Застосування теорії аналітичних функцій в задачах механіки

методичний посібник
для студентів спеціалізації "механіка"
механіко-математичний факультет

доц. Зражевський Г.М.

УДК 539

Рецензенти

доктор фіз.-мат. наук, професор **Карнаухов В.Г.**, кандидат фіз.-мат. наук, доцент **П'ятецький В.О.**

Застосування теорії аналітичних функцій в задачах механіки. Навчальний посібник (електронна версія). **Зражевський Г.М.** Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ 2005 - 61 с.: іл. 12, Бібліогр.: с.59

В навчальному посібнику викладено основні питання курсу "Застосування теорії аналітичних функцій в задачах механіки", що викладається студентам 4 курсу спеціалізації "механіка"на механіко-математичному факультеті Київський національний університет імені Тараса Шевченка. В основі курсу лежать останні досягнення практичного використання теорії аналітичних функцій при розв'язанні задач акустики та механіки руйнування. Посібник включає необхідні відомості з курсів "Теорія функцій комплексної змінної", "Операційний аналіз"та "Функціональний аналіз". Передбачається також, що читач знайомий з основними положеннями і методами математичної фізики, акустики та теорії пружності. За базовий математичний апарат обрано метод задачі Рімана-Гільберта, що дозволило системно викласти ряд математичних методів, що опираються на теорію сингулярних інтегральних рівнянь та теорію інтегральних рівнянь типу згортки. Викладені методи застосовуються до розв'язання конкретних задач механіки. Посібник буде корисним для студентів старших курсів та аспірантів природничих факультетів з поглибленим вивченням вищої математики.

Посібник затверджено до друку (в вигляді електронної версії) на засіданні кафедри Теоретичної і прикладної механіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
Протокол N 8 від 3.06.2005

1 Перетворення Фур'є. Аналітичне продовження інтегралів Фур'є.

1.1 Загальні означення та теореми.

Означення 1 *Інтегралом Фур'є від функції $f(t)$ називається функція змінної x:*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1.1}$$

Функції $f(t)$ та $F(x)$ зв'язані між собою формулою обернення:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-ixt}dt, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1.2}$$

$f(t)$ будемо називати **оригіналом**, *$F(x)$ –* **зображенням**.

Означення 2 *Якщо існує $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ в розумінні Лебега, то $f(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$, тобто $f(t)$ належить до класу L_2.*

Теорема 1 *Якщо оригінал $f(t)$ належить до класу $L_2(-\infty, +\infty)$, то зображення $F(t)$ також належить цьому класу і навпаки.*

Таким чином, клас L_2 є інваріантним відносно перетворення Фур'є.

Оператор, що ставить у відповідність функції $f(t)$ її інтеграл Фур'є назвемо перетворенням Фур'є та позначимо V, тобто

$$Vf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt = F(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1.3}$$

З теореми (1) слідує, що оператор V діє з простору L_2 в простір L_2. Очевидно, що V - лінійний оператор, для будь-яких α, $\beta = \text{const}$:

$$V(\alpha f + \beta g) = \alpha V f + \beta V g. \tag{1.4}$$

Формула (1.2) визначає обернений оператор V^{-1}:

$$(V^{-1}F)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-ixt}dx = f(t). \tag{1.5}$$

Формула (1.5) називається формулою обернення.

Для більшості практичних задач задання простору L_2 не є зручним.

Означення 3 *Функція $F(x)$ задовольняє умові Гьольдера (клас H) на $(-\infty, +\infty)$, якщо $\exists\, A$, $\lambda = \text{const}$, та $0 < \lambda \leq 1$ так, що для $\forall x_1, x_2 : |x_1|, |x_2| < 1$, $|F(x_1) - F(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\lambda$, та для $\forall x_1, x_2 : |x_1|, |x_2| > 1$: $|F(x_1) - F(x_2)| \leq A|1/x_1 - 1/x_2|^\lambda$.*

Таким чином, візьмемо за базовий клас зображень функції, що належать до L_2 та задовольняють умові Гьольдера. Базовим класом оригіналів в цьому випадку буде клас функцій, таких, що їх зображення належать до вказаного класу.

Означення 4 *Інтеграл*

$$L(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)ds \equiv f * g \tag{1.6}$$

називається згорткою функцій $f(t)$ та $g(t)$.

Теорема 2 *Перетворення Фур'є згортки функцій дорівнює добутку інтегралів Фур'є цих функцій, обернене перетворення добутку зображень дорівнює згортці оригіналів. Тобто*

$$V(f*g) = FG, \quad V^{-1}(FG) = f*g. \tag{1.7}$$

Лема 1 (Жордана) *Якщо функція $Q(z)$ в верхній півплощині та на дійсній вісі рівномірно прямує до нуля при $z \to \infty$, а C_R – півколо в верхній півплощині з центром в початку координат та радіусом R, то при $\tau > 0$:*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} Q(z) e^{i\tau z} dz = 0 \tag{1.8}$$

Аналогічне співвідношення для $\tau < 0$ має також місце, якщо C_R лежить в нижній півплощині.

Спираючись на лему Жордана, спробуємо продовжити перетворення Фур'є на комплексну площину.

Розглянемо інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\tau}}{t-z} dt, \tag{1.9}$$

де τ – дійсне, а z – комплексне числа. Застосовуючи лему Жордана та теорему про лишки, маємо для $\tau > 0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\tau}}{t-z} dt = \begin{cases} e^{iz\tau}, & \Im z > 0 \\ 0, & \Im z < 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

та для $\tau < 0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\tau}}{t-z} dt = \begin{cases} 0, & \Im z > 0 \\ -e^{iz\tau}, & \Im z < 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

1.2 Зв'язок інтегралу Фур'є з інтегралом типу Коші.

Означення 5 *Якщо $F(\tau)$ – інтегрована на контурі L, то інтеграл*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

називається **інтегралом типу Коші**. *Він визначає функцію, аналітичну в площині з розрізом по контуру L.*

Якщо L замкнена, інтеграл буде функцією, аналітичною в кожній зв'язній частині площини, обмеженої L.

Для випадку прямої:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} F^+(z), & \Im z > 0 \\ F^-(z), & \Im z < 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Граничні значення $F^{\pm}(z)$ на дійсній вісі візначаються формулами Сохоцького –Плємєля:

$$F^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{1.13}$$

де останній особливий інтеграл береться в розумінні головного значення. Таким чином:

$$F^+(x) - F^-(x) = F(x), \quad F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - x} d\tau. \tag{1.14}$$

Замінимо в (1.1) дійсній параметр x на комплексний z:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp^{izt} dt, \tag{1.15}$$

Цей інтеграл згідно з теоремами комплексного аналізу визначає аналітичну функцію в тій області комплексної площини $z = x + iy$, де (1.15) абсолютно збігається.

Спробуємо визначити аналітичне продовження інтегралу (1.1) за допомогою інтегралу типу Коші:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau - z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\tau t} dt = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t) dt \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau t}}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) dt \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau t}}{\tau - z} d\tau.\end{gathered} \tag{1.16}$$

Розглянемо випадки:

1. $\Im z > 0$. Базуючись на (1.10) маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{izt} dt, \quad \Im z > 0. \tag{1.17}$$

2. $\Im z < 0$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{izt} dt, \quad \Im z < 0. \tag{1.18}$$

Означення 6 *Інтеграли комплексного параметру z*

$$F^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{izt} dt, \quad F^-(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{izt} dt \tag{1.19}$$

назвемо, відповідно, **правим** *та* **лівим одностороннім інтегралами Фур'є**.

Введемо в розгляд також функції:

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad f_-(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ -f(t), & t < 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Назвемо їх **правою** та **лівою односторонніми функціями** відповідно. Очевидно, що $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$.

Теорема 3 *інтеграли Фур'є правої та лівої односторонніх функцій є крайовими значеннями функцій, аналітичних в верхній та нижній півплощинах відповідно.*

2 Крайова задача Рімана.

Нехай є простий, достатньо гладкий замкнений контур L, що ділить комплексну площину на внутрішню область D^+ та зовнішню D^-, та дві функції точок контуру $G(t)$ та $g(t)$, що задовольняють умові Гьольдера та належать класу L_2. Нехай при цьому $G(t)$ не обертається на L в нуль.

Задача Рімана. Знайти дві функції $\Phi^+(z)$ – аналітичну в D^+ та $\Phi^-(z)$ – аналітичну в D^-, що задовільняють на L лінійне співвідношення:

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t) + g(t), \quad \text{та додаткову умову} \quad \phi^-(\infty) = C. \tag{2.1}$$

Якщо $g(t) \equiv 0$, задача називається **однорідною**, інакше – **неоднорідною**. $G(t)$ –**коефіцієнт задачі**, $g(t)$ – **вільний член**.

2.1 Задача про стрибок.

Ця задача є частинним випадком однорідної задачі Рімана для випадку, коли коефіцієнт дорівнює 1:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \phi(t), \tag{2.2}$$

де $\phi(t)$ – задана функція.

Ця задача для $\phi(t) \in H$ має елементарний розв'язок, що грунтується на властивості інтегралу типу Коші:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{2.3}$$

$\Phi(z)$ – кусково–аналітична в D функція, що задовільняє (2.2). Окрім того, розв'язок (2.3) задовільняє додаткову умову $\Phi^-(\infty) = 0$.

2.2 Канонічна функція. індекс задачі.

Означення 7 **Індексом** *κ функції $G(t)$ на контурі L називається поділена на 2π зміна аргументу при обході кривої L в додатньому напрямку:*

$$\kappa = \mathrm{Ind}\, G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \tag{2.4}$$

Оскільки $\ln G(t) = \ln |G(t)| + i \arg G(t)$, то

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i}\, [\ln G(t)]_L \tag{2.5}$$

Вкажемо декілька властивостей індекса.

1. Індекс функції, неперервної на замкненому контурі та такої, що вона не обертається в нуль на контурі, є ціле число чи нуль.

2. Індекс добутку функцій дорівнює сумі індексів співмножників. індекс відношення дорівнює різниці індексів діленого та дільника.

3. Якщо $G(t)$ – граничне значення функції, аналітичної всередині чи ззовні контуру, то її індекс дорівнює числу нулів всередині контуру, або числу нулів поза контуром зі знаком мінус.

4. Якщо $G(t)$ – аналітична всередині контуру, за виключенням скінченного числа точок, де вона може мати полюси, то індекс дорівнює різниці числа нулів та числа полюсів.

Розв'язок задачі Рімана почнемо з знаходження допоміжної (канонічної) функції.

Нехай N_+, N_- – число нулів шуканих функцій в D^+, D^- відповідно. Оскільки Φ^+, Φ^- граничні значення аналітичних в D^+, D^- функцій, то, очевидно, для однорідної задачі

$$\mathrm{Ind}\, \Phi^+ = \mathrm{Ind}\, (\Phi^- G) = \mathrm{Ind}\, \Phi^- + \mathrm{Ind}\, G. \tag{2.6}$$

Звідси, очевидно, маємо:

$$N_+ + N_- = \mathrm{Ind}\, G(t) = \kappa. \tag{2.7}$$

індекс $G(t)$, κ будемо називати **індексом задачі**.

Нехай $\kappa = 0$, тоді $\ln G(t)$ буде однозначною функцією на L та $N^+ = N^- = 0$ і Φ^+, Φ^- не обераються в нуль в усій площині. Прі цьому функції $\ln \Phi^{\pm}(z)$ будуть аналітичними в своїх областях, а отже, однозначними разом зі своїми граничними значеннями $\ln \Phi^{\pm}(t)$. Тоді з (2.1) маємо:

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t), \tag{2.8}$$

де вибір гілки $\ln G(t)$ не має значення.

(2.8) є задача про стрибок, що має елементарний розв'язок:

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \equiv \Gamma(z). \tag{2.9}$$

Отже

$$\Phi^{\pm}(z) = \exp\left(\Gamma^{\pm}(z)\right), \quad \Gamma^{\pm}(z) = \Gamma(z), \quad \Im z > 0, \quad (\Im z < 0). \tag{2.10}$$

Додаткова умова, що виконується автоматично, може бути записана у вигляді:

$$\ln \Phi(z) \to 0, \text{ якщо } z \to \infty, \text{ або } \Phi^{-}(\infty) = 1. \tag{2.11}$$

Якщо накласти умову $\Phi^{-}(\infty) = A$, то розв'язок можна записати у вигляді:

$$\Phi^{\pm}(z) = A \exp\left(\Gamma^{\pm}(z)\right). \tag{2.12}$$

Якщо $\Phi^{-}(\infty) = 0$, то $A = 0$ і однорідна задача має лише тривіальний розв'язок. Звідси маємо важливий наслідок:

Довільну функцію $G(t) \neq 0$, що задовільняє умові Гьольдера з нульовим індексом можна представити у вигляді відношення функцій $\Phi^{+}(t)$ та $\Phi^{-}(t)$, що є граничними значеннями функцій, аналітичних в областях D^{+}, D^{-} і таких, що не мають нулів в цих областях. Ці функції визначаються з точністю до довільного множника та даються формулами (2.10).

Методика в цьому випадку наступна.

Нехай $G(t) = \Phi^{+}(t)/\Phi^{-}(t)$, де $G(t)$ відома функція, що задовільняє умовам наслідку. В цьому випадку

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\, \Phi^{-}(t). \tag{2.13}$$

Якщо $\operatorname{Ind} G(t) = 0$, то $\operatorname{Ind} \Phi^{+} - \operatorname{Ind} \Phi^{-} = 0$, або $N_{+} + N_{-} = 0$. Звідси отримуємо:

$$N_{+} = N_{-} = 0, \quad \ln \Phi^{+} = \ln G + \ln \Phi^{-}, \tag{2.14}$$

і, як легко бачити,

$$\ln \Phi^{+} - \ln \Phi^{-} = \ln G, \tag{2.15}$$

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{2.16}$$

$$\Phi(z) = e^{A\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{2.17}$$

Перейдемо тепер до більш загального випадку. Шукаємо кусково-аналітичну функцію, що задовільняє однорідну крайову умову (2.13) та має нульовий порядок на всій площині за виключенням однієї особливої точки, в якій її порядок дорівнює індексу задачі. Такою точкою може бути для випадку цілого індексу полюс порядку $-\kappa$ (якщо κ – від'ємна величина) або нуль порядку κ (для $\kappa > 0$). Положення такої особливої точки не має значення.

Означення 8 **Канонічною функцією** $X(z)$ *назвемо функцію, що задовільняє умову (2.13) та кусково-аналітичну скрізь в площині за виключенням нескінченно віддаленої точки, де її порядок дорівнює індексу задачі.*

Цю функцію можна побудувати шляхом приведення задачі до випадку нульового індексу.

Запишемо (2.13) у вигляді

$$\Phi^+(t) = t^\kappa \, t^{-\kappa} \, G(t) \, \Phi^-(t). \tag{2.18}$$

Очевидно, $t^{-\kappa}G(t)$ має нульовий індекс та виходячи з вищевказаного

$$t^{-\kappa}G(t) = \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}, \quad \text{де} \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln(\tau^{-\kappa}G(\tau))}{\tau - z} d\tau. \tag{2.19}$$

Таким чином,

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)}, \quad \text{та} \quad G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}. \tag{2.20}$$

Очевидно, що при $\kappa > 0$, $X^-(z)$ має на нескінченності нуль порядка κ і отже є частинним розв'язком однорідної задачі. Для $\kappa < 0$ вона має на нескінченності полюс порядку $-\kappa$ і не є розв'язком, але буде використовуватись для розв'язку неоднорідної задачі. Розв'язок однорідної задачі. Нехай $\kappa = \operatorname{Ind} G(t) \in Z$. Користуючись результатами попереднього пункту маємо:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}. \tag{2.21}$$

Ліва частина (2.21) є крайовим значенням функції, що аналітична в D^+, в правій - крайове значення функції, що має на ∞ особливість порядку не нижче $-\kappa$.

Принцип неперервності. *Нехай дві області D_1 і D_2 мають спільну границю вздовж гладкої кривої L. В областях D_1 і D_2 задано аналітичні функції $f_1(z)$, $f_2(z)$. Нехай при прямуванні z до L ці функції прямують до граничних значень, що неперервні на L, та ці граничні значення рівні між собою. При цих умовах функції $f_1(z)$ та $f_2(z)$ є аналітичним продовженням одне одного.*

Таким чином, згідно з принципом неперервності $\Phi^+(t)/X^+(t)$ та $\Phi^-(t)/X^-(t)$ є граничними значеннями на L аналітичної функції в $D^+ \cup D^-$ за виключенням, хіба що, нескінченно віддаленої точки, де для $\kappa > 0$ можливий полюс порядка κ.

Теорема 4 (Узагальнена теорема Ліувілля) *Нехай функція $f(z)$ аналітична в комплексній площині за виключенням точок $f_0 = \infty$, a_k, $k = \overline{1,n}$, де вона має полюси з головними частинами розкладу в околі полюсів виду:*

$$G_0(z) = C_1^0 z + C_2^0 z^2 + \cdots + C_{m_0}^0 z^{m_0} \quad \text{в} \quad a_0 \tag{2.22}$$

та

$$G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) = \frac{C_1^k}{z - a_k} + \frac{C_2^k}{(z - a_k)^2} + \cdots + \frac{C_{m_k}^k}{(z - a_k)^{m_k}} \quad \text{в} \quad a_k. \tag{2.23}$$

Тоді функція $f(z)$ є раціональною функцією та може бути представлена формулою:

$$f(z) = C + G_0(z) + \sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right). \tag{2.24}$$

Згідно з узагальненою теоремою Ліувілля ця єдина аналітична функція є многочленом степіні κ. Якщо $\kappa < 0$, то ця функція дорівнює константі. Але, оскільки на нескінченності вона має обертатись в нуль, ця константа тотожньо рівна нулю. Таким чином, для $\kappa < 0$ однорідна задача має лише тривіальний розв'язок. Для $\kappa \geq 0$ отримаємо розв'язок у вигляді

$$\Phi(z) = P_\kappa(z) \, X(z), \tag{2.25}$$

де $P_\kappa(z)$ – поліном степені κ, а

$$\Phi^+(z) = P_\kappa(z)\, e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = z^{-\kappa}\, P_\kappa(z)\, e^{\Gamma^-(z)}. \tag{2.26}$$

В результаті маємо теорему:

Теорема 5 *Якщо індекс κ задачі Рімана невід'ємний, однорідна задача (2.1) має $\kappa+1$ лінійно-незалежних розв'язків:*

$$\Phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma_+(z)}, \quad \Phi_k^-(z) = z^{k-\kappa} e^{\Gamma_-(z)}, \quad k = \overline{0,\kappa}. \tag{2.27}$$

Загальний розв'язок утримує $\kappa + 1$ довільних констант та визначається формулами (2.26). Для від'ємного індексу задача (2.1) не має нетривіального розв'язку.

