \subset \mathbf{R}^m$. Тоді образ межі замкненої множиние $F \subset G$ є межею її образу.*

Доведення. За умовою, $F \leftrightarrow \varphi(F)$. Нехай $\mathbf{x} \in F^0$, тобто точка належить множині разом із її околом. Тоді образ цього околу належить $\varphi(F)$ і є відкритою множиною, звідки $\varphi(\mathbf{x}) \in (\varphi(E))^0$. Отже $\varphi(F^0) \subset (\varphi(F))^0$. Аналогічно $(\varphi(F))^0 \subset \varphi(F^0)$. Тобто $F^0 \leftrightarrow (\varphi(F))^0$. Таким чином, $\quad \partial F = F \setminus F^0 \leftrightarrow \varphi(F) \setminus (\varphi(F))^0 = \partial(\varphi(F))$. □

5.2. **Неперервно диференційовні відображення.** Нехай $G \subset \mathbb{R}^p$ – відкрита множина. Нагадаємо, відображення

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \varphi_q(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad : G \to \mathbb{R}^q$$

називається неперервно диференційовним в G (пишуть $\varphi \in C^1(G)$), якщо всі функції $\varphi_j,\ j = 1, \ldots, q$, є неперервно диференційовними в G. Похідною $\varphi'(\mathbf{x})$ в точці $\mathbf{x} \in G$ неперервно диференційовного відображення φ називається матриця

$$\varphi'(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_q(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_q(\mathbf{x})}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, числову матрицю $D = \{d_{i,j}\}_{i=1}^{p}\,{}_{j=1}^{q}$ можно вважати точкою простору $\mathbf{R}^{pq}$, тому її норму природно означити так:

$$\|D\|_{pq} := \|(d_{1,1},\ldots,d_{1,q},d_{2,1},\ldots,d_{p,q})\|_{pq} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} d_{i,j}^2}.$$

Нормою похідної $\varphi'(\mathbf{x})$ неперервно диференційовного відображення φ в точці $\mathbf{x} \in G$ називається норма матриці $\varphi'(\mathbf{x})$, тобто число $\|\varphi'(\mathbf{x})\|_{pq}$. Зауважимо що $\|\varphi'\|_{pq}$ є неперервною в G функцією. Має місце наступна лема (див. 12.1.Теорема 2).

Лема 5.2 (Про неперервно диференційовне відображення)**.** *Нехай $G \subset \mathbb{R}^p$ – відкрита множина, відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^q$ є неперервно диференційовним в G. Якщо точки $\mathbf{x}'$ та $\mathbf{x}''$ містяться в G разом з відрізком $[\mathbf{x}',\mathbf{x}'']$, що їх сполучає, то*

$$\|\varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}'')\|_q \le \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|_p \max_{\mathbf{x}\in[\mathbf{x}',\mathbf{x}'']} \|\varphi'(\mathbf{x})\|_{pq}.$$

Лема 5.3 (про образ замкненої множини міри нуль)**.** *Нехай $G \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита множина, відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ є неперервно диференційовним в G. Образом $\varphi(F)$ замкненої множини $F \subset G$ міри нуль є множина міри нуль.*

Доведення. Оскільки $F \subset G$ і F є замкненою множиною, то існує зовнішня фігура $F^{(n_0)}$ множини F, яка повністю міститься в G. Функція $\|\varphi'\|_{m^2} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{2m}$ є неперервною на замкненій множині $F^{(n_0)}$, отже існує $\max_{\mathbf{x}\in F^{(n_0)}} \|\varphi'(\mathbf{x})\|_{m^2} =: B$. Візьмемо $\epsilon > 0$. За умовою $\mu F = 0$, тому знайдеться $n \ge n_0$ таке, що

$$|F^{(n)}| < \frac{\epsilon}{(2B\sqrt{m})^m}.$$

Нехай n-куб q_n такий, що $q_n \subset F^{(n)}$; тоді за лемою 5.2,

$$\mathrm{diam}(\varphi(q_n)) \le \mathrm{diam}(q_n) \max_{\mathbf{x}\in F^{(n)}} \|\varphi'(\mathbf{x})\|_{m^2} \le \mathrm{diam}(q_n) \max_{\mathbf{x}\in F^{(n_0)}} \|\varphi'(\mathbf{x})\|_{m^2} = B\ \mathrm{diam}(q_n),$$

тому множина $(\varphi(q_n))$ міститься в деякому кубі міри $(2B\ \mathrm{diam}(q_n))^m = (2B\sqrt{m})^m|q_n|$. Отже множина $\varphi(F_0)$ міститься в обєднанні кубів, міра якого не перевищує $(2B\sqrt{m})^m \cdot|F^{(n)}| < \epsilon$. Звідси $\mu^*(\varphi(F)) < \epsilon$, а значить, внаслідок довільності ϵ, $\mu(\varphi(F)) = 0$. $\square$