2.3 Розв'язок неоднорідної задачі.

Замінивши в (2.1) коефіцієнт $G(t)$ відношенням граничних значень канонічної функції ($G(t) = X^+(t)/X^-(t)$) матимемо:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)} \tag{2.28}$$

Згідно умові $g(t)/X^+(t)$ має задовільняти умові Гьольдера. Розв'язавши задачу про стрибок з густиною $g(t)/X^+(t)$, тобто:

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \psi^+(t) - \psi^-(t), \tag{2.29}$$

де

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{2.30}$$

запишемо (2.28) у вигляді:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t). \tag{2.31}$$

Для $\kappa \geq 0$ функція $\Phi^-(z)/X^-(z)$ має на нескінченності полюс, а при $\kappa < 0$ – нуль порядка κ.

Міркуючи абсолютно аналогічно попередньому, маємо:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t) = P_\kappa(t). \tag{2.32}$$

Розв'язок має вигляд:

$$\Phi(z) = X(z)\,[\psi(z) + P_\kappa(z)], \tag{2.33}$$

де $\psi(z)$ та $X(z)$ визначаються формулами (2.31) та (2.20), а $P_\kappa(z)$ – многочлен степені κ з довільними коефіцієнтами.

Для $\kappa < 0$, $\Phi^-(z)/X^-(z)$ дорівнює 0 на нескінченності та

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t) = 0, \quad \text{або} \tag{2.34}$$

$$\Phi(z) = \psi(z)\, X(z). \tag{2.35}$$

Таким чином, маємо теорему:

Теорема 6 *Для $\kappa \geq 0$ неоднорідна задача Рімана має нетривіальний розв'язок для будь-якого вільного члена. Загальний розв'язок визначається формулою:*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)\ P_\kappa(z), \tag{2.36}$$

де канонічна функція $X(z)$ визначена як:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-\kappa}\ \Gamma^-(z), \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\kappa}\ G(\tau)]}{\tau - z} d\tau, \tag{2.37}$$

а $P_\kappa(z)$ – поліном порядку κ з доаільними комплексними коефіцієнтами.

Для $\kappa = -1$ неоднорідна задача має єдиний розв'язок.

Для $\kappa < -1$ неоднорідна задача, взагалі кажучи, не має розв'язку. Для наявності розв'язку необхідно і достатньо, щоб вільний член задачі задовільняв $-\kappa - 1$ умовам. В цьому випадку єдиний розв'язок існує і дається тією ж формулою, якщо покласти $P_\kappa(z) \equiv 0$.

Розглянемо **додаткові умови**.

Розв'язок задачі дається формулою:

$$\Phi(z) = \psi(z)\ X(z). \tag{2.38}$$

Для $\Phi^-(z)$:

$$X^-(z) = z^{-\kappa}\ e^{\Gamma^-(z)}. \tag{2.39}$$

$X(z)$ має на нескінченності полюс порядка $-\kappa$, а $\psi(z)$, як інтеграл типа Коші:
$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}$, має на нескінченності нуль 1-го порядку. Таким чином, $\Phi^-(z)$ має на нескінченності полюс порядку не вище, ніж $-\kappa - 1$. Отже, для $-\kappa - 1 > 0$, тобто $\kappa < -1$, обмежений на нескінченності розв'язок не існує. Для існування розв'язку $g(t)$ має задовільняти деяким умовам.

Нехай в околі нескінченності має місце розклад:

$$\psi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\ z^{-k}, \quad \text{де} \quad C_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1}\ d\tau. \tag{2.40}$$

Оскільки:

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{z}\ \frac{1}{(\tau/z) - 1} = -\frac{1}{z}\ \left(1 + \left(\frac{\tau}{z}\right) + \dots\right) = -\frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{z}\right)^{k-1},$$

для $\psi^-(z)$ маємо:

$$\psi^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1}\ d\tau, \quad z \in D^-. \tag{2.41}$$

Для аналітичності $\psi^-(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки треба, щоб перші $-\kappa - 1$ коефіцієнти розкладу були рівні нулеві, тобто мають задовольнятись $-\kappa - 1$ умови:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\ \tau^{k-1}\ d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, -\kappa - 1. \tag{2.42}$$

Таким чином, розв'язок задачі Рімана зводиться до 2 головних операцій:

– представлення довільної функції на контурі у вигляді різниці крайових значень функцій, що аналітичні в областях D^+ та D^- (задача про стрибок),

– представлення функції, що не обертається в нуль на контурі у вигляді відношення крайових значень аналітичних функцій (факторизація).

Остання операція зводиться до першої шляхом логарифмування.
Перша проблема рівносильна підрахуванню інтегралу типу Коші.

Розглянемо простий приклад.

2.4 Крайова задача Рімана з раціональним коефіцієнтом.

Розв'яжемо крайову задачу Рімана:

$$\Phi^+(t) = \frac{p(t)}{q(t)}\,\Phi^-(t) + g(t), \tag{2.43}$$

де $G(t) = p(t)/q(t)$ – раціональна функція, що не має нулів та полюсів на L.

Запишемо многочлени $p(z)$, $q(z)$ у вигляді:

$$p(z) = p_+(z)\,p_-(z), \quad q(z) = q_+(z)\,q_-(z), \tag{2.44}$$

де $p_+(z)$, $q_+(z)$ поліноми, що мають нулі в D_+, а поліноми $p_-(z)$, $q_-(z)$ мають нулі в D_-.

Очевидно, що $\kappa = m_+ - n_+$, де m_+ та n_+ числа нулів многочленів $p_+(t)$ та $q_+(t)$. Тоді (2.43) представляється у вигляді:

$$\frac{q_-(t)}{p_-(t)}\,\Phi^+(t) - \frac{p_+(t)}{q_+(t)}\,\Phi^-(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)}\,g(t). \tag{2.45}$$

Розв'язок буде елементарним:

$$\Phi^+(z) = \frac{p_-(z)}{q_-(z)}\,[\psi(z) + P_{\kappa-1}(z)], \quad \Phi^-(z) = \frac{q_+(z)}{p_+(z)}\,[\psi(z) + P_{\kappa-1}(z)], \tag{2.46}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\,g(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau - z}, \quad \Phi^-(\infty) = 0. \tag{2.47}$$

Якщо $\kappa < 0$, то $P_{\kappa-1} \equiv 0$, та необхідно виконання додаткових умов:

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\,g(\tau)\,\tau^{k-1}d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, -\kappa). \tag{2.48}$$

Розглянемо наступний важливий приклад.

2.5 Задача Рімана для півплощини.

Нехай контуром L є дійсна вісь. Як і раніше, задача Рімана полягає в тому, щоб знайти дві обмежені аналітичні в верхній та нижній півплощинах функції $\Phi^+(z)$ та $\Phi^-(z)$, граничні значення яких на контурі задовільняють крайовій умові:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{2.49}$$

де $G(t)$ та $g(t)$ задовільняють умову Гьольдера на всьому контурі (в тому числі і на ∞). Вважаємо також, що $G(t) \neq 0$.

Розв'язок будемо будувати згідно з проведеною схемою.

Розглянемо допоміжну функцію

$$r(t) = \frac{t-i}{t+i}. \tag{2.50}$$

Індекс цієї функції, очевидно, дорівнює:

$$\operatorname{Ind} r(t) = \frac{1}{2} \arg \frac{t-i}{t+i}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2} \arg \frac{(t-i)^2}{t^2+1}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1. \tag{2.51}$$

Продемонструємо це. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} &t^2+1 = (t^2+1)e^{i0}, \\ &(t-i)^2 = t^2 - 2ti - 1 = \sqrt{(t^2-1)^2+4t^2}\ \exp\left(i \arctan\left(-\frac{2t}{t^2-1}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.52}$$

тобто

$$\arg \frac{(t-i)^2}{t^2+1} = -\arctan \frac{2t}{t^2-1} \to (-1)(\mp 0) = \pm 0 \quad \text{при} \quad t \to \mp\infty. \tag{2.53}$$

Таким чином, функція

$$X(t) = G(t) \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa}$$

має індекс 0. Її логарифм на дійсній вісі є однозначною функцією.

Будуємо канонічну функцію:

$$G(t) = \left(G(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa}\right) = \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\kappa} = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}, \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} G(t)\left(\tfrac{t-i}{t+i}\right)^{-\kappa} &= \left(\tfrac{e^{\Gamma^+(z)}}{e^{\Gamma^-(z)}}\right)_{z\to t}, \\ \Gamma^{\pm}(z) &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\left(\tfrac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\kappa} G(\tau)\right] \tfrac{d\tau}{\tau - z}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

і, таким чином,

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+}(z), \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa} e^{\Gamma^-}(z). \tag{2.56}$$

(2.49) в цьому випадку можна записати як:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}. \tag{2.57}$$

Введемо аналітичну функцію:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d(\tau)}{\tau - z}. \tag{2.58}$$

Тоді:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t). \tag{2.59}$$

На відміну від скінченного контура, взагалі кажучи, $\psi^-(\infty) \neq 0$.

Застосовуємо теорему про аналітичне продовження, враховуючи те, що єдиною особливістю може бути лише полюс в точці $z = -i$ порядку не вище за κ (для $\kappa > 0$), з узагальненої теореми Ліувілля маємо:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t) = \frac{P_\kappa(t)}{(t+i)^\kappa}, \quad \kappa > 0, \tag{2.60}$$

де $P_\kappa(t)$ – поліном порядку κ з довільними коефіцієнтами.

Таким чином, загальний розв'язок задачі дається формулами:

$$\begin{cases} \Phi(z) = & X(z)\ \left[\Psi(z) + \dfrac{P_\kappa(z)}{(z+i)^\kappa}\right], \quad \text{для} \quad \kappa \geq 0 \\ \Phi(z) = & X(z)\ [\Psi(z) + C], \quad \text{для} \quad \kappa < 0. \end{cases} \tag{2.61}$$

Розглянемо умову існування розв'язку:

$$\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} = \Phi^-(z)\ \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^\kappa\ e^{-\Gamma^-(z)}. \tag{2.62}$$

Якщо $\kappa < 0$, то в точці $z = -i$ вираз (2.62) має нуль порядку $|\kappa|$, отже $P_\kappa(z) \equiv 0$. Але $X^-(t)$ має в $z = -i$ полюс порядку $-\kappa$, тому для наявності обмеженого розв'язку необхідно, щоб $\psi(z) + C_{|z=-i} = 0$. Причому, $\psi(z) + C$ має мати в точці $z = -i$ нуль порядку κ. Отже, необхідно, щоб

$$\text{C}= \psi(-i), \quad \text{та} \quad \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^-(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0, \quad k = 2, \cdots, -\kappa. \tag{2.63}$$

Отже, для випадку від'ємного індексу, розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} \Phi(z) = X(z)\ [\Psi(z) + \Psi(-i)] \quad , \quad \text{при умові} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0, \qquad k = 2, \cdots, -\kappa. \end{cases} \tag{2.64}$$

Таким чином, маємо теорему:

Теорема 7 *Для $\kappa \geq 0$ однорідна та неоднорідна задачі Рімана для півплощини мають розв'язок, що залежить від $\kappa + 1$ довільних констант (2.61). Для $\kappa < 0$ однорідна задача нетривіального розв'язку не має. Неоднорідна задача в цьому випадку для $\kappa = -1$ має єдиний розв'язок, для $\kappa < -1$ має єдиний розв'язок (2.64) при виконанні $-\kappa - 1$ дотаткових умов (2.64).*

Нехай при розв'язанні задачі Рімана ми накладаємо більш жорстку умову: $\Phi^+(\infty) = \Phi^-(\infty) = 0$ замість простої обмеженості. Очевидно, при цьому має бути $g(\infty) = 0$. В цьому випадку необхідно взяти в (2.61) $P_{\kappa-1}(z)$ замість $P_\kappa(z)$, та покласти $C \equiv 0$. Додаткові умови (2.64) для $\kappa < 0$ мають бути тими ж, за виключенням області зміни k: $k = 1, \cdots, -\kappa$.

2.6 Деяке узагальнення краєвої задачі Рімана.

До цього моменту ми вважали, що $G(t)$ – коефіцієнт задачі задовільняє умову Гьольдера (що виключало можливість прямування до нескінченності), та ніде не обертається в нуль. Відмовившись від цих обмежень, вважаємо, що $G(t)$ в окремих точках може обертатись в нуль чи нескінченність цілих порядків.

Розглянемо **однорідну задачу.**

Нехай

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}\ G_1(t)\ \Phi^-(t), \tag{2.65}$$

де α_k, $(k = \overline{1,\mu})$, β_j, $(j = \overline{1,\nu})$ – деякі точки контуру, m_k, p_j – додатні цілі числа, $G_1(t)$ задовільняє умову Гьольдера та не обертається в нуль. α_k – нулі $G(t)$, β_j – полюси $G(t)$.

Позначимо

$$\text{Ind}\, G_1(t) = \kappa, \quad \sum_{k=1}^{\mu} m_k = m, \quad \sum_{j=1}^{\nu} p_j = p. \tag{2.66}$$

Розв'язок будемо шукати в класі функцій, обмежених на контурі.

Нехай $X(z)$ – канонічна функція задачі Рімана з коефіцієнтом $G_1(t)$. Тоді для $G_1(t) = X^+(t)/X^-(t)$ маємо:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}. \tag{2.67}$$

Застосовуємо до (2.67) теорему про аналітичне продовження та узагальнену теорему Ліувілля. Точки α_k та β_i не можуть бути особливими точками єдиної аналітичної функції, оскільки це протирічило б обмеженості $\Phi^+(t)$ та $\Phi^-(t)$. Отже, єдиною можливою особливістю є нескінченно віддалена точка. Порядок на нескінченності $X^-(z)$ є κ, а порядок $\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}$ дорівнює $-p$. Отже, порядок правої частини (2.67) на нескінченності є $p-\kappa$. Для $\kappa - p \geq 0$ відповідно до теореми Ліувілля маємо:

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)\ \prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}} = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)\ \prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}} = P_{\kappa-p}(z). \tag{2.68}$$

Звідси:

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = & X^+(z)\ \prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}\ P_{\kappa-p}(z), \\ \Phi^-(z) = & X^-(z)\ \prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}\ P_{\kappa-p}(z). \end{cases} \tag{2.69}$$

Для $\kappa - p < 0$ необхідно покласти $P_{\kappa-p} \equiv 0$, отже нетривіального розв'язку немає.

Назвемо крайову задачу з коефіцієнтом G_1 **приведеною задачею**, індекс κ приведеної задачі будемо називати також індексом даної задачі. Таким чином, число незалежних обмежених на контурі розв'язків задачі не залежить від числа нулів коефіцієнта на контурі та зменшується на кількість полюсів коефіцієнта. В частинному випадку, якщо кількість полюсів більше індексу задачі, вона не має нетривіального розв'язку.

Неоднорідна задача.

Нехай задача має вигляд

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}\ G_t\ \Phi^-(t) + g(t). \tag{2.70}$$

Очевидно, ця задача не може бути розв'язана в просторі обмежених функцій, якщо тільки $g(t)$ має полюси в точках відмінних від β_j, або порядок полюсів в цих точках перевищує p_j.

Нехай ця умова забезпечена. Нехай, окрім того, функції $G_1(t)$ та $\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\ g(t)$ в цих особливих точках достатню кількість разів диференційовні.

Перепишемо (2.70) з застосуванням канонічної функції $X(z)$ для $G_1(t)$ у вигляді:

$$\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\frac{g(t)}{X^+(t)}. \tag{2.71}$$

Функція $\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\ g(t)/X^+(t)$ інтегровна. Замінивши її різницею граничних значень аналітичних функцій

$$\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\frac{g(t)}{X^+(t)} = \psi^+(t) - \psi^-(t), \tag{2.72}$$

де

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau-z)}d\tau, \tag{2.73}$$

будемо мати:

$$\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}-\psi^+(t)=\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}-\psi^-(t). \tag{2.74}$$

Застосовуючи теорему про аналітичне продовження та узагальнену терему Ліувілля, отримуємо:

$$\begin{cases} \Phi^+(z)= & \dfrac{X^+(z)}{\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}}[\psi^+(z)+P_{\kappa+m}(z)] \\ \Phi^-(z)= & \dfrac{X^-(z)}{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}[\psi^-(z)+P_{\kappa+m}(z)]. \end{cases} \tag{2.75}$$

Це слідує з того, що $X^-(t)$ має на нескінченності порядок κ, а $\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}$ – порядок m. Отже права частина (2.74) має порядок $\kappa+m$. Формули (2.75), взагалі кажучи, обертаються в нескінченність в точках α_k та β_j. Для обмеженості розв'язку необхідно, щоб $\psi^+(z)+P_{\kappa+m}(z)$ мала нулі порядків p_j в β_j, а $\psi^-(z)+P_{\kappa+m}(z)$ – нулі порядків m_k в α_k. Ця умова накладає $m+p$ обмежень на коефіцієнти поліному $P_{\kappa+m}(z)$.

3 Сингулярні інтегральні рівняння з ядром Коші.

Лінійне інтегральне рівняння

$$\varphi(t)+\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t) \tag{3.1}$$

з ядром виду:

$$K(t,\tau)=\frac{M(t,\tau)}{(\tau-t)^{\alpha}},\quad 0\le\alpha<1$$

називається **рівнянням Фредгольма**.

Для випадку $\alpha=1$ рівняння:

$$K\varphi\equiv a(t)\,\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{M(t,\tau)}{\tau-t}\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t) \tag{3.2}$$

назвемо **інтегральним рівнянням з ядром Коші**. інтеграл в (3.2) береться в розумінні головного значення. Очевидно, ввівши позначення:

$$\begin{cases} M(t,\tau)= & b(t), \\ K(t,\tau)= & \dfrac{1}{\pi i}\dfrac{M(t,\tau)-M(t,t)}{\tau-t}, \end{cases} \tag{3.3}$$

(3.2) можна звести до виду:

$$K\varphi\equiv a(t)\,\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}b(t)\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t). \tag{3.4}$$

Назвемо (3.4) **повним сингулярним інтегральним рівнянням**, вираз $K^0\varphi\equiv a(t)\,\varphi(t)+\dfrac{b(t)}{\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$ – **характеристичною**, а
$K\varphi\equiv\displaystyle\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$ – **регулярною** частиною рівняння.

$$K^0\varphi=f(t) \tag{3.5}$$

назвемо **характеристичним рівнянням**, K^0 – **характеристичним оператором**.