Наслідком цієї леми, леми 4.1 та межевого критерія вимірности є

Лема 5.4 (про вимірність образу замкненої вимірної множини)**.** *Нехай $G \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита множина, відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ є неперервно диференційовним в G, образ $\varphi(G)$ є відкритою множиною, та φ є гомеоморфізмом між G та $\varphi(G)$. Тоді образом $\varphi(F)$ замкненої вимірної множини $F \subset G$ є замкнена вимірна множина.*

5.3. **Лінійне відображення.**

Лема 5.5 (Про лінійне відображення куба)**.** *Нехай* $Q := [0,1]^n \subset \mathbb{R}^m$ *– одиничний куб,*

$$D := \begin{pmatrix} a_{11}, & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m}, & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

числова матриця, та $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *– лінійне відображення, задане рівністю*

$$L(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}^t.$$

Тоді образом $L(Q)$ *куба* Q *є паралелепіпед* $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$*, тобто*

$$P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) = L(Q).$$

Доведення. Нехай $\mathbf{x} \in Q$, тобто існують числа $t_1 \in [0,1], \dots, t_m \in [0,1]$ такі, що

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{e}_1 + \dots + t_m\mathbf{e}_m.$$

Оскільки $L(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j$ $j = 1, \dots, m$ та L – лінійне відображення, то

$$L(\mathbf{x}) = t_1\mathbf{a}_1^t + \dots + t_m\mathbf{a}_m^t.$$

Отже $L(\mathbf{x}) \in P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$. Аналогічно, якщо $\mathbf{x} \notin Q$, то і $L(\mathbf{x}) \notin P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$. □

Наслідок 5.1. *При афінному відображенні* $\varphi(\mathbf{x}) := L(\mathbf{x}) + \mathbf{x}_0^t$ *образом куба* Q *є паралелепіпед* $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m; \mathbf{x}_0)$*.*

Зауваження 5.1. Якщо $\varphi(\mathbf{x}) := L(\mathbf{x}) + \mathbf{x}_0^t = D\mathbf{x}^t + \mathbf{x}_0^t$, то має місце тотожність

$$\varphi'(\mathbf{x}) \equiv D.$$

Лема 5.6 (Про вимірність паралелепіпеда)**.** *Паралелепіпед є вимірною множиною.*

Доведення. Оскільки паралелепіпед $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{x}_0)$ є образом паралелепіпеда $P := P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) = P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{0})$ при відображенні зсуву на вектор $\mathbf{x}_0$, то лему досить довести для паралелепіпеда P. За попередньою лемою, P є образом куба при лінійному відображенні L. Оскільки $L'(\mathbf{x}) \equiv D$. то відображення L є неперервно диференційовним в $\mathbb{R}^m$. Крім того, якщо визначник $\det D \neq 0$, то L є гомеоморфізмом між $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^m$, отже твердження леми випливає із леми 4.4 про вимірність образу замкненої вимізної множини. Якщо ж $\det D = 0$, то не важко перевірити, що є P множиною міри нуль. □

5.4. **Міра паралелепіпеда.**

Теорема 5.1 (Про міру паралелепіпеда)**.** *Міра паралелепіпеда дорівнює його об'єму.*

Доведення теореми розіб'ємо на декілька лем. Нехай D - квадратна матриця $m\times m$. Лінійне відображення $L(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$ назвемо *правильним*, якщо $\mu(L(Q_h)) = |L(Q_h)|$ для кожного куба $Q_h = [0, h]^m$. Одразу зауважимо, що якщо L – правильне відображення, то рівність $\mu(L(q_n)) = |L(Q_n)|$ має місце також для кожного n-куба $q_n \in \mathbf{R}^m$; це випливає із наслідку 1.4 про відображення зсуву. Спочатку розглянемо матриці вигляду

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \\ c_{1,j} & \cdots & c_{j-1,j} & c_{j,j} & c_{j+1,j} & \cdots & c_{m,j} \\ & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Кожну таку матрицю назвемо *спеціальною*, а відображення $L(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$ – *спеціальним*.

Лема 5.7. *Кожне спеціальне відображення є правильним.*

Доведення. Доведемо лему для одиничного куба $Q = [0, 1]^m$, так само лема доводиться для куба Q_h, $h > 0$. Образом $L(Q)$ куба Q є паралелепіпед $P := P(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$, де $\mathbf{a}_j = L(\mathbf{e}_j) = c_{j,j}\mathbf{e}_j$, а якщо $i \neq j$, то $\mathbf{a}_i = L(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i + c_{i,j}\mathbf{e}_j$. Отже P є циліндричною множиною відносно $\mathbf{e}_j$ з основою $P^* = P(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_m)$ і, за наслідком 3.2,

$$\mu P = \int_{P^*} (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_{P^*} |c_{j,j}| d\mathbf{x} = |c_{j,j}|$$

З іншого боку, за лемою 4.2, $|P| = |P(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)| = |D| = |c_{j,j}|$. □

Лема 5.8. *Нехай P – паралелепіпед, такий, що $\mu(P) = |P|$. Якщо L – правильне відображення, то*

$$\mu(L(P)) = |L(P)|.$$

Доведення. Візьмемо $\epsilon > 0$. За означенням міри, знайдеться число n, таке, що

$$\mu P^{(n)} - \mu P < \epsilon \quad \text{та} \quad \mu P - \mu P_{(n)} < \epsilon.$$

Оскільки L – правильне відображення, то

$$\mu(L(P^{(n)})) = |L(P^{(n)})| = |D||P^{(n)}| \quad \text{та} \quad \mu(L(P_{(n)})) = |L(P^{(n)})| = |D||P_{(n)}|,$$

де $|D| := |\det D|$. Враховуючи включення $L(P^{(n)}) \subset L(P) \subset L(P_{(n)})$, отримуємо

$$\begin{aligned} |L(P)| - \epsilon|D| = |D|(|P| - \epsilon) < |D||P_{(n)}| = \mu(L(P_{(n)})) \\ < \mu_*(L(P)) \le \mu_*(L(P)) \le \mu(L(P^{(n)})) = |D||P^{(n)}| < |D|(|P| + \epsilon) \\ = |L(P)| + \epsilon|D|, \end{aligned}$$

звідки $\mu(L(P)) = |L(P)|$. □

Лема 5.9. *Кожна невироджена матриця D є добутком m спеціальних матриць.*

Доведення. Лема доводиться по індукції по j з допомогою рівності: якщо $c_{j,j} \neq 0$, то

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ c_{1,j} & \cdots & c_{j-1,j} & c_{j,j} & \cdots & c_{m,j} \\ c_{1,j+1} & \cdots & c_{j-1,j+1} & c_{j,j+1} & \cdots & c_{m,j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1,m} & \dots & c_{j-1,m} & c_{j,m} & \dots & c_{m,m} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ d_{1,j+1} & \cdots & d_{j-1,j+1} & d_{j,j+1} & \cdots & d_{m,j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{1,m} & \dots & d_{j-1,m} & d_{j,m} & \dots & d_{m,m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \\ c_{1,j} & \cdots & c_{j-1,j} & c_{j,j} & c_{j+1,j} & \cdots & c_{m,j} \\ & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

де $d_{j,k} = \frac{c_{j,k}}{c_{j,j}}$ при всіх $k > j$ та $d_{i,k} = c_{i,k} - c_{i,j}d_{j,k}$, якщо $i \neq j$ та $k > j$. □

Доведення. теореми 4.2. Нехай P – невироджений паралелепіпед та $L(\mathbf{x}) = D\mathbf{x}$ – лінійне відображення таке, що $P = L(Q)$, де $Q = [0,1]^m$. Користуючись попередньою лемою представимо матрицю D у вигляді добутку спеціальних матриць D_i тобто у вигляді $D = D_1 \times \cdots \times D_m$ та позначимо $L_i(\mathbf{x}) := D_i(\mathbf{x})$. Оскільки для кожного паралелепіпеда $P_* \in \mathbf{R}^m$ та для кожного $i = 1, \dots, m$ маємо $\mu(L_i(P_*)) = |P_*|$, то і $\mu(L(P)) = |P|$. Для невиродженого паралелепіпеда теорема доведена. Для виродженого паралелепіпеда P неважко перевірити рівнсть $\mu P = 0 = |P|$. □

5.5. **Модуль неперервності відображення.** Наступне означення ввів Лебег.

Означення 5.1 (модуля неперервності відображення). Модулем неперервності відображення $\varphi : F \to \mathbf{R}^q$, неперервного на замкненій обмеженій множині $F \subset \mathbf{R}^p$, називається функція

$$\omega(t, \varphi, F) := \sup_{\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in F : \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|_p \le t} \|\varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}'')\|_q, \quad t \ge 0.$$

Лема 5.10 (Про властивості модуля неперервності відображення.). *Модуль неперервності відображення φ на замкненій обмеженій множині F має властивості:*

1) $\omega(0, \varphi, F) = 0$ *та* $\omega(t, \varphi, F) \ge 0, \quad t \ge 0$;

2) $\|\varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}'')\|_q \le \omega(\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|_p, \varphi, F), \quad \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in F$;

3) $\omega(t_1, \varphi, F) \le \omega(t_2, \varphi, F)$, *якщо* $0 \le t_1 \le t_2$;

4) $\omega(t, \varphi, F_1) \le \omega(t, \varphi, F)$, *якщо* $F_1 \subset F \subset G,\ t \ge 0$;

5) $\omega(t, \varphi, F) \le 2 \max_{\mathbf{x} \in F} \|\varphi(\mathbf{x})\|_q, \quad t \ge 0$;

6) $\lim_{t \to 0+} \omega(t, \varphi, F) = 0$.