3.1 Зведення характеристичного рівняння до крайової задачі Рімана.

Розглянемо найпростіший тип сингулярного інтегрального рівняння – характеристичний:

$$K^0\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t). \tag{3.6}$$

Розглянемо кусково-аналітичну функцію:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{3.7}$$

Згідно з формулами Сохоцького:

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t), \tag{3.8}$$

і тоді

$$a(t)\,(\Phi^+(t) - \Phi^-(t)) + b(t)\,(\Phi^+(t) + \Phi^-(t)) = f(t), \tag{3.9}$$

або

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \tag{3.10}$$

де

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}. \tag{3.11}$$

Оскільки функція $\Phi(z)$ – інтеграл типу Коші, вона повинна задовольняти умову
$\Phi^-(\infty) = 0$. Індекс κ функції $G(t)$ назвемо індексом інтегрального рівняння (3.6).

Перехід від крайової задачі Рімана до сингулярного інтегрального рівняння є таким. Користуючись (3.8) легко отримати:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) = &\ \frac{1}{2}\left(\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau\right), \\ \Phi^-(t) = &\ \frac{1}{2}\left(-\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau\right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

та

$$\frac{1}{2}(1 + G(t))\,\varphi(t) + \frac{1 - G(t)}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = g(t). \tag{3.13}$$

3.2 Розв'язок характеристичного рівняння.

Нехай $a(t) \pm b(t) \neq 0$. В цьому випадку, використовуючи введену техніку розв'язку крайової задачі Рімана для $\kappa \geq 0$ матимемо:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi^+(t) = &\ X^+(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \psi(t) - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\right], \\ \Phi^-(t) = &\ X^-(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \psi(t) - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\right], \end{aligned} \right. \tag{3.14}$$

де $\psi(t)$ – інтеграл в розумінні головного значення виду:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - t)}\,d\tau,$$

множник при $P_{\kappa-1}$ введено для зручності. Таким чином, розв'язок рівняння (3.6) має вигляд:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{G(t)}\right] g(t) + X^+(t)\left[1 - \frac{1}{G(t)}\right]\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\ \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\right], \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered}\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = X^+(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \psi(t) - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\right] - \\ X^-(t)\left[-\tfrac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \psi(t) - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\right] = \tfrac{1}{2}g(t)\left[1 + \frac{X_-(t)}{X^+(t)}\right] + \\ \left[\psi(t) - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\right] X^+(t)\left[1 - \frac{X_-(t)}{X^+(t)}\right],\end{gathered} \tag{3.16}$$

але

$$\begin{gathered}\frac{X_+(t)}{X^-(t)} = G(t), \quad \text{та} \\ \varphi(t) = \frac{1}{2}g(t)\left[1 + \frac{1}{G(t)}\right] + X^+(t)\left[1 - \frac{1}{G(t)}\right]\left[\psi(t) - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\right].\end{gathered} \tag{3.17}$$

Згадавши введені позначення (3.11), маємо:

$$\begin{gathered}\varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}\left[\frac{a(t)-b(t)+a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}\right] + \\ X^+(t)\left[\frac{a(t)-b(t)-a(t)-b(t)}{a(t)-b(t)}\right]\left[\psi(t) - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\right] = \frac{f(t)a(t)}{a^2(t)-b^2(t)} - \\ \frac{2b(t)}{a(t)-b(t)}X^+(t)\left[\psi(t) - \frac{1}{2}P_{\kappa-1}(t)\right] = \frac{f(t)a(t)}{a^2(t)-b^2(t)} - \\ \frac{b(t)Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}\frac{i}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{z(\tau)}\ \frac{d(\tau)}{\tau - t} + \frac{b(t)Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}\ P_{\kappa-1}(t),\end{gathered} \tag{3.18}$$

або, для $a^2(t) - b^2(t) = 1$ (умова нормування):

$$\begin{cases} Z(t) = X^+(t)[a(t)+b(t)] = G(t)X^-(t)(a(t)+b(t)) = X^-(t)(a(t)-b(t)), \\ X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Gamma^+(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\ln\left[\frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\tau^{-\kappa}\right]}{\tau - z}d\tau, \\ \Gamma^+(t) = \dfrac{1}{2}\ln\left[\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\tau^{-\kappa}\right] + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\ln\left[\frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\tau^{-\kappa}\right]}{\tau - t}dt = \\ \dfrac{1}{2}\ln\left[\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\tau^{-\kappa}\right] + \Gamma(t), \\ X^+(t) = e^{\Gamma^+(t)} = \sqrt{\dfrac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}}\ \dfrac{1}{\sqrt{t^\kappa}}\ e^{\Gamma(t)} = \dfrac{a(t)-b(t)}{\sqrt{t^\kappa}}\ e^{\Gamma(t)} = \\ \dfrac{1}{a(t)+b(t)}\ \dfrac{e^{\Gamma(t)}}{\sqrt{t^\kappa}}, \end{cases} \tag{3.19}$$

або

$$\varphi(t) = a(t)\ f(t) - \frac{b(t)\ Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\ \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)\ Z(t)\ P_{\kappa-1}(t), \tag{3.20}$$

де

$$Z(t) = [a(t)+b(t)]\ X^+(t) = [a(t)-b(t)]\ X^-(t) = \frac{e^{\Gamma(t)}}{\sqrt{t^\kappa}}, \tag{3.21}$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \left[\tau^{-\kappa} \frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\right]}{\tau - t} \, d\tau. \tag{3.22}$$

Для випадку $\kappa < 0$ для існування нетривіального розв'язку задачі Рімана необхідно накласти додаткові умови:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \, \tau^{k-1} \, d\tau = 0, \quad k = 1, \cdots, -\kappa, \tag{3.23}$$

або

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \, \tau^{k-1} \, d\tau = 0, \quad k = 1, \cdots, -\kappa. \tag{3.24}$$

Якщо умови (3.24) виконано, то розв'язок дається формулами (3.20) при умові $P_{\kappa-1}(t) \equiv 0$. Таким чином, сформулюємо основні результати:

1. Для $\kappa > 0$ однорідне характеристичне рівняння має κ лінійно- незалежних розв'яз-
ків.

2. Для $\kappa \leq 0$ однорідне рівняння має лише тривіальний розв'язок.

3. Для $\kappa \geq 0$ неоднорідне рівняння має розв'язок для будь-якої правої частини та утримує κ довільних констант (3.20).

4. Для $\kappa < 0$ неоднорідне рівняння має єдиний розв'язок при виконанні правою частиною κ додаткових умов виду (3.24).

3.3 Повні сингулярні рівняння, що мають замкнений роз в'язок.

Лема 2 *Нехай функція $M(t, \tau)$ задовільняє умові Гьольдера по обом змінним на L та може бути аналітично продовжена в D^+ по кожній змінній. Якщо $M(t,t) \equiv 1$, тоді розв'язок рівняння*

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \, \varphi(\tau) \, d\tau = f(t) \tag{3.25}$$

дається формулою:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \, f(\tau) \, d\tau. \tag{3.26}$$

Лема може бути легко доведена шляхом прямої підстановки (3.26) в (3.25) та застосуванням формули перестановки Пуанкаре–Бертрама.

Формула перестановки Пуанкаре–Бертрана:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \, \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 = \varphi(t,t) + \frac{1}{\pi i} \int_L d\tau_1 \, \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} d\tau. \tag{3.27}$$

Тоді:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau-t}d\tau\ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}f(\tau_1)d\tau_1 = \\
&\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}d\tau \int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\ M(t,\tau)}{\tau_1-\tau}f(\tau_1)d\tau_1 = \\
&M(t,t)\ M(t,t)\ f(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1 \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\ M(t,\tau)\ f(\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\ d\tau = \\
&f(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L f(\tau_1)d\tau \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\ M(t,\tau)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\ d\tau = \\
&f(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau_1)}{\tau_1-t}d\tau_1 \left[\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\ M(t,\tau)}{\tau-t}\ d\tau - \right. \\
&\left. \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\ M(t,\tau)}{\tau-\tau_1}\ d\tau\right].
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Але, якщо $M(t,\tau)$ можна аналітично продовжити в D^+, то

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\ M(t,\tau)}{\tau-t}\ d\tau = M(t,\tau_1)\ M(t,t) = M(t,\tau_1), \\
&\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\ M(t,\tau)}{\tau-\tau_1}\ d\tau = M(\tau,\tau_1)\ M(t,\tau_1) = M(t,\tau_1).
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Таким чином,

$$
\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau-t}d\tau \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\ f(\tau_1)d\tau_1 = f(t).
\tag{3.30}
$$

Розглянемо тепер повне сингулярне інтегральне рівняння (3.2), записавши його у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&a(t)\varphi(t) + \frac{M(t,t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)-M(t,t)}{\tau-t}\varphi(t)d\tau = f(t), \\
&a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau + \int_L K(t,\tau)\ \varphi(\tau)\ d\tau = f(t), \\
&b(t) = M(t,t), \quad K(t,\tau) = \frac{M(t,\tau)-M(t,t)}{\tau-t},
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Покажемо, що (3.31) можна розв'язати в явному вигляді, якщо $a(t)$, $b(t) = \mathrm{const}$, а $M(t,\tau)$ можна аналітично продовжити в D^+ по кожній змінній.

$$
\begin{aligned}
&a\varphi(t) + \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau + \int_L K(t,\tau)\ \varphi(\tau)\ d\tau = f(t), \\
&a\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}(b+\pi i(\tau-t)K(t,\tau))\ d\tau = f(t), \\
&a\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)\ \varphi(\tau)}{\tau-t}\ d\tau = f(t),
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

де $M(t,\tau) = b + \pi i(\tau-t)\ K(t,\tau)$.

В цьому випадку $M(t,t) = b = \mathrm{const}$.

Позначимо:

$$
\psi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau-t}\ \varphi(\tau)\ d\tau.
\tag{3.33}
$$

Згідно з лемою 2, φ записується через ψ таким же чином, як ψ через φ, тобто:

$$
\left\{
\begin{aligned}
a\ \varphi(t) + b\ \psi(t) &= f(t), \\
a\ \psi(t) + b\ \varphi(t) &= g(t).
\end{aligned}
\right.
\tag{3.34}
$$

де $g(t) = \dfrac{1}{b\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{M(t,\tau)}{\tau - t}\, f(\tau)\, d\tau$. Розв'язавши (3.34), маємо:

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[a f(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau - t}\, f(\tau)\, d\tau\right], \tag{3.35}$$

якщо $a \pm b \neq 0$.

3.4 Рівняння на дійсній осі.

Аналогічно попередньому випадку сингулярне інтегральне рівняння

$$a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t), \tag{3.36}$$

з допомогою інтегралу типу Коші:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \tag{3.37}$$

та формул Сохоцького зводиться до задачі Рімана:

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}\,\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}, \quad -\infty < t < +\infty. \tag{3.38}$$

Оскільки ми розв'язуємо інтегральне рівняння побудовою інтегралу типу Коші, ми повинні бути певні, що така побудова є законною. Для цього необхідно, очевидно,щоб

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \tag{3.39}$$

Проаналізуємо цю умову.

Розглянемо інтеграл типу Коші (3.37) та спрямуємо z до нескінченності. Нехай

$$\Phi(z) = \Phi(-\frac{1}{\zeta}) = \Phi^*(\zeta), \quad \varphi(\tau) = \varphi(-\frac{1}{\sigma}) = \varphi^*(\sigma). \tag{3.40}$$

Маємо

$$\Phi^*(\zeta) = \frac{\zeta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^*(\sigma)\, d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^*(\sigma)\, d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^*(\sigma)\, d\sigma}{\sigma}, \tag{3.41}$$

де інтеграли розуміються в головному значенні.

Другий інтеграл в (3.41) не залежить від ζ, тому досить дослідити інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^*(\sigma)\, d\sigma}{\sigma - \zeta}, \tag{3.42}$$

поблизу точки $\zeta = 0$.

Нехай функція $\varphi(\tau)$ задовольняє умову Гьольдера поблизу $\tau = \infty$, тобто $\varphi^*(\sigma)$ задовольняє умову Гьольдера поблизу $\sigma = 0$. Застосовуючи до (3.42) формули Сохоцького, маємо:

$$\begin{gathered}\Phi^+(\infty) = \Phi^*(0) = \tfrac{1}{2}\varphi^*(0) + \tfrac{1}{2\pi i}\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^*(\sigma)\, d\sigma}{\sigma} - \\ \tfrac{1}{2\pi i}\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^*(\sigma)\, d\sigma}{\sigma} = \tfrac{1}{2}\varphi(\infty).\end{gathered} \tag{3.43}$$

Аналогічно, для Φ^-: $\Phi^-(\infty) = -\frac{1}{2}\varphi(\infty)$, отже

$$\Phi^+(\infty) + \Phi^-(\infty) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0. \tag{3.44}$$

Таким чином, повертаючись до інтегрального рівняння, зауважимо, що розв'язок інтегрального рівняння (3.36) буде еквівалентний розв'язку задачі Коші в тому випадку, якщо

$$\Phi^+(\infty) + \Phi^-(\infty) = 0. \tag{3.45}$$

Якщо умова (3.45) виконана, то розв'язок інтегрального рівняння можна відшукати з розв'язку еквівалентної задачі Рімана як

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t). \tag{3.46}$$

Будемо вважати, що $a(t) \pm b(t) \neq 0$ і $a^2(t) - b^2(t) = 1$, та позначимо $\kappa = \mathrm{Ind}\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$. Будемо шукати розв'язок в класі зникаючих на нескінченності функцій. Поклавши в (3.36) $t = \infty$ та враховуючи (3.44) та $\varphi(\infty) = 0$, отримаємо умову $f(\infty) = 0$. З (3.43) слідує, що $\Phi^{\mp}(\infty) = 0$, а отже, умова (3.45) виконується автоматично. Розв'язок задачі (3.38) відомий. Для $\kappa > 0$ він має вигляд:

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = & X^+(z) \left[\Psi^+(z) - \dfrac{1}{2}\dfrac{P_{\kappa-1}(z)}{(z+i)^\kappa}\right], \\ \Phi^-(z) = & X^-(z) \left[\Psi^-(z) - \dfrac{1}{2}\dfrac{P_{\kappa-1}(z)}{(z+i)^\kappa}\right], \end{cases} \tag{3.47}$$

де

$$\begin{gathered} \frac{X^+(t)}{X^-(t)} = G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left[G(\tau)\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^\kappa\right]}{\tau - z} d\tau, \\ g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}, \quad X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\kappa} e^{\Gamma^-(z)}, \\ \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{(\tau - z)X^+(\tau)} d\tau. \end{gathered} \tag{3.48}$$

$$\begin{gathered} \varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = X^+(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \psi(t) - \frac{1}{2}\frac{P_{\kappa-1}(t)}{(t+i)^\kappa}\right] - \\ X^-(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \psi(t) - \frac{1}{2}\frac{P_{\kappa-1}(t)}{(t+i)^\kappa}\right] = \frac{1}{2}g(t)\left[1 + \frac{1}{G(t)}\right] + \\ X^+(t)\psi(t)\left[1 - \tfrac{1}{G(t)}\right] - \frac{1}{2}\frac{P_{\kappa-1}(t)X^+(t)}{(t+i)^\kappa}\left[1 - \frac{1}{G(t)}\right] = \\ g(t)\frac{a(t)}{a(t)-b(t)} - \frac{2\psi(t)X^+(t)b(t)}{a(t)-b(t)} + \frac{P_{\kappa-1}(t)X^+(t)b(t)}{(a(t)-b(t))(t+i)^\kappa}, \\ \psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{(\tau - t)X^+(\tau)} d\tau = \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{(a(\tau)+b(\tau))X^+(\tau)(\tau - t)} d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{z(\tau)(\tau - t)} d\tau, \\ \text{де } z(t) = (a(t)+b(t))\,X^+(t) = (a(t)+b(t))\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}X^-(t) = \\ (a(t)-b(t))\,X^-(t), \\ \varphi(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{z(\tau)(\tau - t)} d\tau + b(t)Z(t)\frac{P_{\kappa-1}(t)}{(t+i)^\kappa}. \end{gathered} \tag{3.49}$$

Для $\kappa \leq 0$ треба покласти $P_{\kappa-1}(t) \equiv 0$ та виконати $-\kappa$ умов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{z(\tau)}\frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\kappa. \tag{3.50}$$

Спробуємо тепер відшукати розв'язки (3.36), що обмежені на нескінченності.

$$\begin{cases} \Phi^+(\infty) = X^+(\infty)\,[\psi^+(\infty) + \frac{1}{2}C], \\ \Phi^-(\infty) = X^-(\infty)\,[\psi^-(\infty) + \frac{1}{2}C], \end{cases} \tag{3.51}$$

де C – коефіцієнт при найстаршому члені поліному $P_\kappa(z)$. Очевидно:

$$\begin{aligned} &\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - z)}d\tau \Rightarrow \\ &\psi^+(\infty) = \frac{1}{2}\frac{g(\infty)}{X^+(\infty)}, \quad \psi^-(\infty) = -\frac{1}{2}\frac{g(\infty)}{X^-(\infty)}, \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{cases} \Phi^+(\infty) = \dfrac{1}{2}g(\infty) + \dfrac{1}{2}C\,X^+(\infty), \\ \Phi^-(\infty) = -\dfrac{1}{2}g(\infty)\,G(\infty) + \dfrac{1}{2}C\,X^-(\infty) = -\dfrac{1}{2}g(\infty) + \dfrac{1}{2}\dfrac{CX^-(\infty)}{G(\infty)}, \end{cases} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} &G(\infty) = \frac{a(\infty) - b(\infty)}{a(\infty) + b(\infty)}, \quad g(\infty) = \frac{f(\infty)}{a(\infty) + b(\infty)}, \\ &X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left[G(\tau)\left(\frac{\tau - i}{\tau + i}\right)^\kappa\right]}{\tau - z}d\tau, \\ &X^+(\infty) = e^{\frac{1}{2}\ln[G(\infty)]} = \sqrt{G(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{(a(\infty) + b(\infty))^2}}, \\ &X^-(\infty) = \frac{1}{a(\infty) + b(\infty)}(a(\infty) + b(\infty))^2, \end{aligned} \tag{3.54}$$

тобто

$$\begin{cases} \Phi^+(\infty) = \dfrac{f(\infty)}{2(a(\infty) + b(\infty))} + \dfrac{C}{a(\infty) + b(\infty)}, \\ \Phi^-(\infty) = -\dfrac{f(\infty)(a(\infty) + b(\infty))}{2} + C(a(\infty) + b(\infty)). \end{cases} \tag{3.55}$$

Тоді

$$\Phi^+(\infty) + \Phi^-(\infty) = 2\,a(\infty)\,C - f(\infty)\,b(\infty)$$

та умова рівносильності інтегрального рівняння крайовій задачі Рімана має вигляд

$$2\,a(\infty)\,C = f(\infty)\,b(\infty). \tag{3.56}$$

Для $\kappa < 0$ розв'язок буде мати вигляд $\Phi(z) = X(z)\,[\psi(z) + C]$, причому $C = -\psi(-i)$, тобто

$$C = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau + i} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau + i}.$$

Вищесказане доводить теорему:

Теорема 8 *Сингулярне рівняння (3.36) та крайова задача Рімана з додатковою умовою (3.56) рівносильні в тому розумінні, що якщо $\Phi(z)$ є загальний розв'язок крайової задачі (3.38) з умовою (3.56), де C – коефіцієнт при головному члені поліному $P_\kappa(z)$ для $\kappa > 0$ та* $C = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{[a(\tau) + b(\tau)]X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau + i}$ *при $\kappa < 0$, то (3.6) є загальним розв'язком (3.36); навпаки, якщо $\varphi(t)$ – загальний розв'язок (3.36), то інтеграл типу Коші $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$ є розв'язком задачі Рімана (3.38), що задовільняє умову (3.56).*

3.5 Регуляризація сингулярного інтегрального рівняння.

Запишемо інтегральне рівняння (3.2) у вигляді (3.4), перенісши регулярний член рівняння в праву частину:

$$a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t)-\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{3.57}$$

Розглянемо це рівняння як характеристичне, вважаючи праву частину відомою функцією. Розв'язок такого рівняння побудовано (3.20):

$$\begin{gathered}\varphi(t)=\left[a(t)\,f(t)-\frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-t}+b(t)\,Z(t)\,P_{\kappa-1}(t)\right]-\\ \left[a(t)\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau-\right.\\ \left.\frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{d\tau_1}{z(\tau_1)\,(\tau_1-t)}\int_L K(\tau_1,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right].\end{gathered} \tag{3.58}$$

Для $\kappa\le 0$ треба покласти $P_{\kappa-1}(t)\equiv 0$. Змінивши порядок інтегрування в останньому члені (3.58), запишемо вираз в квадратних дужках як:

$$\int_L\left[a(t)\,K(t,\tau)-\frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{K(\tau_1,\tau)}{z(\tau_1)(\tau_1-t)}\,d\tau_1\right]\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{3.59}$$

Функція $Z(t)=[a(t)+b(t)]X^+(t)$, тобто, задовільняє умові Гьольдера, а $K(\tau_1,\tau)=\dfrac{1}{\pi i}\dfrac{M(\tau_1,\tau)-M(\tau_1,\tau_1)}{\tau-\tau_1}$ в околі $\tau_1=\tau$ має оцінку:

$$K(\tau_1,\tau)\le\frac{C}{|\tau-\tau_1|^\lambda},\quad 0\le\lambda<1$$

тому $\displaystyle\int_L\frac{K(\tau_1,\tau)}{z(\tau_1)(\tau_1-t)}\,d\tau_1$ має в околі $t=\tau$ ту ж оцінку:

$$\int_L\frac{K(\tau_1,\tau)}{z(\tau_1)(\tau_1-t)}d\tau_1=\int_{L-L_\epsilon}\frac{K(\tau_1,\tau)}{z(\tau_1)(\tau_1-t)}\,d\tau_1+\int_{L_\epsilon}\frac{K(\tau_1,\tau)}{z(\tau_1)(\tau_1-t)}\,d\tau_1. \tag{3.60}$$

Перший інтеграл (3.60) є регулярним. Другий інтеграл можна записати як:

$$\begin{gathered}\int_{L_\epsilon}\frac{K(\tau_1,\tau)}{z(\tau_1)(\tau_1-t)}\,d\tau_1\sim\frac{C}{Z(\tau)}\int_{L_\epsilon}\frac{d\tau_1}{|\tau-\tau_1|^\lambda(\tau_1-t)}=\\ \frac{C}{Z(\tau)}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{d\kappa}{|\kappa|^\lambda((\tau-t)-\kappa)}.\end{gathered} \tag{3.61}$$

Таким чином, ядро

$$K(\tau_1,\tau)=a(t)\,f(t)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{K(\tau_1,\tau)}{z(\tau_1)(\tau_1-t)}\,d\tau_1 \tag{3.62}$$

є ядром Фредгольма. Таким чином, перенісши в (3.58) всі члени, що утримують $\varphi(\tau)$ в ліву частину, матимемо рівняння Фредгольма:

$$\varphi(t)+\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f_1(\tau), \tag{3.63}$$

де $K(t,\tau)$ визначається в (3.62), а

$$f_1(t)=a(t)\,f(t)-\frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-t}+b(t)\,Z(t)\,P_{\kappa-1}(t) \tag{3.64}$$

Якщо $\kappa<0$, то ми маємо покласти $P_{\kappa-1}(t)\equiv 0$ та накласти κ додаткових умов виду:

$$\int_L\left[\int_L\frac{K(t,\tau)}{z(t)}\,t^{k-1}\,dt\right]\varphi(\tau)\,d\tau=\int_L\frac{f(t)}{Z(t)}\,t^{k-1}\,dt,\quad k=1,2,\ldots,-\kappa. \tag{3.65}$$

4 Рівняння типу згортки.

4.1 Інтегральне рівняння з одним ядром.

Розглянемо рівняння:

$$\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \tag{4.1}$$

де $k(t)$ та $f(t)$ – функції, що належать до класу $\{0\}$. Розв'язок, функцію $\varphi(t)$, шукаємо в тому ж класі.

Застосуємо до (4.1) перетворення Фур'є. Згідно з теоремою про згортку, маємо:

$$\Phi(x) + K(x)\,\Phi(x) = F(x). \tag{4.2}$$

Звідси знаходимо єдиний розв'язок:

$$\Phi(x) = [1 + K(x)]^{-1} F(x). \tag{4.3}$$

Згідно з формулою обернення

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + K(x)]^{-1} F(x)\, e^{-ixt} dx, \quad -\infty < t < +\infty \tag{4.4}$$

Якщо ввести функцію $R(x)$ як:

$$1 + R(x) = [1 + K(x)]^{-1}, \tag{4.5}$$

формула (4.3) приведеться до вигляду:

$$\Phi(x) = F(x) + R(x)\,F(x), \tag{4.6}$$

та

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} r(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau. \tag{4.7}$$

Функція $r(t,\tau)$ називається **резольвентою**.

4.2 Інтегральне рівняння з двома ядрами.

Нехай

$$\begin{aligned} &\varphi(t) + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \\ &-\infty < t < +\infty \end{aligned} \tag{4.8}$$

Запишемо шуканий розв'язок у вигляді суперпозиції односторонніх функцій:

$$\varphi(t) = \varphi_+(t) - \varphi_-(t). \tag{4.9}$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\varphi_+(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(t-\tau)\,\varphi_+(\tau)\,d\tau - \varphi_-(t) - \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad -\infty < t < +\infty \end{aligned} \tag{4.10}$$

Переходимо до зображень в рівнянні (4.10):

$$\Phi^+(x) + K_1(x)\,\Phi^+(x) - \Phi^-(x) - K_2(x)\,\Phi^+(x) = F(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{4.11}$$

Згідно з побудованою теорією $\Phi^{\pm}(x)$ є граничними значеннями аналітичних в верхній та нижній півплощинах функцій. Отже

$$\Phi^+(x) = G(x)\,\Phi^-(x) + g(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{4.12}$$

де $G(x) = \dfrac{1+K_2(x)}{1+K_1(x)}$, $g(x) = \dfrac{F(x)}{1+K_1(x)}$. Таким чином, задачу зведено до крайової задачі Рімана з коефіцієнтом $\dfrac{1+K_2(x)}{1+K_1(x)}$ та вільним членом
$\dfrac{F(x)}{1+K_1(x)}$.

Розв'язок задачі (4.12) можна відшукати по формулі:

$$\begin{cases} \Phi(z) = \quad X(z)\,\left[\Psi(z) + \dfrac{P_{\kappa-1}(z)}{(z+i)^{\kappa}}\right], \quad \text{для} \quad \kappa > 0, \\ \Phi(z) = \quad X(z)\,[\Psi(z) + C], \quad \text{для} \quad \kappa < 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Таким чином, розв'язок задачі (4.8) знаходиться як:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi^+(x) - \Phi^-(x)]\, e^{-ixt} dx. \tag{4.14}$$

Відшукання $\Phi^+(x) - \Phi^-(x)$ повністю аналогічно попереднім міркуванням.

4.3 Парні інтегральні рівняння.

Розглдянемо парне інтегральне рівняння виду:

$$\begin{cases} \varphi(t) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad 0 < t < +\infty, \\ \varphi(t) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad -\infty < t < 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Довизначимо в (4.15) праві частини рівнянь деякими невідомими односторонніми функціями $L_+(t)$ та $L_-(t)$. Тобто, нехай

$$\begin{cases} \varphi(t) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t) + L_-(t), \quad -\infty < t < +\infty, \\ \varphi(t) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t) + L_+(t), \quad -\infty < t < +\infty. \end{cases} \tag{4.16}$$

Перейшовши до образів Фур'є, маємо:

$$[1 + K_1(x)]\,\Phi(x) = F(x) + H^-(x), \quad [1 + K_2(x)]\,\Phi(x) = F(x) + H^+(x). \tag{4.17}$$

Невідомими в цих двох рівняннях є три функції $\Phi(x)$, $H^+(x)$, $H^-(x)$. Виключимо функцію $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{F(x) + H^-(x)}{1 + K_1(x)} = \frac{F(x) + H^+(x)}{1 + K_2(x)}. \tag{4.18}$$

Тоді умова крайової задачі Рімана відносно функцій $H^{\pm}(x)$ запишеться як:

$$H^+(x) = \frac{1 + K_2(x)}{1 + K_1(x)} H^-(x) + \frac{K_2(x) - K_1(x)}{1 + K_1(x)} F(x), \tag{4.19}$$

або

$$H^+(x) = G(x)\, H^-(x) + g(x), \tag{4.20}$$

де

$$G(x) = \frac{1 + K_2(x)}{1 + K_1(x)}, \quad g(x) = \frac{K_2(x) - K_1(x)}{1 + K_1(x)} F(x). \tag{4.21}$$

Розв'язок парного рівняння (4.15) знаходиться по правилу:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x) + H^+(x)}{1 + K_1(x)} e^{-ixt} dx = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x) + H^+(x)}{1 + K_2(x)} e^{-ixt} dx, \end{aligned} \tag{4.22}$$

4.4 Одностороннє рівняння (Рівняння Вінера – Хопфа).

В прикладних задачах часто зустрічається рівняння виду:

$$\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} k(t - \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t). \tag{4.23}$$

Це рівняння є визначеним лише на додатній піввісі, тому його називають **одностороннім рівнянням**.

Покладемо ядра рівняння (4.10) та неоднорідний член функціями:

$$k_1(t) = k(t), \quad k_2(t) = 0, \quad f(t) = g_+(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

Повертаючись до рівняння з двома ядрами (4.10) ми помічаємо, що розв'язок (4.23) при накладених умовах (4.24) буде розв'язком (4.23). Навпаки, якщо довизначити в (4.23) функцію $\varphi(t)$ на від'ємній піввісі, будемо мати частинний випадок (4.10). Отже, (4.23) можна розглядати як частинний випадок (4.10). В силу великої практичної цінності (4.23) знайдемо його розв'язок.

Довизначимо функцію $\varphi(t)$ на від'ємній піввісі функцією $\varphi_-(t)$ ($\varphi_+(t) = \varphi(t)$):

$$\varphi_+(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t - \tau)\, \varphi_+(\tau)\, d\tau = \varphi_+(t) + f_+(t). \tag{4.25}$$

Перейшовши до образів Фур'є, маємо:

$$\Phi^+(x) = \frac{1}{1 + K(x)} \Phi^-(x) + \frac{1}{1 + K(x)} F^+(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{4.26}$$

або

$$\Phi^+(x) = G(x)\, \Phi^-(x) + g(x), \tag{4.27}$$

де

$$G(x) = \frac{1}{1 + K(x)}, \quad g(x) = \frac{1}{1 + K(x)}. \tag{4.28}$$

Розв'язок задачі (4.23) знаходиться по формулі обернення:

$$\varphi(t) = \varphi_+(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_+(x)\, e^{-ixt} dx, \quad t > 0.$$

4.5 Зв'язок рівнянь типу згортки з сингулярними інтегральними рівняннями з ядром типу Коші.

Ми встановили, що

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{ixt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{ixt} dt = F^+(x) - F^-(x),$$

або

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - x} d\tau = F^+(x) + F^-(x) = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{ixt} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sign} t\, e^{ixt} dt. \end{gathered} \tag{4.29}$$

Таким чином,

$$V(f(t) \operatorname{sign} t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - x} d\tau, \quad V^{-1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\tau)}{\tau - x} d\tau \right) = \operatorname{sign} t\, f(t). \tag{4.30}$$

Розглянемо рівняння з двома ядрами:

$$\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t-\tau) \operatorname{sign} t\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t). \tag{4.31}$$

Це рівняння, очевидно, еквівалентне (4.8), якщо покласти

$$\alpha(t) + \beta(t) = k_1(t), \quad \alpha(t) - \beta(t) = k_2(t). \tag{4.32}$$

Перейшовши до образів Фур'є матимемо згідно з (4.30):

$$\Phi(x)\,(1 + A(x)) + B(x) \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(\tau)}{\tau - x} d\tau = F(x). \tag{4.33}$$

Рівняння (4.33) є, очевидно, характеристичним сингулярним інтегральним рівнянням. Розв'язок (4.33) можна знайти згідно з вказаною методою. В даному випадку:

$$1 + A(x) \equiv a(x), \quad B(x) \equiv b(x), \quad F(x) \equiv f(x). \tag{4.34}$$

Коефіцієнт еквівалентної задачі Рімана дорівнює

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} = \frac{1 + A(t) - B(t)}{1 + A(t) + B(t)},$$

відповідно індекс задачі

$$\kappa = \operatorname{Ind} \frac{1 + A(t) - B(t)}{1 + A(t) + B(t)}.$$

5 Застосування крайової задачі Рімана для розв'язку задач акустики.

5.1 Задача Зомерфельда.

На півплощину, на якій має виконуватись умова $\partial \varphi_t / \partial t = 0$, падає плоска хвиля:

$$\varphi_i = exp(-ikx \cos\theta - iky \sin\theta), \quad 0 < \theta < \pi \tag{5.1}$$

тобто $\tilde{\varphi}_i = e^{+i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$, де $\vec{k} = -k(\cos\theta, \sin\theta)$ – хвильовий вектор, $k = \omega / c$ – хвильове число, ω – частота, c – швидкість поширення акустичної хвилі, θ – кут падіння хвилі, $\lambda = 2\pi / k$ – довжина хвилі, θ – кут падіння хвилі (Рис. 1).

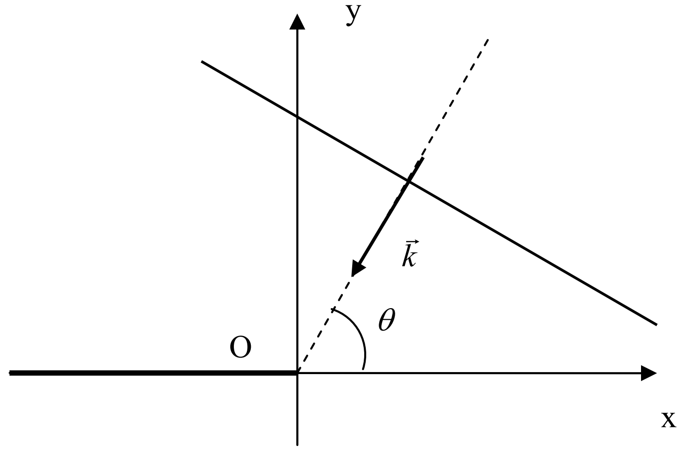

Рис.1

Відкидаємо множник $e^{i\omega t}$. Повний розв'язок можна знайти як суперпозицію:

$$\varphi_t = \varphi_i + \varphi, \tag{5.2}$$

де φ – потенціал вторинного поля.

Таким чином, φ_t має задовільняти рівнянню Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial y^2} + k^2 \varphi_t = 0 \tag{5.3}$$

та граничній умові:

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial n}_{|_{y=0}} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial y}_{|_{y=0}} = 0, \quad -\infty < x < 0. \tag{5.4}$$

φ_i також задовільняє (5.3) та, в силу (5.1), представляє плоску хвилю.

Перейдемо згідно (5.2) до розшуку вторинного поля. З (5.3) (5.4) з урахуванням (5.2) та (5.1) маємо граничну задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0, & -\infty < x, y < +\infty, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}_{|_{y=0}} = -\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y}_{|_{y=0}} = ik \sin\theta \, e^{-ikx\cos\theta}, & -\infty < x < 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Окрім того, φ_t, а отже і φ має бути неперервною на $y = 0$, $0 < x < +\infty$, та $\partial\varphi_t/\partial y$, а отже і $\partial\varphi/\partial y$ має бути неперервною на $y = 0$, $-\infty < x < 0$. На функцію φ мають бути накладені ще деякі фізично обгрунтовані припущення, що до поведінки в околі точки $x = 0$ та $x = \infty$.

Очевидно, що дифрагована хвиля може бути представлена, як результат випромінення джерелами, певним чином зосередженими на екрані. Отже, це є хвиля, яка розповсюджується від екрану до нескінченно віддаленої точки. Математично це означає, що ∞ не може бути особливою точкою $\varphi(x)$. До поведінки $\varphi(x)$ в околі ребра екрану повернемося пізніше.

5.1.1 Метод Джонсона.

Розглянемо прямий метод зведення (5.5) до крайової задачі Рімана.

Застосуємо до (5.5) перетворення Фур'є по координаті x.

$$\frac{d^2\Phi(\alpha,y)}{dy^2} - \gamma^2\,\Phi(\alpha,y) = 0, \quad \gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}, \tag{5.6}$$

$$\frac{d\Phi(\alpha,\theta)}{dy} = \frac{ik\,\sin\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{i(\alpha - k\cos\theta)x} dx. \tag{5.7}$$

Розв'язавши (5.6), очевидно, маємо:

$$\begin{cases} \Phi(\alpha,y) = A_1(\alpha)\,e^{-\gamma y} + B_1(\alpha)\,e^{\gamma y}, & y \geq 0, \\ \Phi(\alpha,y) = A_2(\alpha)\,e^{-\gamma y} + B_2(\alpha)\,e^{\gamma y}, & y \leq 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Розділ розв'язку по областям $y > 0$, $y < 0$ обумовлено тим, що неперервність $\varphi(x,y)$, а отже і $\Phi(\alpha,y)$ на $y = 0$ не гарантовано.