Доведення. Властивості 1) – 5) негайно випливають із означення модуля неперервності, а 6) – із рівномірної неперервності відображення φ на компактній множині F. $\square$

Приклад 5.1. Якщо $\varphi : F \to \mathbf{R}$, тобто φ є "звичайною"функцією, то $\omega(\mathrm{diam} F, \varphi, F) = \omega(\varphi, F)$, де $\omega(\varphi, F)$ – коливання φ на F.

Нехай тепер $G \subset \mathbb{R}^p$ – відкрита множина, відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^q$ є неперервно диференційовним в G та $F \subset G$. Тоді модуль неперервності похідної φ' на F, тобто

$$\omega(t, \varphi', F) := \sup_{\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in F : \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|_p \le t} \|\varphi'(\mathbf{x}') - \varphi'(\mathbf{x}'')\|_{pq},$$

також має властивості 1) – 6), в яких, зрозуміло, треба замінити φ на φ'.

Приклад 5.2. Якщо $\varphi : \mathbf{R^p} \to \mathbf{R^q}$ є лінійним відображенням, то $\omega(t, \varphi', F) \equiv 0$.

Лема 5.11. *Нехай відображення φ є неперервно диференційовним в G. Якщо точки $\mathbf{x}_0$ і $\mathbf{x}^0$ містяться в F разом з відрізком $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^0]$, що їх сполучає, та $\xi \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^0]$, то*

$$\|\varphi(\mathbf{x}^0) - \varphi(\mathbf{x}_0) - \varphi'(\xi)(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_0)\|_q \le \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_0\|_p \ \omega(\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_0\|_p, \varphi', F).$$

Доведення. Позначимо $\psi(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0) - \varphi'(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Тоді $\psi(\mathbf{x}_0) = \bar{0}$ і $\psi'(\mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\xi),\ \mathbf{x} \in F \subset G$. Отже лема 5.2 разом з властивостями 2) та 3) зумовлюють

$$\|\psi(\mathbf{x}^0)\|_q = \|\psi(\mathbf{x}^0) - \psi(\mathbf{x}_0)\|_q \le \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_0\|_p \sup_{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^0]} \|\psi'(\mathbf{x})\|_{pq}$$

$$= \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_0\|_p \sup\nolimits_{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^0]} \|\varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\xi)\|_{pq} \le \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_0\|_p \ \omega(\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_0\|_p, \varphi'.F). \quad \square$$

5.6. **Регулярне та допустиме відображення.**

Означення 5.2 (допустимого відображення)**.** Нехай $G \subset \mathbf{R}^m$ – відкрита множина. Відображення $\varphi : G \to \mathbf{R}^m$ назвемо *допустимим*, якщо $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ є неперервно диференційовним в G, образ $\varphi(G)$ є відкритою множиною, та φ є гомеоморфізмом між G та $\varphi(G)$.

Зауваження 5.2. Можно довести: якщо $G \subset \mathbf{R}^m$ є областю та відображення $\varphi : G \to \mathbf{R}^m$ є допустимим, то йогог якобіан $\det \varphi'(\mathbf{x})$ не змінює знак в G, тобто або $\det \varphi'(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G$, або $\det \varphi'(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G$.

Зауваження 5.3. Нагадаємо, якщо відображення $\varphi : G \to \mathbf{R}^m$ є регулярним, то образ $\varphi(F)$ замкненої вимірної множини $F \subset G$ є також замкненою вимірною множиною.

Зауваження 5.4. В цій частині, "Кратні інтеграли", будемо користуватися допустимими відображеннями. Регулярні відображення будуть використані в наступній частині.

Означення 5.3 (регулярного відображення)**.** Нехай $G \subset \mathbf{R}^m$ – відкрита множина. Відображення $\varphi : G \to \mathbf{R}^m$ називаєеься *регулярним*, якщо воно є допустимим та його якобіан

$$\det \varphi'(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$

5.7. **Міра образу куба.**

Лема 5.12 (про міру образу куба)**.** *Нехай $\varphi : G \to \mathbf{R}^m$ – допустиме відображення відкритої множини $G \subset \mathbf{R}^m$ і $Q \subset G$ – куб з довжиною ребра h. Якщо $\mathbf{x}_0 \in Q$, то*

$$|\mu\left(\varphi(Q)\right) - |\varphi'(\mathbf{x}_0)|\mu Q| \leq c(m) L^{m-1} \mu Q \; \omega\left(\sqrt{m} h, \varphi', Q\right),$$

де $c(m)$ – стала, яка залежить тільки від m, і $L := \max_{\mathbf{x} \in Q} \|\varphi'(\mathbf{x})\|_{m^2}$.

Доведення. Позначимо

$$\varphi_0(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x}_0) + \varphi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \text{та} \quad \delta := \max_{\mathbf{x} \in Q} \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_0(\mathbf{x})\|.$$

За лемою 5.1,

$$\begin{aligned} \delta = &\max_{\mathbf{x} \in Q} \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_0(\mathbf{x})\| \leq \max_{\mathbf{x} \in Q} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \omega(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \varphi', Q) \\ \leq &\sqrt{m} h \; \omega(\sqrt{m} h, bv', Q). \end{aligned}$$

Тепер позначимо через E_δ – множину точок $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, відстань яких від межі $\partial(\varphi_0(Q))$ множини (паралелепіпеда) $\varphi_0(Q)$ не перевищує 2δ, тобто

$$E_\delta := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \ dist(\mathbf{y}, \partial(\varphi_0(Q))) \le 2\delta\}.$$

Покажемо, що

$$\varphi_0(Q) \subset \varphi(Q) \cup E_\delta \quad \text{та} \quad \varphi(Q) \subset \varphi_0(Q) \cup E_\delta.$$

Доведемо перше із цих включень. Нехай точка $\mathbf{y}_0 \in \varphi_0(Q)$. Якщо $\mathbf{y}_0 \in \varphi(Q)$ то включення вірне. Якщо ж $\mathbf{y}_0 \notin \varphi(Q)$, то позначимо через $\mathbf{x} \in Q$ точку таку, що $\mathbf{y}_0 = \varphi_0(\mathbf{x})$, та покладемо $\mathbf{y}_1 := \varphi(\mathbf{x})$. Оскільки $\mathbf{y}_0 \notin \varphi(Q)$, але $\mathbf{y}_1 \in \varphi(Q)$, то на відрізку, що сполучає точки y_0 та y_1, $\exists y_2 : y_2 \in \partial\varphi(Q)$, при цьому

$$\|y_2 - y_0\| \le \|y_1 - y_0\| = \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_0(\mathbf{x})\| \le \delta.$$

Тепер позначимо $y_3 := \varphi_0\left(\varphi^{-1}(y_2)\right)$. Тоді $\|y_2 - y_3\| \le \delta$, і, за лемою про образ та прообраз межі замкненої мрожини, $y_3 \in \partial\varphi_0(Q)$. Тому

$$\begin{aligned} dist(\mathbf{y}_0, \partial(\varphi_0(Q))) &\le \|y_0 - y_3\| \le \|y_0 - y_2\| + \|y_2 - y_3\| \\ &\le 2\delta, \end{aligned}$$

тобто $y_0 \in E_\delta$. Перше включення доведене. Аналогічно, але простіше, доводиться друге влючення. За лемою про вимірність образа замкненої множини, образ $\varphi(Q)$ є вимірною множиною, паралелепіпед $\varphi_0(Q)$ є також вимірною множиною, і $\mu\left(\varphi_0(Q)\right) = |\varphi'(\mathbf{x}_0)|\mu Q$. Отже доведені включення спричиняють нерівність

$$|\mu(\varphi(Q)) - |\varphi'(\mathbf{x}_0)|\mu Q|| = |\mu(\varphi(Q) - \mu(\varphi_0(Q))| \le \mu^*(E_\delta).$$

Таким чином, залишилось оцінити $\mu^*(E_\delta)$. За лемою 5.1, довжини ребер паралелепіпеда $\varphi_0(Q)$ не перевищують Lh. Нехай Γ – одна із $2m$ граней паралелепіпеда $\varphi_0(Q)$, і $\Gamma_\delta := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \ dist(\mathbf{y}, \Gamma) \le 2\delta\}$. Легко бачити, що Γ_δ міститься у деякому прямокутному паралелепіпеді P, довжина одного із ребер якого 4δ а довжини всіх інших ребер – $2Lh + 4\delta$. Звідки $\mu^*\Gamma_\delta \le \mu P = 4\delta(2Lh + 4\delta)^{m-1}$. Таким чином,

$$\begin{aligned} \mu^*(E_\delta) &\le c_1(m)(Lh + \delta)^{m-1}\delta \\ &\le c_1(m)(Lh + \sqrt{m}h\ \omega(\sqrt{m}h, \varphi', Q))^{m-1}\sqrt{m}h\omega(\sqrt{m}h, \varphi', Q) \\ &\le c_1(m)(Lh + 2\sqrt{m}hL)^{m-1}\sqrt{m}h\omega(\sqrt{m}h, \varphi', Q) \\ &= c(m)L^{m-1}h^m\omega(\sqrt{m}h, \varphi', Q), \end{aligned}$$

де $c(m) = c_1(m)(1 + 2\sqrt{m}))^{m-1}\sqrt{m}$. Лему доведено. $\square$

6. Формула заміни змінних.

Нехай $G \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита множина, відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ є неперервно диференційовним в G. Позначимо через $|\varphi'(\mathbf{x})|$ – модуль якобіана відображення φ, тобто

$$|\varphi'(\mathbf{x})| := |\det \varphi'(\mathbf{x})| = |\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_m(\mathbf{x})}{\partial x_m} \end{vmatrix}|.$$

6.1. **Основні формулювання.**

Теорема 6.1 (Про заміну змінних в кратному інтегралі)**.** *Нехай $G \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита множина, відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ є неперервно диференційовним в G, образ $\varphi(G)$ є відкритою множиною, та φ є гомеоморфізмом між G та $\varphi(G)$. Нехай $F \subset G$ – вимірнна замкнена множина. Якщо функція f є інтегровною на $\varphi(F)$, то*

$$\int_{\varphi(F)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_F f(\varphi(\mathbf{x}))|\varphi'(\mathbf{x})|d\mathbf{x},$$

зокрема інтеграл справа існує.