Розглянемо функцію

$$\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}. \tag{5.9}$$

Це є однозначна аналітична функція в комплексній площині з розрізом, що з'єднує точки розгалудження $\alpha = \pm k$. існує кілька варіантів побудови розрізу. Виходячи з умови задачі, ми маємо отримати розв'язок, що зникає (принаймі обмежений) на нескінченності. Окрім того, аналітичне продовження $\Phi(\alpha,y)$ не може бути функцією, аналітичною лише в верхній чи нижній півплощині, оскільки, в цьому випадку, її оригінал буде односторонньою функцією. Виходячи з цього, розріз має бути проведено так, як вказано на Рис. 2. Такий вибір розрізу можна також пояснити цілком фізичними міркуваннями.

Розглянемо плоску хвилю, що розповсюджується, як показано на Рис. 3.

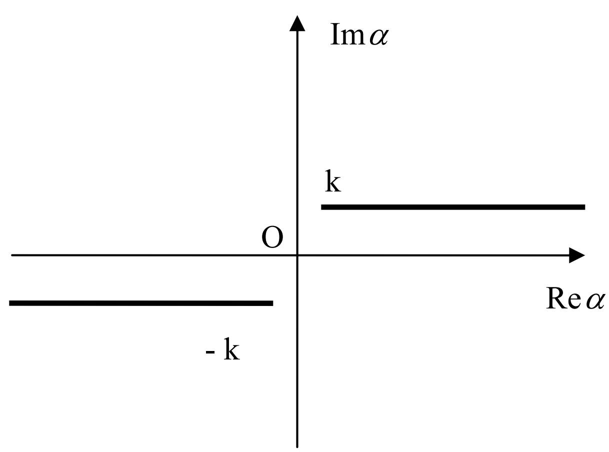

Рис.2

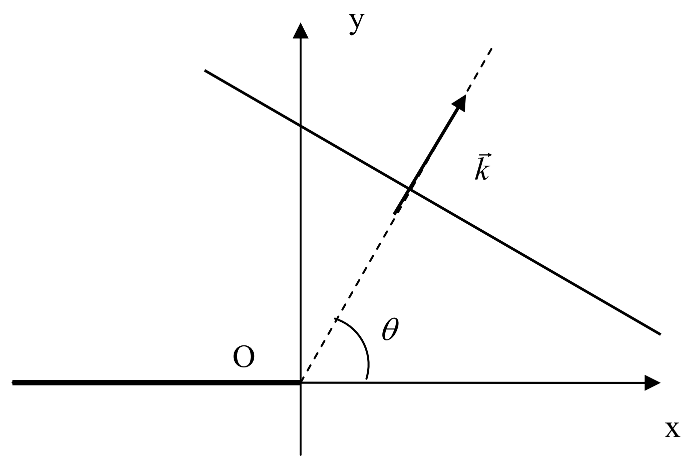

Рис.3

Нехай така хвиля задається формулою:

$$\varphi(x,t) = A\ \exp[i(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)] = A\ \exp[i(k\ (x\ \cos\theta + y\ \sin\theta) - \omega t)], \quad 0 < \theta < \pi/2. \tag{5.10}$$

Очевидно, для обмеженості розв'язку необхідно виконати умову:

$$\varphi(x,t) < C, \quad \text{якщо} \quad y, x \to +\infty. \tag{5.11}$$

(5.11) буде виконано, якщо (5.10) переписати у вигляді:

$$\varphi(x,t) \to A\ \exp\{i((k_1 + ik_2)\ (x\ \cos\theta + y\ \sin\theta) - \omega\ t)\}, \quad \text{при} \quad k_2 \to 0, \quad k_2 > 0,\ k_1 = k. \tag{5.12}$$

З очевидного співвідношення $k = \omega/C$ слідує, що в цьому випадку:

$$k \to k_1 + ik_2 \quad \text{при} \quad k_2 \to 0,\ k_2 > 0,\ k_1 = k, \quad \text{або} \quad k \to \omega\ \tfrac{1}{c_1 + ic_2} \quad \text{при} \quad c_2 \to 0,\ c_2 < 0,\ c_1 = c, \tag{5.13}$$

Співвідношення (5.12), (5.13) називаються принципом граничного поглинання. Його ідея полягає в тому, що ідеальне (недисипаційне) середовище є насправді граничним наближенням поглинаючого середовища. Тобто, хвиля, що розповсюджується з скінченої частини площини на нескінченності підлягає граничному поглинанню.

Таким чином, згідно з цим принципом точки k та $-k$ повинні на площині α розглядатись як граничні положення з верхньої та нижньої півплощин (Рис. 2). Вибір вітки (5.9) в площині α не має особливого значення. Виберемо, для певності, таку гілку, що $\Im\gamma = 0$, для $\Im\alpha = 0$, $|\alpha| > k$. Умова обмежності $\Phi(\alpha, y)$ для такого вибору $\gamma(\alpha)$, приводить до умови $B_1 = A_2 = 0$. Використаємо тепер умову неперервності $\partial\varphi(x,y)/\partial y$ на $y = 0$:

$$-\gamma\ A_1(\alpha) = \gamma\ B_2(\alpha) = A(\alpha). \tag{5.14}$$

Таким чином, розв'язок можна записати у вигляді:

$$\Phi(\alpha, y) = A(\alpha)\ e^{-\gamma\ |y|}\ \text{sign}\, y. \tag{5.15}$$

Ми бачимо, що $\Phi(\alpha, y)$ є обмеженою (навіть зникаючою по y) на нескінченності і такою, що задовільняє умову неперервності похідної. Залишається задовільнити умову (5.7) та забезпечити неперервність $\varphi(x, y)$ на $y = 0$, $0 < x < +\infty$.

Представимо $\Phi(\alpha, y)$ у вигляді суперпозиції зображень односторонніх функцій: $\Phi(\alpha, y) = \Phi^+(\alpha, y) - \Phi^-(\alpha, y)$, де, очевидно, $\Phi^+(\alpha, y)$ є зображення функції $\varphi(x, y) \cdot H(x)$ і, згідно з побудованою теорією, є граничним значенням аналітичної в D^+ ($\Im\alpha > 0$) функції. $\Phi^-(\alpha, y)$ зображення функції $\varphi(x, y) \cdot (1 - H(x))$ ($H(x)$ – функція Хевісайда).

Умова неперервності $\varphi(x, y)$ на $y = 0$, $0 < x < +\infty$ виглядає так:

$$\Phi^+(\alpha, +0) = \Phi^+(\alpha, -0) = \Phi^+(\alpha). \tag{5.16}$$

Таким чином:

$$\begin{cases} \Phi^+(\alpha) - \Phi^-(\alpha, +0) & = & A(\alpha), \\ \Phi^+(\alpha) - \Phi^-(\alpha, -0) & = & -A(\alpha), \\ \Phi^{+'}(\alpha) - \Phi^{-'}(\alpha) & = & -\gamma\, A(\alpha). \end{cases} \tag{5.17}$$

Виключимо з (5.17) $A(\alpha)$:

$$\begin{cases} 2\,\Phi^+(\alpha) & = & \Phi^-(\alpha, +0) + \Phi^-(\alpha, -0), \\ \Phi^{+'}(\alpha) - \Phi^{-'}(\alpha) & = & \dfrac{\gamma}{2}(\Phi^-(\alpha, +0) - \Phi^-(\alpha, -0)). \end{cases} \tag{5.18}$$

В данному випадку $\Phi^{-'}(\alpha)$ – відома функція. Вона визначається як оригінал односторонньої функції:

$$\Phi^{-'}(\alpha) = \Phi^{-'}(\alpha, +0) = \Phi^{-'}(\alpha, -0) = -\frac{ik\sin\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{i(\alpha - k\ \cos\theta\ x)}\, dx. \tag{5.19}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} 2D^-(\alpha) &= \Phi^-(\alpha, +0) - \Phi^-(\alpha, -0), \\ 2S^-(\alpha) &= \Phi^-(\alpha, +0) + \Phi^-(\alpha, -0), \\ P^-(\alpha) &= \Phi^{-'}(\alpha). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Тоді (5.18) можна записати як:

$$\begin{cases} \Phi^+(\alpha) & = & S^-(\alpha), \\ \Phi^{+'}(\alpha) - P^-(\alpha) & = & \gamma D^-(\alpha) \end{cases} \tag{5.21}$$

Розглянемо друге рівняння в (5.21), записавши його у вигляді:

$$\Phi^{+'}(\alpha) = P^-(\alpha) + \gamma D^-(\alpha). \tag{5.22}$$

Ми маємо крайову задачу Рімана з коефіцієнтом $G(\alpha) = \gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$ та вільним членом $P^-(\alpha)$. $\operatorname{Ind} G(\alpha) = \operatorname{Ind}\gamma(\alpha) = 0$. Доведемо це, побудувавши образ контуру $\Im\alpha = 0$, $-\infty < \Re\alpha < +\infty$ для зображення $w = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$. Очевидно, маємо:

1. Для $|\alpha| > k$: $\Im w = 0$.
2. Для $\alpha < -k$: $\arg(\alpha - k)^{1/2} = -\pi/2$, $\arg(\alpha + k)^{1/2} = \pi/2$. Отже $\arg(\alpha^2 - k^2)^{1/2} = 0$.
3. Для $\alpha > k$: $\arg(\alpha - k)^{1/2} = \pi$, $\arg(\alpha + k)^{1/2} = 0$. Отже $\arg(\alpha^2 - k^2)^{1/2} = \pi$.
4. Для $|\alpha| < k$: $\arg(\alpha - k)^{1/2} = -\pi/2$, $\arg(\alpha + k)^{1/2} = 0$. Тобто $\arg(\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -\pi/2$.

В околі $\alpha = k$ нехай $\alpha = k + r\ e^{i\varphi}$, тоді для $r \sim 0$ $\quad (\alpha - k)^{1/2} = r^{1/2}\ e^{i\varphi/2}$, $\quad -\pi < \varphi < 0$, $(\alpha + k)^{1/2} = (2k + re^{i\varphi})^{1/2} \sim \sqrt{2k}$.

В околі $\alpha = -k$, $\alpha = -k + re^{i\varphi}$, та $(\alpha + k)^{1/2} = r^{1/2}\, e^{i\varphi/2}$, $\quad \alpha \in [\pi, 0]$, $\quad (\alpha - k)^{1/2} \sim (-2k + re^{i\varphi})^{1/2} = \sqrt{2k}\, e^{-i\pi/2}$.

Тобто, коли α обходить точку k по півколу малого радіуса, w обходить точки O по чверть колу малого радіуса зі зміною $\arg w$ від $-\pi/2$ до 0. Коли α пробігає півколо малого радіуса (Рис. 4) навколо точки $-k$, w обходить точку O по чвертьколу малого радіуса зі зміною аргументу від 0 до $-\pi/2$. Таким чином, образ контуру C площини α, $\tilde{C}$ на площині w має вигляд, зображений на Рис. 5. З Рис. 5 очевидно, що $\operatorname{Ind}\gamma = 0$.

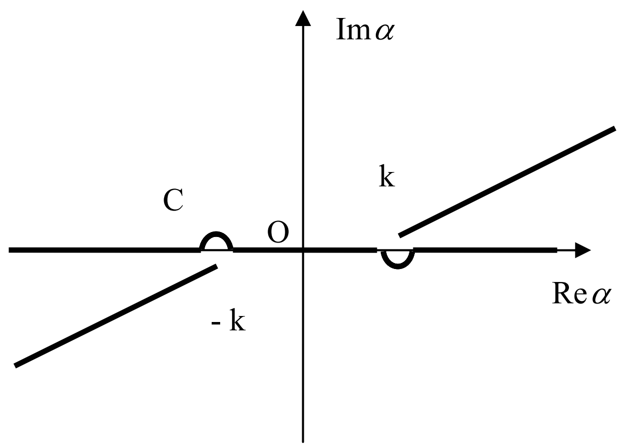

Рис.4

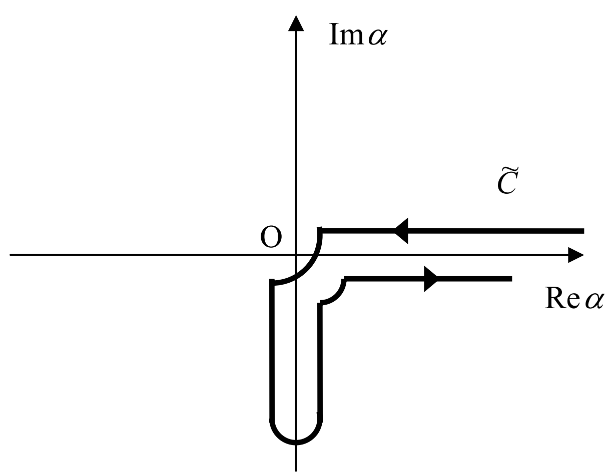

Рис.5

Таким чином, існує єдиний зникаючий на нескінченності розв'язок задачі (5.22), та він визначається формулою:

$$\begin{cases} \Phi^+(\alpha) = X^+(\alpha)\, \Psi^+(\alpha), \\ D^-(\alpha) = X^-(\alpha)\, \Psi^-(\alpha), \end{cases} \tag{5.23}$$

де $X(\alpha)$ – канонічна функція. В данному випадку, очевидно,

$$X^+(\alpha) = (\alpha + k)^{1/2}, \quad X^-(\alpha) = (\alpha - k)^{-1/2}, \tag{5.24}$$

а

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P^-(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - \alpha)}\, d\tau. \tag{5.25}$$

Очевидно, можна також побудувати обмежений на нескінченності розв'язок, добавивши в (5.23) до $\Psi(\alpha)$ довільну константу C. Повернемось до цього пізніше.

Підставимо в (5.23) та (5.25) значення $P^-(\tau)$ і будемо мати:

$$P^-(\alpha) = \frac{-ik\sin\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{i(\alpha - k\cos\theta)x} dx = -\frac{ik\sin\theta}{\sqrt{2\pi} i(\alpha - k\cos\theta)} = -\frac{k\sin\theta}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k\cos\theta)}, \tag{5.26}$$

$$\Psi^+(\alpha) = -\frac{k\sin\theta}{\sqrt{2\pi}\, 2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(\tau - k\cos\theta)(\tau + k)^{1/2}(\tau - \alpha)}. \tag{5.27}$$

Замикаючи контур в інтегралі (5.27) у верхній півплощині та використовуючи теорему про лишки, маємо:

1. $\cos\theta > 0$, $0 < \theta < \pi/2$.

$$\Psi^+(\alpha) = -\frac{k\sin\theta}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{k^{1/2}(1+\cos\theta)^{1/2}(k\cos\theta - \alpha)} + \frac{1}{(\alpha - k\cos\theta)}\ \frac{1}{(\alpha + k)^{1/2}} \right). \tag{5.28}$$

2. $\cos\theta < 0$, $\pi/2 < \theta < \pi$.

$$\Psi^+(\alpha) = -\frac{k\sin\theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\alpha - k\cos\theta)\,(\alpha + k)^{1/2}}. \tag{5.29}$$

Таким чином, використавши (5.17):

$$A(\alpha) = -\frac{1}{\gamma}(\Phi^{+'}(\alpha) - \Phi^{-'}(\alpha)) = -\frac{1}{\gamma}(\Phi^{+'}(\alpha) - P^{-'}(\alpha)), \tag{5.30}$$

маємо

$$A(\alpha) = -\frac{1}{\gamma}(\alpha + k)^{1/2}\ \frac{(-k\sin\theta)}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{\alpha - k\cos\theta} \left(1 - \frac{1}{k^{1/2}(1+\cos\theta)^{1/2}} - 1\right) = \frac{-k\sin\theta}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k)^{1/2}\,(\alpha - k\cos\theta)\,(k + k\cos\theta)^{1/2}} \tag{5.31}$$

для випадку $0 < \theta < \pi/2$, та

$$A(\alpha) = \frac{-k\sin\theta}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k)^{1/2}\,(\alpha - k\cos\theta)} \left(\frac{1}{(k + k\cos\theta)^{1/2}} + 1 \right) \tag{5.32}$$

для $\pi/2 < \theta < \pi$.

Використовуючи (5.31) - (5.32) відшукуємо розв'язок задачі:

$$\varphi(x, y) = \pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha)\, e^{\mp\gamma y}\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha, \quad y > 0, \quad y < 0. \tag{5.33}$$

5.1.2 Метод парних інтенральних рівнянь.

Міркуємо так само, як і в попередньому випадку. Нехай ми отримали співвідношення (5.15). Функція $A(\alpha)$ поки що не визначена. Застосовуючи обернене перетворення Фур'є, матимемо:

$$\varphi_t(x,y) = e^{-i(kx\cos\theta + ky\sin\theta)} + \frac{\mathrm{sign}y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha)\, e^{-\gamma|y| - i\alpha x} d\alpha. \tag{5.34}$$

З умови неперервності $\varphi_t(x,y)$ при $y=0$, $x>0$ знаходимо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha = 0, \quad x > 0. \tag{5.35}$$

З (5.35) та (5.34) слідує, що $\varphi_t(x,0) = \exp(-ikx\cos\theta)$ для $x>0$.

З умови $\partial\varphi_t/\partial y = 0$ для $y=0$, $x<0$ маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma\, A(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha = -ik\sin\theta e^{-ikx\sin\theta}, \quad x < 0. \tag{5.36}$$

Рівняння (5.34) – (5.36) утворюють парне інтегральне рівняння , з яких треба відшукати невідому функцію $A(\alpha)$.

Взагалі кажучи, їх можна записати в більш звичній для нас формі.

Очевидно,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\, G(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x) ** g(x), \tag{5.37}$$

де $f(x) = V^{-1}(F)(x), \quad g(x) = V^{-1}(G)(x)$.