Доведення. теореми 5.1 для випадку $m = 1$ та $F = [a, b]$. В цьому випадку φ є "звичайною" функцією, неперервно диференційовною в деякому інтервалі $G = (c, d) \supset [a, b]$, а образом $\varphi(F)$ є деякий відрізок $[A, B]$. Оскільки φ є гомеоморфізмом, то можливі два випадки а) φ не зростає на $[a, b]$, та б) не φ не спадає на $[a, b]$. У випадку а) маємо $\varphi'(x) \le 0, \quad x \in [a, b]$, та $\varphi(F) = [\varphi(b), \varphi(a)]$; тому, користуючись фоормулою заміни змінних у "звичайному"інтегралі, отримуємо

$$\int_{\varphi(F)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = -\int_a^b f(\varphi(\mathbf{x}))\varphi'(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$
$$= \int_a^b f(\varphi(\mathbf{x}))|\varphi'(\mathbf{x})|d\mathbf{x} = \int_F f(\varphi(\mathbf{x}))|\varphi'(\mathbf{x})|d\mathbf{x}.$$

У випадку б) маємо $\varphi'(x) \ge 0, \quad x \in [a, b]$, та $\varphi(F) = [\varphi(a), \varphi(b)]$; тому

$$\int_{\varphi(F)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_a^b f(\varphi(\mathbf{x}))\varphi'(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_F f(\varphi(\mathbf{x}))|\varphi'(\mathbf{x})|d\mathbf{x}.$$

□

6.2. **Доведення теореми 1.** Спочатку доведемо теорему для випадку, коли F– елементарна фігура, складена, скажімо із n_0-кубів. Позначимо $L := \max_{\mathbf{x}\in F} \|\varphi'(\mathbf{x})\|_{m^2}$. Із леми про міру образу куба і властивостей модуля неперервності випливає, що для кожного $n \geq n_0$, кожного n-куба $q_n \subset F$, і кожної точки $\mathbf{x} \in q_n$ має місце нерівність

$$|\mu\left(\varphi(q_{n,j})\right) - |\varphi'(\mathbf{x})|\mu q_n| \leq c(m)L^{m-1}\omega\left(\frac{\sqrt{m}}{2^n}, \varphi', F\right)\mu q_n.$$

Нехай $n \geq n_0$. Тоді елементарна фігура F складена з l_n n-кубів $q_{n,1}, \ldots, q_{n,l_n}$ та $\hat{\lambda}_n := \{q_{n,j}\}_{j=1}^{l_n}$ є її розбиттям. F. Отже $\lambda := \{\varphi(q_{n,j})\}_{j=1}^{l_n}$ є розбиттям множини $\varphi(F)$ і

$$|\lambda_n| \leq L|\hat{\lambda}_n| = \frac{L\sqrt{m}}{2^n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Позначимо $g(\mathbf{x}) := f(\varphi(\mathbf{x}))|\varphi'(\mathbf{x})|$. Для довільного набору $\{\mathbf{x}_{n,j}\}_{j=1}^{l_n}$ точок $\mathbf{x}_{n,j} \in q_{n,j}$ та інтегральних сум $S(g, \hat{\lambda}_n, \{\mathbf{x}_{n,j}\}_{j=1}^{l_n})$ і $S(f, \lambda_n, \{\mathbf{y}_{n,j}\}_{j=1}^{l_n})$, де $\mathbf{y}_{n,j} := \varphi(\mathbf{x}_{n,j})$, маємо

$$\begin{aligned}|S(g,\hat{\lambda}_n, \{\mathbf{x}_{n,j}\}_{j=1}^{l_n}) - S(f, \lambda, \{\mathbf{y}_{n,j}\}_{j=1}^{l_n})| &= |\sum_{j=1}^{l_n} g(\mathbf{x}_{n,j})\mu q_{n,j} - \sum_{j=1}^{l_n} f(\mathbf{y}_{n,j})\mu\varphi(q_{n,j})| \\ = |\sum_{j=1}^{l_n} f(\mathbf{y}_{n,j})\left(|\varphi'(\mathbf{x}_{n,j})|\mu q_{n,j} - \mu\varphi(q_{n,j})\right)| &\leq Mc(m)L^{m-1}\omega\left(\frac{\sqrt{m}}{2^n}, \varphi', F\right)\sum_{j=1}^{l_n}\mu q_{n,j} \\ = Mc(m)L^{m-1}\omega\left(\frac{\sqrt{m}}{2^n}, \varphi', F\right)\mu F =: \alpha_n \to 0 \qquad n \to \infty,\end{aligned}$$