Таким чином,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma\, A(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha \right] ** \left[\int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha \right].$$

Згідно з викладеною раніше теорією, маємо: $k_1(\alpha) = 1$, $k_2(\alpha) = \gamma(\alpha)$,

$$F(\alpha) = -\frac{ik\sin\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{ix(\alpha - k\sin\theta)} dx, \quad \Phi(\alpha) = A(\alpha). \tag{5.38}$$

Тоді крайова задача Рімана для такого парного інтегрального рівняння типу згортки має вигляд:

$$\Phi^+(\alpha) = \frac{1+\gamma(\alpha)}{2}\, \Phi^-(\alpha) + \frac{\gamma(\alpha) - 1}{2}\, F(\alpha). \tag{5.39}$$

Отже, ми прийшли до інтерального парного рівняння типу згортки:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha = 0, & x > 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma\, A(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha = -ik\, \sin\theta\, e^{-ik\cos\theta}, & x < 0. \end{cases} \tag{5.40}$$

Згідно з теорією, ми продовжуємо перше рівняння (5.40) на ліву піввісь функцією $h_-^-(x)$, а друге – на праву піввісь функцією $h_+^+(x)$. Маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha = h_-^-(x), & -\infty < x < +\infty, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma\, A(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha = -ik\; sin\theta\, e^{-ik\cos\theta} + h_+^+(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{5.41}$$

Перейшовши до зображень Фур'є, матимемо:

$$\begin{cases} A(\alpha) & = & H^-(\alpha), \\ \gamma\, A(\alpha) & = & P^-(\alpha) + H^+(\alpha), \end{cases} \tag{5.42}$$

де, відповідно, $H^{\pm}(\alpha) = V(h^{\pm})(\alpha)$,

$$P^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} (-ikx\, \sin\theta)\, e^{-ikx\cos\theta - i\alpha x} dx. \tag{5.43}$$

Виключивши з (5.42) функцію $A(\alpha)$:

$$A(\alpha) = H^-(\alpha) = \frac{P^-(\alpha) + H^+(\alpha)}{\gamma}, \tag{5.44}$$

переходимо до задачі Рімана:

$$H^+(\alpha) = \gamma H^-(\alpha) - P^-(\alpha), \tag{5.45}$$

з коефіцієнтом γ та неоднорідним членом $P^-(\alpha)$.

Розв'язок (5.45) розшукується елементарно:

$$\begin{array}{l} X^+(\alpha) = (\alpha + k)^{1/2}, \quad X^-(\alpha) = (\alpha - k)^{-1/2}, \\ \psi^{\pm}(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P^-(\tau)}{X^+(\tau)(\tau - \alpha)} d\tau = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P^-(\tau)}{(\tau + k)^{1/2}(\tau - \alpha)} d\tau, \\ H(\alpha) = X(\alpha)\psi(\alpha), \end{array} \tag{5.46}$$

оскільки індекс задачі дорівнює нулеві, та ми шукаємо зникаючі на нескінченності розв'язки. Отже:

$$\begin{array}{l} A(\alpha) = H^-(\alpha) = X^-(\alpha)\; \Psi^-(\alpha) = \\ -\frac{1}{(\alpha - k)^{1/2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P^-(\tau)}{(\tau + k)^{1/2}(\tau - \alpha)} d\tau. \end{array} \tag{5.47}$$

Нагадаємо, що:

$$P^-(\alpha) = -\frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{ix(\alpha - k\sin\theta)} dx = \frac{ik\sin\theta}{i\sqrt{2\pi}(\alpha - k\cos\theta)}, \tag{5.48}$$

$$\begin{array}{l} A(\alpha) = \dfrac{ik\sin\theta}{i\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{2\pi i(\alpha - k)^{1/2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(\tau + k)^{1/2}(\tau - k\cos\theta)(\tau - \alpha)} = \\ (\text{для} \cos\theta > 0) \dfrac{k\ \sin\theta}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k)^{1/2}} \times \\ \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha + k)^{1/2}(\alpha - k\cos\theta)} + \dfrac{1}{(k + k\cos\theta)^{1/2}(k\cos\theta - \alpha)}, & \Im\alpha > 0 \\ \dfrac{1}{(k + k\cos\theta)^{1/2}} \dfrac{1}{(k\cos\theta - \alpha)}, & \Im\alpha < 0. \end{cases} \end{array} \tag{5.49}$$

5.1.3 Метод інтегрального рівняння.

Побудуємо розв'язок поставленої задачі, базуючись на понятті функції Гріна.

Нехай $G(x, y, \xi, \eta)$ – це функція Гріна деякої задачі (в тому розумінні, що граничні умови на даній геометрії поки що невизначені). Отже:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k^2\, G = -4\pi\, \delta(x - \xi)\, \delta(y - \eta). \tag{5.50}$$

В цьому випадку, очевидно, можна побудувати квазирозв'язок виду:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(G(x; \xi)\, \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi}\, \varphi(\xi) \right) d\Gamma_\xi, \tag{5.51}$$

де Γ – границя одбасті. В даному випадку, очевидно, Γ – від'ємна піввісь $y = 0$, $x < 0$.

Можна вказати кілька методів побудови інтегрального рівняння поставленої задачі.

1.Розглянемо в якості Γ дійсну вісь (замкнену в верхній півплощині півколом нескінченно великого радіуса). Тоді областю D буде верхня півплощина. Нехай $h(x) = \partial\varphi_t/\partial y$ –невідома функція, що задається на $y = 0$, $x > 0$. Використовуючи (5.51), маємо:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) = -\tfrac{1}{4\pi}\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(G(x;\xi)\,\tfrac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\eta}\right)_{|\eta=0} d\xi + \\ \tfrac{1}{4\pi}\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\tfrac{\partial G(x;\xi)}{\partial\eta}\,\varphi(\xi)\right)_{|\eta=0} d\xi.\end{aligned} \tag{5.52}$$

Знак - взято згідно з тим, що в даному випадку $\dfrac{\partial}{\partial n_\xi} = -\dfrac{\partial}{\partial\eta}$.

Нехай $G(x,\xi)$ така, що $\dfrac{\partial G}{\partial\eta}_{|\eta=0} = 0$. Таку функцію побудувати дуже легко. Вона визначається як:

$$G(x,\xi) = \pi i\,[H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(1)}(kr')], \tag{5.53}$$

де $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$, $r'^2 = (x-\xi)^2 + (y+\eta)^2$. Окрім того, виділивши з $\varphi_t(x)$ падаючу та відбиту хвилі, запишемо:

$$\varphi_t(x) = e^{-i(kx\cos\theta + ky\sin\theta)} + e^{-i(kx\cos\theta - ky\sin\theta)} + \varphi(x). \tag{5.54}$$

Відбиту хвилю взято в такому вигляді, щоб задовільнити співвідношення:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}_{|y=0} = \frac{\partial\varphi_t}{\partial y}_{|y=0}. \tag{5.55}$$

Підставивши (5.53) та (5.54) в (5.52), матимемо:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) = e^{-i(kx\cos\theta + ky\sin\theta)} + e^{-i(kx\cos\theta - ky\sin\theta)} + \varphi(x,y) - \\ \tfrac{1}{4\pi}\,2\pi i\textstyle\int_0^{+\infty} H_0^{(1)}(kR)\,h(\xi)\,d\xi,\end{aligned} \tag{5.56}$$

де $R^2 = (x-\xi)^2 + \eta^2$, оскільки $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}_{|y=0} = \dfrac{\partial\varphi_t}{\partial y}_{|y=0} = 0$, $x < 0$, та $\dfrac{\partial\varphi_t}{\partial y}_{|y=0} = h(x)$ для $x > 0$.

Рівняння (5.56) було побудовано для області $y > 0$. Для $y < 0$ рівняння будується аналогічно, лише треба врахувати, що в цьому випадку
$\dfrac{\partial}{\partial n_\xi} = \dfrac{\partial}{\partial\eta}$ та падаюча і відбита хвилі відсутні. Тому:

$$\varphi(x,y) = \frac{i}{2}\int_0^{+\infty} H_0^{(1)}(kR)\,h(\xi)\,d\xi, \tag{5.57}$$

$\varphi(x,y)$ має бути неперервною функцією на $y = 0$, $x > 0$, тому

$$2e^{-ikx\cos\theta} - \frac{i}{2}\int_0^{+\infty} H_0^{(1)}(kR)\,h(\xi)\,d\xi = \frac{i}{2}\int_0^{+\infty} H_0^{(1)}(kR)\,h(\xi)\,d\xi, \tag{5.58}$$

або:

$$i\int_0^{+\infty} H_0^{(1)}(k|x-\xi|)\,h(\xi)\,d\xi = 2e^{-ikx\cos\theta}, \quad x > 0. \tag{5.59}$$

(5.59) і є шукане інтегральне рівняння типу згортки. Можна його привести до виду:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} k(x-\xi)\,h(\xi)\,d\xi = f(x), \quad x > 0, \tag{5.60}$$

поклавши $k(x) = H_0^{(1)}(k|x|), \quad f(x) = -\dfrac{2i}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx\cos\theta}$.

Розв'язати це рівняння можна згідно з введеною методою, згадавши, що:

$$\frac{1}{2} i \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}[k(x^2+y^2)^{1/2}]\, e^{i\alpha x}\, dx = \gamma^{-1}\, e^{-\gamma|y|}. \tag{5.61}$$

2. Нехай $G(x,\xi)$ – функція Гріна, що задовільняє співвідношення $G = 0$ на $\eta = 0$.

$$\varphi(x,y) = \pm \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \eta}\, \varphi(\xi) \right)_{|\eta=0} d\xi \quad \text{для} \quad y<0 \ (y>0). \tag{5.62}$$

Така функція будується згідно з принципом симетрії:

$$G(x,\xi) = \pi i\, [H_0^{(1)}(kr) \mp H_0^{(1)}(kr^{'})]. \tag{5.63}$$

Виділимо в $\varphi_t(x,y)$ падаючу та відбиту хвилі так, щоб виконувалось співвідношення: $\varphi_t(x,0) = \varphi(x,0)$, для $-\infty < x < +\infty$. Очевидно:

$$\varphi_t(x,y) = e^{-ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} - e^{-ik(x\cos\theta - y\sin\theta)} + \varphi(x,y). \tag{5.64}$$

Тоді (5.62) можна переписати як:

$$\begin{aligned} \varphi_t(x,y) = \quad & e^{-ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} - e^{-ik(x\cos\theta - y\sin\theta)} + \\ & \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \eta}\, \varphi(\xi) \right]_{|\eta=0} d\xi, \qquad y>0 \\ \varphi_t^{'}(x,y) = \quad & -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \eta}\, \varphi(\xi) \right]_{|\eta=0} d\xi, \qquad y<0. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Функція $\varphi_t(x,y)$ має бути неперервною на $y=0$, $x>0$ (φ_t, а отже і φ може мати розрив на $y=0$, $x<0$). Нехай розрив φ_t на $x<0$ дорівнює невідомій функції $g(x) = \varphi_t(x,+0) - \varphi_t(x,-0), \quad x<0$. Зауважимо, що

$$\left[\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \eta}\, \varphi(\xi) \right]_{|\eta=0} = 2\pi i \lim_{\eta \to 0} \left[\frac{\partial H_0^{(1)}(kR)}{\partial R}\, \frac{\partial R}{\partial \eta} \right] = 2\pi i k \frac{\eta}{R}\, H_0^{(1)^{'}}(kR).$$

Продиференціювавши (5.65) по y та спрямувавши y до нуля для $x<0$, з умови $\dfrac{\partial \varphi_t}{\partial y}_{|y=0,x<0} = 0$, матимемо:

$$\lim_{y,\eta \to 0} i \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial^2}{\partial \eta\, \partial y}\, [H_0^{(1)}(kR)]\, g(\xi)\, d\xi = 2ik\, \sin\theta\, e^{-ikx\ \cos\theta}, \quad x<0. \tag{5.66}$$

Це й є шукане інтегральне рівняння.

5.1.4 Аналіз розв'зку.

Побудувавши так, чи інакше крайову задачу Рімана, ми шукали розв'язок, що зникає на нескінченності. Очевидно, це має бути якимось чином фізично обгрунтовано.

Нагадаємо, що $\Phi(\alpha,y) = A(\alpha)\, e^{-\gamma(\alpha)|y|}$, та $A(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Тобто, ми нав'язали поведінку $\Phi(\alpha,y)$ для $\alpha \to \infty$. З розв'язку видно, що $A(\alpha) \sim C\, \alpha^{-1/2}$, $\alpha \to \infty$. З відомих теорем комплексоного аналізу слідує, що для

$$F^+(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx, \quad \text{для} \quad -1 < \eta < 0. \tag{5.67}$$

при $f(x) \sim Ax^\eta$, $x \to +0$, $\Rightarrow F^+(\alpha) \sim A(2\pi)^{-1/2}\,\Gamma(\eta+1)\,e^{\pi i(\eta+1)/2}\alpha^{-\eta-1}$, $\alpha \to \infty$. Тобто умова зникання $A(\alpha)$ на нескінченності еквівалентна умові:

$$\varphi(x,y) \sim Cr^{1/2}, \quad \text{при} \quad r \to 0, \quad r^2 = x^2 + y^2. \tag{5.68}$$

Умова (5.68) називається "умова на ребрі". Фізично вона означає, що розшукується "енергетично допустимий "розв'язок задачі. Дійсно, розглянемо антиплоску задачу для лінійно пружного тіла. В цьому випадку $\varphi(x,y) = u_3(x,y)$ та енергія деформації в околі края екрана (в даному випадку це є тріщина) визначається за формулою:

$$\frac{1}{2}\int_S \varepsilon\sigma ds = \frac{1}{2}\int_S \left(\frac{\partial u_3}{\partial r}\right)^2 ds.$$

Якщо u_3 має особливість вище за $r^{1/2}$, такий інтеграл не існує, та модель виявляється енергетично незамкненою. Аналогічні міркування справедливі і у випадку акустики і електродинаміки.

5.2 Деякі задачі теорії акустичних хвилепроводів.

Проілюструємо введений математичний апарат на деяких задачах теорії хвилепроводів.

Розглянемо плоский хвилепровід (Рис. 6): $-\infty < x < +\infty$, $-b < x < b$.

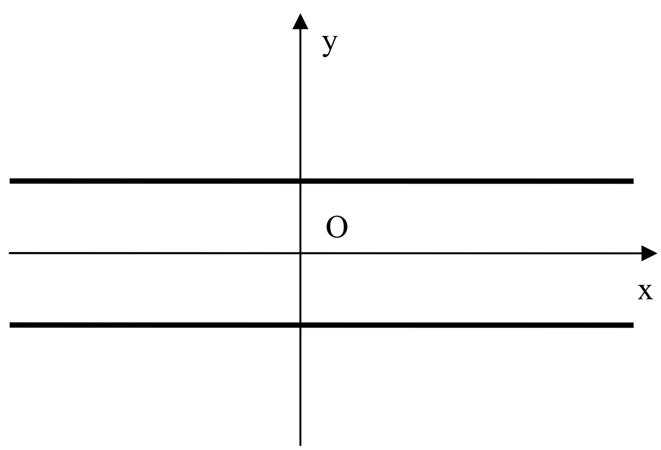

Рис.6

Нехай на $y = \pm b$ виконано граничні умови:

$$\varphi_{|_{y=\pm b}} = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{5.69}$$

Скориставшись методом розділення змінних та задовільнивши (5.69) , матимемо розв'язок у вигляді:

$$\varphi(x,y) = \varphi_n(x)\,\sin\frac{\pi n}{2b}(y-b), \tag{5.70}$$

$n = 1, 2, \ldots$, де $\varphi_n(x)$ задовільняють гармонійне рівняння, та визначаються як:

$$\varphi_n(x) = A_n\,e^{\gamma_n x} + B_n\,e^{-\gamma_n x}, \quad \gamma_n = \left[\left(\frac{\pi n}{2b}\right)^2 - k^2\right]^{1/2}, \tag{5.71}$$

де A_n та B_n – довільни константи.

Введемо позначення: $\kappa_n = -i\gamma_n = \left[k^2 - \left(\frac{\pi n}{2b}\right)^2\right]^{1/2}$. Тоді розв'язок можна представити у вигляді:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\, e^{-i\kappa_n x} + B_n\, e^{i\kappa_n x})\, \sin\frac{\pi n}{2b}(y - b). \tag{5.72}$$

(5.72) називають ще **суперпозицією плоских хвиль**. Залежність між κ (хвильове число) та ω (частота) називають **дисперсійним співвідношенням**. Якщо κ залежить від ω нелінейним чином, хвилі (5.72) називають **дисперсійними**. В данному випадку: $\kappa_n = \left[k^2 - \left(\frac{\pi n}{2b}\right)^2\right]^{1/2}$ і на Рис. 7 дисперсійні криві виглядають як нескінченна кількість

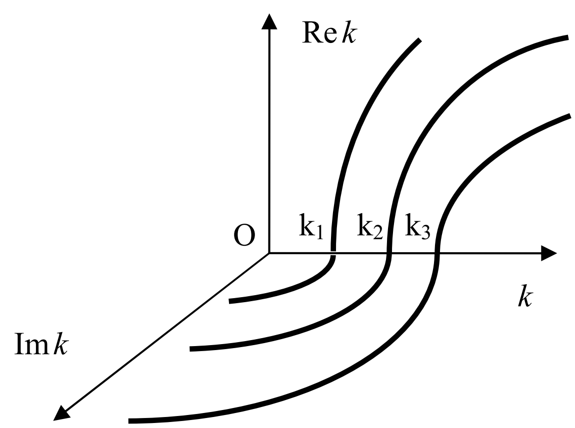

Рис.7

віток (відповідно нескінченному набору n), $k_n = n\pi/\,2\pi$. З рисунку видно, що для будь якого значення ω існує скінченне число **розповсюджуючихся** хвиль (з дійсним значенням κ) для n: $k \geq \pi n/2b$ і нескінченна кількість **нерозповсюджуючихся** хвиль (з уявним значенням κ).

5.2.1 Напівнескінченна полоса, що паралельна стінкам хвилепровода.

Розглянемо нескінченний хвилепровід (Рис. 8):

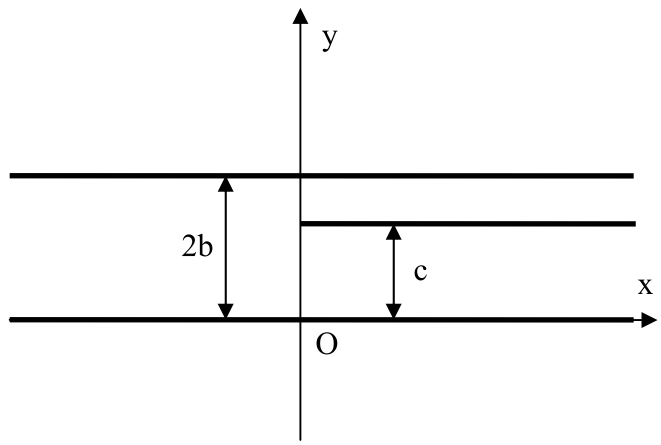

Рис.8

$0 \le y \le 2b$, $-\infty \le x \le +\infty$, в середині якого розташовано напівнескінченний екран $y = c$, $0 < x < \infty$. Нехай на стінках хвилепровода має виконуватись умова: $\dfrac{\partial \varphi_t}{\partial y}_{|_{y=0,b;-\infty<x<+\infty}} = 0$, а на екрані: $(\varphi_t)_{|_{y=c;0<x<+\infty}} = 0$. Нехай, окрім того, на екран падає хвиля: $\varphi_i = e^{ikx}$. Таким чином, маємо крайову задачу для дифрагованої хвилі:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0, \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial y}_{|_{y=0,b;-\infty<x<+\infty}} = 0, \quad \varphi_{|_{y=c;0<x<+\infty}} = -e^{ikx},
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Застосувавши до (5.73) перетворення Фур'є по змінній x та задовільнивши граничні умови на $y = 0, b$, матимемо:

$$\begin{cases} \Phi(y) = A(\alpha)\ \cosh \gamma y, & 0 \le y \le c, \\ \Phi(y) = B(\alpha)\ \cosh \gamma(2b - y), & c \le y \le b. \end{cases} \tag{5.74}$$

Різні вирази для $y > c$ та $y < c$ введено згідно з тим, що $\Phi(y)$ може терпіти розрив на $y = c$. Таким чином, очевидно, $\Phi^{\pm}(y)$ мають бути неперервні на $y = c$, $\Phi^{-'}$ – також неперервна, а $\Phi^{+'}$ – розривна на $y = c$. Окрім того, з граничної умови на екрані слідує:

$$\Phi_+(c) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{ix(\alpha+x)}\ dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}(\alpha + k)}. \tag{5.75}$$

Скористаємось методом Джонсона для побудови крайової задачі Рімана.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\dfrac{i}{\sqrt{2\pi}(\alpha+k)} - \Phi_-(c) & = & A(\alpha)\ \cosh \gamma c = B(\alpha)\ \cosh \gamma(2b - y), \\ \Phi^{+'}(c-0) - \Phi^{-'}(c) & = & \gamma A(\alpha)\ \sinh \gamma c, \\ \Phi^{+'}(c+0) - \Phi^{-'}(c) & = & -\gamma B(\alpha)\ \sinh \gamma(2b - c). \end{array} \right. \tag{5.76}$$

Виключимо з (5.76) $\Phi^{-'}(c)$, поклавши $\Phi^{+'}(c+0) - \Phi^{-'}(c-0) = D_+^{'}$:

$$D_+^{'} = \frac{1}{2} \gamma (A \sinh \gamma c + B \sinh \gamma(2b - c)), \tag{5.77}$$

$$B = A\frac{\cosh\gamma c}{\cosh\gamma(2b-c)} = \left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}(\alpha+k)} - \Phi_-(c)\right)\frac{1}{\cosh\gamma(2b-c)}, \tag{5.78}$$

$$\begin{gathered} D_+^{'} = \tfrac{1}{2}\gamma A\left(\sinh\gamma c + \cosh\gamma c\ \tanh\gamma(2b-c)\right) = \\ \frac{1}{2}\gamma(\sinh\gamma c + \cosh\gamma c\ \tanh\gamma(2b-c))\left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}(\alpha+k)} - \Phi_-(c)\right)\frac{1}{\cosh\gamma c}, \end{gathered} \tag{5.79}$$

$$D_+^{'} = -\frac{\gamma\ \sinh 2\gamma b}{\cosh\gamma c\cosh\gamma(2b-c)} = \left(\Phi_-(c) - -\frac{i}{\sqrt{2\pi}(\alpha+k)}\right), \tag{5.80}$$

(5.79) – умова крайової задачі Рімана з коефіцієнтом

$$G(\alpha) = -\frac{\gamma\ \sinh 2\gamma b}{\cosh\gamma c\cosh\gamma(2b-c)}$$

та вільним членом

$$g(\alpha) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\gamma\ \sinh 2\gamma b}{\cosh\gamma c\cosh\gamma(2b-c)\ (\alpha+k)}. \tag{5.81}$$

Індекс задачі дорівнює:

$$\kappa = \mathrm{Ind}\frac{\gamma\ \sinh 2\gamma b}{\cosh\gamma c\cosh\gamma(2b-c)}. \tag{5.82}$$

Якщо провести процедуру факторизації, тобто $G(\alpha) = X^+(\alpha)/X^-(\alpha)$, та розв'язати задачу про стрибок:

$$\begin{gathered} -\frac{\Phi_+(\alpha,c)}{X^-(\alpha)} = \psi^+(\alpha) - \psi^-(\alpha), \\ \psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi_+(\tau,c)}{X^-(\alpha)\,(\tau-z)}d\tau, \end{gathered} \tag{5.83}$$

то можна записати розв'язок у вигляді:

$$\left\{\begin{array}{lcl} D'_+(\alpha) & = & X^+(\alpha)\,\psi^+(\alpha), \\ \Phi_-(\alpha,c) & = & X^-(\alpha)\,\psi^-(\alpha), \end{array}\right. \tag{5.84}$$

Щоб перейти до факторизації функції $G(\alpha)$, зробимо деякий відступ.

5.2.2 Розклад мероморфної функції на множники.

Означення 9 *Функція називається мероморфною в деякій області, якщо вона регулярна всюди в ній за виключенням, можливо, скінченного числа полюсів.*

Нехай $f(\alpha)$ – функція, яка має лише прості полюси в точках α_1, α_2, … з лишками a_1, a_2, …. $f(\alpha)$ обмежена на нескінченності, то, як слідує з узагальненої теореми Ліувілля

$$f(\alpha) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{\alpha-\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n}\right). \tag{5.85}$$

Нехай $f(\alpha)$ – ціла функція, що має нулі в точках α_1, …. Тоді $f'(\alpha)/f(\alpha)$ буде мероморфною функцією, що підлягає попередній теоремі з полюсами в точках нулів функції $f(\alpha)$. Отже, маємо:

$$\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{\alpha-\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n}\right), \tag{5.86}$$

де a_n – лишки функції $f'(\alpha)/f(\alpha)$ в точках α_n.

Очевидно, в околі α_n $\quad f(\alpha) \sim (\alpha - \alpha_n)^r (C_0^n + C_1^n \alpha + \ldots)$. Тобто

$$\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} \sim \frac{(\alpha-\alpha_n)^{r_n-1} r_n (C_0^n + C_1^n\alpha + \ldots) + (\alpha-\alpha_n)^{r_n}(C_1^n + \ldots)}{(\alpha-\alpha_n)^r (C_0^n + \ldots)}$$

$$\sim \frac{r_n}{(\alpha - \alpha_n)},$$

де r_n – порядок нуля $f(\alpha)$ в точці α_n.

Інтегруючи (5.86) отримаємо:

$$\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \right), \Rightarrow \tag{5.87}$$

$$\ln \frac{f(\alpha)}{f(0)} = \alpha \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n}\right) + \frac{\alpha}{\alpha_n} \right), \tag{5.88}$$

або

$$f(\alpha) = f(0) \exp\left(\alpha \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{r_n} e^{\alpha/\alpha_n}. \tag{5.89}$$

Нехай $f(\alpha)$ – парна функція з нулями, розташованими в симетричних точках $\pm\alpha_n$ ($f'(0) = 0$). В цьому випадку:

$$f(\alpha) = f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n}\right)^{2r_n}. \tag{5.90}$$

Користуючись (5.90), можна легко виконати факторізацію $G(\alpha)$. Нулі функції $\sinh 2b\gamma$ (Рис. 9), очевидно, визначаються виразом:

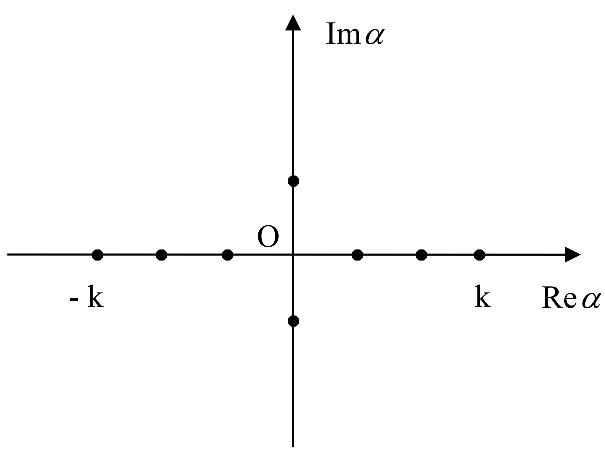

Рис.9

$$2b\gamma = \pm in\pi, \quad \text{або} \quad (\alpha_n^1)^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2, \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n^1 &= \pm\sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2}, \quad \text{для} \quad k > \frac{\pi n}{2b}, \\ \alpha_n^1 &= \pm i\sqrt{\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 - k^2}, \quad \text{для} \quad k < \frac{\pi n}{2b}. \end{aligned} \tag{5.92}$$

Отже

$$\sinh 2b\gamma = \sinh 2bk \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n^1}\right)^2. \tag{5.93}$$

Аналогічно:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \cosh \gamma c &=& \cosh ck \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha_n^2}\right)^2, \\ \cosh(2b-c)\gamma &=& \cosh(2b-c)k \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha_n^3}\right)^2. \end{array} \right. \tag{5.94}$$

де

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\alpha_n^1)^2 &=& k^2 - \left(\dfrac{\pi n}{2b}\right)^2, \\ (\alpha_n^2)^2 &=& k^2 - \dfrac{(n-1/2)^2\pi^2}{c^2}, \\ (\alpha_n^3)^2 &=& k^2 - \dfrac{(n-1/2)^2\pi^2}{(2b-c)^2}. \end{array} \right. \tag{5.95}$$

Використавши (5.93) - (5.94), запишемо факторизацію $G(\alpha)$ у вигляді:

$$\begin{gathered} G(\alpha) = \tfrac{(\alpha+k)^{1/2}}{(\alpha-k)^{-1/2}} \, \frac{\sinh 2bk}{\cosh kc \, \cosh(2b-c)k} \times \\ \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{\alpha_n^1}\right)\left(1 + \dfrac{\alpha}{\alpha_n^2}\right)^{-1}\left(1 + \dfrac{\alpha}{\alpha_n^3}\right)^{-1}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha_n^1}\right)^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha_n^2}\right)\left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha_n^3}\right)}. \end{gathered} \tag{5.96}$$

Тобто

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X^+(\alpha) &=& \dfrac{\sinh 2bk}{\cosh ck \, \cosh k(2b-c)} (\alpha+k)^{1/2} \times \\ && \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{\alpha_n^1}\right)\left(1 + \dfrac{\alpha}{\alpha_n^2}\right)^{-1}\left(1 + \dfrac{\alpha}{\alpha_n^3}\right)^{-1} \\ X^-(\alpha) &=& \dfrac{1}{(\alpha-k)^{1/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n^1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n^3}\right)^{-1}}. \end{array} \right. \tag{5.97}$$

Покажемо, що добутки в (5.97) сходяться.

Для прикладу розглянемо

$$f(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha/\alpha_n^1)}{(1-\alpha/\alpha_n^2)(1-\alpha/\alpha_n^3)}.$$

Добуток $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n(\alpha))$ сходиться рівномірно та абсолютно в обмеженій замкненій області Δ, якщо кожна з функцій задовільняє нерівності $|u_n(\alpha)| \le A_n$, де A_n не залежить від α та $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ сходиться.

Запишемо $f(\alpha)$ у вигляді:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = \quad & \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha/\alpha_n^2)}{(1+\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{[1+i\alpha C/(n-1/2)\pi]}{(1-\alpha/\alpha_n^2)} \times \\ & \prod_{n=1}^{\infty} \frac{[1+i\alpha(2b-C)/(n-1)\pi]}{(1-\alpha/\alpha_n^3)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i\alpha 2b/n\pi)}{[1+i\alpha(2b-C)/(n-1/2)\pi]}. \end{aligned} \tag{5.98}$$

Покажемо, що кожен з перших трьох добутків в (5.98) сходяться рівномірно: для n: $n\pi/2b > k$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-\alpha/\alpha_n^2)}{(1+i\,\alpha)2b/n\pi} = \left(\frac{1+i\alpha/\sqrt{(n\pi/2b)^2-k^2}}{1+i2b\alpha/n\pi} - 1\right) + 1 = \\
&\frac{i\alpha\left(1/\sqrt{(n\pi/2b)^2-k^2} - 2b/n\pi\right)}{1+i2b\alpha n\pi} + 1 \leq \\
&(\text{для } n: \left|\frac{2b\alpha}{n\pi}\right| > 1) \leq \frac{n\pi}{2b}\frac{1}{\sqrt{(n\pi/2b)^2-k^2}} = \\
&1 + \left(\frac{n\pi}{2b}\frac{1}{\sqrt{(n\pi/2b)^2-k^2}} - 1\right).
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Легко показати, що $\sum_n \left(\frac{n\pi}{2b}\frac{1}{\sqrt{(n\pi/2b)^2-k^2}} - 1\right)$ сходиться, оскільки

$$\begin{aligned}
&M_n = \frac{n\pi}{2b}\frac{1}{\sqrt{(n\pi/2b)^2-k^2}} - 1 = \frac{n\pi/2b - \sqrt{(n\pi/2b)^2-k^2}}{\sqrt{(n\pi/2b)^2-k^2}} = \\
&\frac{1-\sqrt{1-(k2b/n\pi)^2}}{\sqrt{1-(k2b/n\pi)^2}} \leq \frac{1+1-(k2b/n\pi)^2}{\sqrt{1-(k2b/n\pi)^2}} \leq A\left(\frac{k2b}{n\pi}\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.100}$$

Покажемо, що останній добуток в (5.98) сходиться рівномірно. Скористаємось відомим розкладом:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{an+b}\right)e^{-\alpha/a_n} = \frac{e^{-C(\alpha/a)}\Gamma[(b/a)+1]}{\Gamma[(\alpha/a)+(b/a)+1]}, \tag{5.101}$$

перепишемо цей член у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i\alpha 2b/n\pi)e^{-\alpha i2b/n\pi}}{[1+i\alpha c/(n\pi-\pi/2)]\,e^{-\alpha i2c/n\pi}\,[1+i\alpha(2b-c)/(n\pi-\pi/2)]\,e^{-i\alpha(2b-c)/n\pi}} \\
&= \frac{\Gamma\left[i\alpha c/\pi - ic/2\right]\,\Gamma\left[i\alpha(2b-c)/\pi - i(2b-c)/2\right]}{\Gamma\left[2i\alpha b/\pi+1\right]\,\Gamma\left[1-ic/2\right]\,\Gamma\left[1-i(2b-c)/2\right].}
\end{aligned} \tag{5.102}$$

Можна також показати, що $X^{\pm}(\alpha) \sim A^{\pm}\,\alpha^{\mp 1/2}$ при $\alpha \to \infty$. Розв'язок задачі запишемо у вигляді: $0 \leq y \leq c$

$$\begin{aligned}
&\Phi(y) = A(\alpha)\,\cosh\gamma y = -\frac{\cosh\gamma(2b-c)}{\gamma\,\sinh\gamma 2b}\,\cosh\gamma y\,X^{+}(\alpha)\,\psi^{+}(\alpha) = \\
&= -\frac{\cosh\gamma(2b-c)}{\gamma\,\sinh\gamma 2b}\,G(\alpha)\,X^{-}(\alpha)\,\psi^{+}(\alpha) = -\frac{\cosh\gamma y}{\cosh\gamma c}\,X^{-}(\alpha)\,\psi^{+}(\alpha),
\end{aligned} \tag{5.103}$$

та

$$\varphi(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cosh\gamma y}{\cosh\gamma c}\,X^{-}(\alpha)\,\psi^{+}(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha. \tag{5.104}$$

Нагадаємо, що

$$\begin{aligned}
&\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{X^{-}(t)\sqrt{2\pi}i(k+\tau)(\tau-z)}d\tau = (\mathrm{Im}z > 0) = \\
&-\frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+z)\,X^{-}(-k)}, \\
&\text{та } \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cosh\gamma y}{\cosh\gamma c}\,X^{-}(\alpha)\,\frac{1}{(k+\alpha)\,X^{-}(-k)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.105}$$

6 Динамічна механіка руйнування.

6.1 Співвідношення динаміки лінійно–пружнього тіла.

Рівняння динамічної рівноваги - рівняння Ламе:

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{u} + \mu\,\Delta\vec{u} - \rho\,\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = 0 \tag{6.1}$$

має бути доповнене граничними

$$\vec{u}_{|_{\Gamma_1}} = \overline{\vec{u}}, \quad \vec{t}_{|_{\Gamma_2}} = \hat{s}\,\vec{n}_{|_{\Gamma_2}} = \overline{\vec{u}}, \quad \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 = \Gamma \tag{6.2}$$

та початковими умовами:

$$\vec{u}\,(t = 0) = \vec{u}_0, \quad \dot{\vec{u}}\,(t = 0) = \dot{\vec{u}}_0. \tag{6.3}$$

(6.1) – (6.3) називається **класичною початково–гарничною задачею динамічної теорії пружності**. Далі скрізь будемо розглядати виключно плоскі задачі.

Згідно з теоремою Ламе, розв'язок (6.1) будемо розшукувати у вигляді:

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{rot}\,\vec{\psi}, \tag{6.4}$$

де φ – скалярний, а $\vec{\psi} = (0, 0, \psi)$ – векторний потенціали. φ та ψ мають задовільняти хвильові рівняння:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\psi - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{6.5}$$

$c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_2^2 = \mu/\rho$ – швидкості повздовжної та поперечної (об'ємної, зсувної) пружних хвиль в безмежному середовищі. Таким чином, компоненти вектора переміщень $\vec{u}$ знаходяться з співвідношень:

$$\left\{\begin{aligned} u_x = &\quad \varphi_{,x} + \psi_{,y}, \\ u_y = &\quad \varphi_{,y} + \psi_{,x}. \end{aligned}\right. \tag{6.6}$$

Компоненти тензора напружень легко отримати з закону Гука:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_{xx} = &\quad \lambda + \mathrm{div}\vec{u} + 2\,\mu\,u_{x,x}, \\ \sigma_{xy} = &\quad \mu(u_{x,y} + u_{y,x}), \\ \sigma_{yy} = &\quad \lambda + \mathrm{div}\vec{u} + 2\,\mu\,u_{y,y}. \end{aligned}\right. \tag{6.7}$$

Або, використовуючи (6.6):

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_{xx} = &\quad (\lambda + \mu)\,\Delta\varphi + 2\,\mu\,(\varphi_{,xx} + \psi_{,xy}), \\ \sigma_{xy} = &\quad \mu\,(2\varphi_{,xy} + \psi_{,yy} - \psi_{,xx}), \\ \sigma_{yy} = &\quad (\lambda + \mu)\,\Delta\varphi + 2\,\mu\,(\varphi_{,yy} - \psi_{,xy}). \end{aligned}\right. \tag{6.8}$$

6.2 Динамічна задача терії пружності для півплощини.