де $M := M(f, \varphi(F)) = \sup_{\mathbf{y}\in\varphi(F)} |f(\mathbf{y})|$. Зокрема,

$$S(g, \hat{\lambda}_n, \{\mathbf{x}_{n,j}\}_{j=1}^{l_n}) \leq S(f, \lambda, \{\mathbf{y}_{n,j}\}_{j=1}^{l_n}) + \alpha_n \leq U(f, \lambda_n) + \alpha_n,$$

звідки

$$U(g, \hat{\lambda}_n) \leq U(f, \lambda_n) + \alpha_n.$$

Отже

$$\overline{\int}_F g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \lim_{n\to\infty} U(g, \hat{\lambda}_n) \leq \lim_{n\to\infty} U(f, \lambda_n) = \int_{\varphi(F)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

де враховано, що $f \in R(\varphi(F)$ та що $\lambda_n \to 0$ і $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогічно,

$$\underline{\int}_F g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq \int_{\varphi(F)} f(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

Для випадку, коли F – елементарна фігура, теорема доведена. Щоб звести загальний випадок до попереднього, досить розглянути яку-небудь зовнішню фігуру $F^{(\hat{n})}$, де число $\hat{n}$ вибране так, щоб $F^{(\hat{n})} \subset G$, і використати властивість адитивності інтеграла, поклавши

$$f^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in F \\ 0 & \mathbf{x} \in F^{(\hat{n})} \setminus F. \end{cases}$$

6.3. **Теорема 2 про заміну змінних кратному інтегралі.** Має місце також

Теорема 6.2 (Про заміну змінних). *Нехай задані відкрита множина $G \subset \mathbb{R}^m$ і допустиме відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$, якобіан якого є обмеженою в G функцією. Якщо обидві множини G та $\varphi(G)$ є вимірними, то, для кожної функції $f \in R(\varphi(G))$,*

$$\exists \int_G f(\varphi(\mathbf{x}))|\varphi'(\mathbf{x})|d\mathbf{x} = \int_{\varphi(\mathbf{G})} f(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \tag{1}$$

Доведення. Позначимо $g(\mathbf{x}) := f(\varphi(\mathbf{x}))|\varphi'(\mathbf{x})|$. Спочатку доведемо, шо $g \in R(G)$. Візьмемо $\epsilon > 0$. За умовою, множина G є вимірною. Тому існує n таке, що

$$\mu(G \setminus G_{(n)}) < \frac{\epsilon}{4M(g, G)}.$$

За умовою, відображення φ є допустимим, отже множина $\varphi(G_{(n)})$ є вимірною як образ вимірної замкненої множини $G_{(n)}$. Оскільки $f \in R(\varphi(G))$, то, за властивістю адитивності інтеграла, $f \in R(\varphi(G_{(n)}))$. Тому теорема 1 зумовлює $g \in R(G_{(n)})$. За критерієм інтегровності 1, існує розбиття $\lambda = \{G_j\}_{j=1}^s$ множини $G_{(n)}$ таке, що

$$U(g, \lambda) - L(g, \lambda) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Поначимо $G_{s+1} := G \setminus G_{(n)}$. Тоді $\lambda^* = \{G_j\}_{j=1}^{s+1}$ є розбиттям множини G, при цьому

$$U(g, \lambda^*) - L(g, \lambda^*) = U(g, \lambda) - L(g, \lambda) + \omega(g, G_{s+1})\mu G_{s+1} < \frac{\epsilon}{2} + 2M(g, G)\mu G_{s+1} < \epsilon.$$

Отже $g \in R(G)$ за критерієм інтегровності 1. Тепер покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\varphi(G_{(n)})) = \mu(\varphi(G)). \tag{2}$$

Візьмемо $\epsilon > 0$. Нехай $E \subset \varphi(G)$ – яка-небудь замкнена вимірна множина, така що

$$\mu(\varphi(G)) - \mu E < \epsilon. \tag{3}$$

Позначимо через F – прообраз множини E, тобто $\varphi(F) = E$. Оскільки відображення φ є гомеоморфізмом, то F є також замкненою множиною. Тому $\exists N : F \subset G_{(N)}$. При всіх $n \geq N$ маємо $F \subset G_{(n)}$, звідки $E \subset \varphi(G_{(n)})$, що, разом з (3), спричиняє (2).

Нарешті доведемо рівність (1). За теоремою 1, при кожному n має місце рівність

$$\int_{G_{(n)}} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\varphi(G_{(n)})} f(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

Тому

$$|\int_G g(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{\varphi(G)} f(\mathbf{y}))d\mathbf{y}| = |\int_{G\setminus G_{(n)}} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{\varphi(G\setminus G_{(n)})} f(\mathbf{y})d\mathbf{y}|$$
$$\leq M(g, G)\mu(G \setminus G_{(n)}) + M(f, \varphi(G))\mu(\varphi(G \setminus G_{(n)})) \to 0, \quad n \to 0. \quad \square$$

6.4. **Полярні, циліндричні та сферичні координати.** Наведемо три приклади.

Приклад 6.1 (Полярні координати). Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ – круг радіуса R з центром в точці $\mathbf{0}$, $P = [0, R] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ – прямокутник. Якщо функція $f \in R(D)$, то

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_P f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)rdrd\alpha. \tag{1}$$

Доведення. Позначимо через $G := P^0$ – внутрішність прямокутника P. Розглянемо відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$, задане рівністю

$$\varphi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} x(r,\alpha) \\ y(r,\alpha) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Це відображення є, очевидно, неперервно диференційовним, модуль його якобіана

$$|\varphi'(r,\alpha)| = |\begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix}| = r$$

є обмеженою функцією. Неважко перевірити, що φ є гомеоморфізмом між G та

$$\varphi(G) = D^0 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}$$

(але не є гомеоморфізмом між P та D!). Отже виконуються умови теореми 2 (але не виконуються умови теореми 1 для множин P та D!). Внаслідок теореми 2, маємо

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{\varphi(G)} f(x,y)dxdy + \int_{\partial(\varphi(G))} f(x,y)dxdy = \int_{\varphi(G)} f(x,y)dxdy$$
$$= \int_G f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)rdrd\alpha = \int_G + \int_{\partial G} = \int_P f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)rdrd\alpha,$$

де врахована властивість адитивності інтеграла. □

Приклад 6.2 (Циліндричні координати). Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ – круг радіуса R з центром в точці $\mathbf{0}$, $C = D \times [0, H] \subset \mathbb{R}^3$ – циліндр, $P = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^3$ – паралелепіпед. Якщо функція $f \in R(C)$, то

$$\int_C f(x,y,z)dxdydz = \int_P f(r\cos\alpha, r\sin\alpha, t)rdrd\alpha dt. \tag{2}$$

Доведення. Позначимо через $G := P^0$ – внутрішність паралелепіпеда P. Розглянемо відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$, задане рівністю

$$\varphi(r,\alpha,t) = \begin{pmatrix} x(r,\alpha,t) \\ y(r,\alpha,t) \\ z(r,\alpha,t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ t \end{pmatrix}.$$

Це відображення є, очевидно, неперервно диференційовним, модуль його якобіана

$$|\varphi'(r,\alpha,t)| = |\begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & r\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = r$$

є обмеженою функцією. Неважко перевірити, що φ є гомеоморфізмом між G та

$$\varphi(G) = C^0 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$$

(але не є гомеоморфізмом між P та C!). Отже виконуються умови теореми 2 (але не виконуються умови теореми 1 для множин P та C!). Тепер (2) випливає з рівностей

$$\int_{\varphi(G)} f(x,y,z)dxdydz = \int_G f(r\cos\alpha, r\sin\alpha, t)rdrd\alpha dt,$$

$P = G \cup \partial G$, $C = \varphi(G) \cup \partial(\varphi(G))$ та властивості адитивності інтеграла. □

Приклад 6.3 (Сферичні координати). Нехай $B \subset \mathbb{R}^3$ – куля радіуса R з центром в нулі, $P = [0,R] \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}^3$ – паралелепіпед. Якщо функція $f \in R(B)$, то

$$(3) \qquad \int_B f(x,y,z)dxdydz = \int_P f(r\cos\alpha\cos\beta, r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\beta)r^2\cos\beta drd\alpha d\beta.$$

Доведення. Позначимо через $G := P^0$ – внутрішність паралелепіпеда P. Розглянемо відображення $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$, задане рівністю

$$\varphi(r,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} x(r,\alpha,\beta) \\ y(r,\alpha,\beta) \\ z(r,\alpha,\beta) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\beta \\ r\sin\alpha\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix}.$$

Це відображення є, очевидно, неперервно диференційовним, модуль його якобіана

$$|\varphi'(r,\alpha,\beta)| = |\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\cos\beta & -r\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & r\cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{vmatrix}| = r^2\cos\beta$$

є обмеженою функцією. Неважко перевірити, що φ є гомеоморфізмом між G та

$$\varphi(G) = B^0 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$$

(але не є гомеоморфізмом між P та B!). Отже виконуються умови теореми 2 (але не виконуються умови теореми 1 для множин P та B!). Тепер (3) випливає з рівностей

$$\int_{\varphi(G)} f(x,y,z)dxdydz = \int_G f(r\cos\alpha\cos\beta, r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\beta)r^2\cos\beta drd\alpha d\beta,$$

$P = G \cup \partial G$, $B = \varphi(G) \cup \partial(\varphi(G))$ та властивості адитивності інтеграла. □

7. Невласні кратні інтеграли

Див. [1], стор. 182-189.

Література

[1] А. Я. Дороговцев, Математичний аналіз, частина 2// // Київ: Либідь, 1994.

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01033, Україна (shevchuk@univ.kiev.ua).