Розглянемо задачу в області $-\infty < x < +\infty$, $y \geq 0$. Застосовуючи до (6.5) перетворення Фур'є по часу та координаті x:

$$\tilde{\bar{\varphi}}(\alpha, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, t)\, e^{i\alpha x + i\omega t} dx\, dt, \tag{6.9}$$

та вважаючи початкові умови (6.3) однорідними, очевидно, отримаємо:

$$\begin{aligned} &\tilde{\tilde{\varphi}}(\alpha,\omega) = A(\alpha)\, e^{-\gamma_1 y}, \\ &\tilde{\tilde{\psi}}(\alpha,\omega) = B(\alpha)\, e^{-\gamma_2 y}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

де $\gamma_i(\alpha,\omega) = \left(\alpha^2 - \dfrac{\omega^2}{c_i^2}\right)^{1/2}$. Вітки багатозначних функцій $\gamma_i(\alpha,\omega)$ вибираються аналогічно попередньому згідно з принципом граничного поглинання.

Запишемо базові співвідношення для зображень переміщень та напружень на лінії $y = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{u}}_x(\alpha,0) &= -i\,A\,\alpha - \gamma_2 B, \\ \tilde{\tilde{u}}_y(\alpha,0) &= -\gamma_1 A + i\,B\,\alpha, \\ \frac{\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}(\alpha,0)}{\mu} &= 2i\alpha\gamma_1 A + (2\alpha^2 - k_2^2)\,B, \\ \frac{\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}(\alpha,0)}{\mu} &= (2\alpha^2 - k_2^2)\,A - 2i\alpha\gamma_2 B. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Виключивши з (6.11) функції $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, маємо:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\tilde{u}}_x(\alpha,0) &= \frac{\gamma_2 k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}(\alpha,0) - \frac{i\alpha(2\alpha^2 - k_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2)}{\mu R(\alpha,\omega)}\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}(\alpha,0), \\ \tilde{\tilde{u}}_y(\alpha,0) &= \frac{i\alpha(2\alpha^2 - k_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2)}{\mu R(\alpha,\omega)}\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}(\alpha,0) + \frac{\gamma_1 k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}(\alpha,0), \end{aligned} \right. \tag{6.12}$$

де $R(\alpha,\omega) = (2\alpha^2 - k_2^2)^2 - 4\alpha^2\,\gamma_1\,\gamma_2$ – функція Релея.

Співвідношення (6.12) можна використати для розв'язування задач динамічної теорії пружності для півплощини. Наприклад, нехай на границю півплощини діє імпульсна зосереджена сила $p(x,t) = \delta(x)\,\delta(t)\,p_0$. В цьому випадку, $\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}(\alpha,0) = 0$, $\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}(\alpha,0) = -p_0$. Отже:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\tilde{u}}_x(\alpha,0) &= \frac{i\alpha p_0}{R(\alpha,\omega)}(2\alpha^2 - k_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2), \\ \tilde{\tilde{u}}_y(\alpha,0) &= -\frac{k_1^2\,\gamma_1 p_0}{R(\alpha,\omega)}. \end{aligned} \right. \tag{6.13}$$

Зображення компонент вектора переміщень для $y > 0$ можна відшукати з (6.13), скориставшись (6.11) та (6.10). Наприклад:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{u}}_x(\alpha,y) = -i\alpha A e^{-\gamma_1 y} - \gamma_2\,B e^{-\gamma_2 y} = -\frac{i\alpha e^{-\gamma_1 y}}{\alpha^2 - \gamma_1\,\gamma_2}(i\alpha\tilde{\tilde{u}}_x(\alpha,0) + \\ \gamma_2\tilde{\tilde{u}}_y(\alpha,0)) - \frac{\gamma_2\,e^{-\gamma_2 y}}{\alpha^2 - \gamma_1\,\gamma_2}(-i\alpha\tilde{\tilde{u}}_y(\alpha,0) + \gamma_1\tilde{\tilde{u}}_x(\alpha,0)). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Співвідношення, аналогічні (6.14), легко побудувати для $\tilde{\tilde{u}}_y(\alpha,y)$ та для компонент тензора напружень (6.8).

В площині оригіналів розв'язок можна записати у вигляді:

$$u_x(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x}\,\tilde{\tilde{u}}_x(\alpha,y,\omega)\,d\alpha. \tag{6.15}$$

Для підрахунку (6.15) можна скористатись методом Каньяра.

ідея цього метода полягає в тому, що, якщо $\tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega)$ можна представити у вигляді

$$\tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega) = \tilde{g}(\omega)\,S(\alpha/\omega), \tag{6.16}$$

тоді

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\, e^{-i\omega t}\tilde{g}(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} S(q)\, e^{-iq\omega x}\, dq. \tag{6.17}$$

Але

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\, \tilde{g}(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega = ig'(t),$$

а

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} S(q)\, e^{iq(-\omega x)} dq = \\ \frac{1}{2\pi x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(-\omega x)\left(-\frac{t}{x}\right)}\, d\left(-\frac{\omega x}{x}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} S(q)\, e^{iq(-\omega x)} dq = -\frac{S}{x}\left(-\frac{t}{x}\right),\end{gathered} \tag{6.18}$$

тобто

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega) e^{-i\omega t - i\alpha x} d\omega d\alpha = -ixS\left(-\frac{t}{x}\right) * * g'(t) = \\ -\frac{i}{x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} S\left(-\frac{\tau}{x}\right)\, g'(t-\tau)\, d\tau.\end{gathered} \tag{6.19}$$

6.3 Падіння плоскої хвилі на напівнескінченну тріщину.

Нехай для визначенності на напівнескінченну тріщину падає плоска хвиля (Рис. 10) виду:

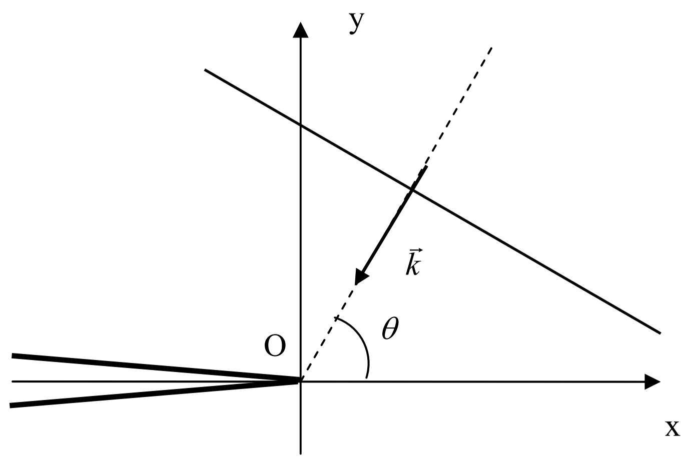

Рис.10

$$\vec{u} = \vec{u}_0(s)\, r\, (\vec{k}\,\vec{r} - c_1 t). \tag{6.20}$$

Нехай при проходженні цією хвилею лінії тріщіни, напруження, що визначаються падаючою хвилею, рівні:

$$\begin{gathered}\sigma^i_{yy}(x,0,t) = p_i(x,t), \quad \sigma^i_{xy}(x,0,t) = \tau^i(x,t), \\ x < 0.\end{gathered} \tag{6.21}$$

Повне поле будемо розшукувати у вигляді:

$$\sigma^t(x, y, t) = \sigma^i(x, y, t) + \sigma(x, y, t). \tag{6.22}$$

Згідно з тим, що береги тріщини мають бути вільні від напружень, для дифрагованого поля:

$$\sigma_{yy}(x, 0, t) = -\sigma^i_{yy}(x, 0, t), \quad \sigma_{xy}(x, 0, t) = -\sigma^i_{xy}(x, 0, t), \quad x < 0. \tag{6.23}$$

Компоненти тензора напружень будуть неперервні, переміщення – розривні на берегах трішини. Таким чином, використовуючи (6.12) та аналогічні співвідношення для нижньої півплощини можна записати:

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{u}}_x(\alpha, +0) - \tilde{\tilde{u}}_x(\alpha, -0) = \quad & \frac{\gamma_2 k_2^2}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{xy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{xy}(\alpha, 0)) - \\
& \frac{i\alpha(2\alpha^2 - k_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2)}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{yy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{yy}(\alpha, 0)), \\
\tilde{\tilde{u}}_y(\alpha, +0) - \tilde{\tilde{u}}_y(\alpha, -0) = \quad & \frac{\gamma_1 k_2^2}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{yy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{yy}(\alpha, 0)) + \\
& \frac{i\alpha(2\alpha^2 - k_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2)}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{xy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{xy}(\alpha, 0)),
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{u}}_x(\alpha, +0) - \tilde{\tilde{u}}_x(\alpha, -0) = \quad & -\frac{\gamma_2 k_2^2}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{xy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{xy}(\alpha, 0)) - \\
& \frac{i\alpha(2\alpha^2 - k_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2)}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{xy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{xy}(\alpha, 0)), \\
\tilde{\tilde{u}}_y(\alpha, +0) - \tilde{\tilde{u}}_y(\alpha, -0) = \quad & -\frac{\gamma_1 k_2^2}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{yy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{yy}(\alpha, 0)) + \\
& \frac{i\alpha(2\alpha^2 - k_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2)}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{xy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{xy}(\alpha, 0)),
\end{aligned} \tag{6.25}$$

або

$$\begin{cases}
\tilde{\tilde{u}}^-_x(\alpha, +0) - \tilde{\tilde{u}}^-_x(\alpha, -0) = \quad \tilde{\tilde{D}}^-_x(\alpha, \omega) = \quad -\dfrac{2\gamma_2 k_2^2}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{xy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{xy}(\alpha, 0)), \\
\tilde{\tilde{u}}^-_y(\alpha, +0) - \tilde{\tilde{u}}^-_y(\alpha, -0) = \quad \tilde{\tilde{D}}^-_y(\alpha, \omega) = \quad -\dfrac{2\gamma_1 k_2^2}{\mu R(\alpha, \omega)} (\tilde{\tilde{\sigma}}^+_{yy}(\alpha, 0) - \tilde{\tilde{\sigma}}^-_{yy}(\alpha, 0)).
\end{cases} \tag{6.26}$$

Таким чином, задача розділилась на задачу для зсуву та задачу для розтягу. Зауважимо, що (6.26) є не що інше, як умова крайової задачі Рімана.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\sigma}}^-_{xy}(\alpha, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\, dt \int_{-\infty}^{0} \tau^i(x, t)\, e^{i\alpha x}\, dx, \\
\tilde{\tilde{\sigma}}^-_{yy}(\alpha, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\, dt \int_{-\infty}^{0} p^i(x, t)\, e^{i\alpha x}\, dx.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Коефіцієнти задач $G_i(\alpha, \omega) = -\dfrac{2\,\gamma_i\, k_2^2}{\mu R(\alpha)}$, $i = 1, 2$ мають прості полюси в точках $\alpha/\omega = \pm c_R^{-1}$, де c_R – швидкість хвиль Релея. $c_R < c_2$ та визначається рівнянням Релея:

$$\left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right)^2 - 4\left(1 - \left(\frac{c_R}{c_1}\right)^2\right)^{1/2} \left(1 - \left(\frac{c_R}{c_2}\right)^2\right)^{1/2} = 0. \tag{6.28}$$

Для факторизації $G_i(\alpha, \omega)$ зручно розглянути функцію $S_i(\alpha/\omega)$ таку, що

$$G_i(\alpha, \omega) = \frac{1}{\omega}\, S\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)\, \lambda_i, \tag{6.29}$$

де

$$
\begin{aligned}
&S\left(\tfrac{\alpha}{\omega}\right) = -\tfrac{2}{c_2^2\,R(\alpha/\omega)}, \quad \lambda_i(q) = \left(q^2 - 1/c_i^2\right)^{1/2},\\
&\qquad R(q) = \left(2q^2 - 1/c_2^2\right)^2 - 4\,q^2\,\lambda_1\,\lambda_1.
\end{aligned} \tag{6.30}
$$

Очевидно, що

$$
S(q) \sim -2/\left[c_2^2\left(4q - \frac{4q^2}{c_2^2} - 4q^2\left(1 - \frac{1}{2c_1^2q^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2c_2^2q^2}\right)\right)\right] = \frac{1}{q^2}
$$

при $q \to \infty$. Запишемо $S_i(q)$ у вигляді:

$$
S(q) = \frac{P(q)}{2(q^2 - (1/c_R)^2)}, \tag{6.31}
$$

де $P(q) = 2S(q)\,(q^2 - (1/c_R)^2)$ та функція $P_i(q)$ підлягає методу факторизації Гахова.

$$
\begin{aligned}
&P(q) = \frac{X^+(q)}{X^-(q)}, \quad \text{де} \quad X^\pm(z) = e^{\Gamma_\pm(z)},\\
&\Gamma_\pm(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln P_i(\tau)}{\tau - z}d\tau = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln(2S_i(\tau)(\tau^2 - (1/c_R)^2)}{\tau - z}d\tau.
\end{aligned} \tag{6.32}
$$

Зауважимо, що

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\pm(z) = {} & \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln(2(\tau^2 - (1/c_R)^2)}{\tau - z}(2\tau^2 - 1/c_2^2)^2 - 4\tau^2(\tau^2 -\\
& 1/c_1^2)^{1/2}(\tau^2 - 1/c_2^2)^{1/2}))d\tau,\\
\Gamma_-(z) = {} & \frac{1}{\pi}\int_{1/c_1}^{1/c_2}\arctan\frac{4\tau^2(\tau^2 - 1/c_1^2)^{1/2}(\tau^2 - 1/c_2^2)^{1/2}}{(2\tau^2 - 1/c_2^2)^2}\frac{1}{\tau - z}d\tau,\\
\Gamma_+(z) = {} & -\frac{1}{\pi}\int_{1/c_1}^{1/c_2}\arctan\frac{4\tau^2(\tau^2 - 1/c_1^2)^{1/2}(\tau^2 - 1/c_2^2)^{1/2}}{(2\tau^2 - 1/c_2^2)^2}\frac{1}{\tau + z}d\tau.
\end{aligned} \tag{6.33}
$$

Тоді, розв'язок можна представити у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{D}}_x^-(\alpha,\omega) = \frac{(\alpha/\omega - \alpha/c_2)^{1/2}}{\omega X^-(\alpha/\omega)}\psi_x^-(\alpha,\omega),\\
&\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}^+(\alpha,0) = \frac{1}{(\alpha/\omega + 1/c_2)^{1/2}X^+(\alpha/\omega)}\psi_x^+(\alpha,\omega),
\end{aligned} \tag{6.34}
$$

де

$$
\psi_x(\alpha,\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}^-(\tau,\omega)X^+(\tau/\omega)}{\tau - \alpha}d\tau. \tag{6.35}
$$

Аналогічно

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{D}}_y^-(\alpha,\omega)) = \frac{(\alpha/\omega - 1/c_1)^{1/2}}{\omega X^-(\alpha/\omega)}\psi_y^-(\alpha,\omega),\\
&\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}^+(\alpha,0)) = \frac{1}{(\alpha/\omega + 1/c_1)^{1/2}X^+(\alpha/\omega)}\psi_y^+(\alpha,\omega),
\end{aligned} \tag{6.36}
$$

де

$$
\psi_y(\alpha,\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}^-(\tau,\omega)X^+(\tau/\omega)}{\tau - \alpha}d\tau. \tag{6.37}
$$

6.4 Поведінка розв'язку в околі вершини тріщини.

Нехай, як в даному випадку, можливе асимптотичне представлення:

$$\tilde{\tilde{f}}(\alpha, \omega) \sim \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\kappa} \left(\tilde{f}_0(\omega) + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^{-1} f_1(\omega) + \dots\right). \tag{6.38}$$

В даному випадку κ для $\tilde{\tilde{D}}_x^-(\alpha, \omega))$ рівняється $-1/2$. Обертаючи (6.38) по частинам, отримаємо:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\kappa} f_0(\omega)\, e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ -\frac{i}{x\sqrt{2\pi}} \int_0^t \left(\frac{\tau}{x}\right)^{\kappa} f_0'(t-\tau)\, d\tau = -\frac{i}{x^{1/2}\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{f_0'(t-\tau)}{\tau^{1/2}}\, d\tau. \end{gathered} \tag{6.39}$$

В даному випадку

$$\tilde{f}_0(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}^-(\tau, \omega)\, X^+(\tau/\omega) d\tau, \quad f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_0(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega. \tag{6.40}$$

Таким чином, член $(\alpha/\omega)^{\kappa} \tilde{f}_0(\omega)$ визначає головну частину асимптотичного розкладу оригіналу в околі $x \to 0$. Поведінка компонент тензору напружень в околі вершини тріщини буде виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x,0,t) &\sim \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad \text{при} \quad x \to 0, \quad x > 0, \\ \sigma_{yy}(x,0,t) &\sim \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad \text{при} \quad x \to 0, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{6.41}$$

K_I, K_{II} – динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень. Очевидно, розглянувши розв'язок на площині, будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x,y,t) &\sim \frac{K_{II}(t)\, f_x(\theta)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \text{при} \quad r \to 0, \\ \sigma_{yy}(x,y,t) &\sim \frac{K_I(t)\, f_y(\theta)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \text{при} \quad r \to 0, \end{aligned} \tag{6.42}$$

де $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \arctan y/x$.

В даному випадку динамічні коєфіцієнти інтенсивності напружень визначаються формулою (6.39). В чому сенс особливості компонентів тензора напружень? Використавши (6.34) та формули (6.14) можна показати, що головні частини компонент вектора переміщень мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_x(x,y,t) &\sim \sqrt{2\pi r}\, g_x(\theta)\, L_{II}(t), \quad \text{при} \quad r \to 0, \\ u_y(x,y,t) &\sim \sqrt{2\pi r}\, g_y(\theta)\, L_I(t), \quad \text{при} \quad r \to 0. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Вирахуємо потенціальну енергію деформації в середині малої області D_ϵ, що обгортає вершину тріщини (Рис. 11):

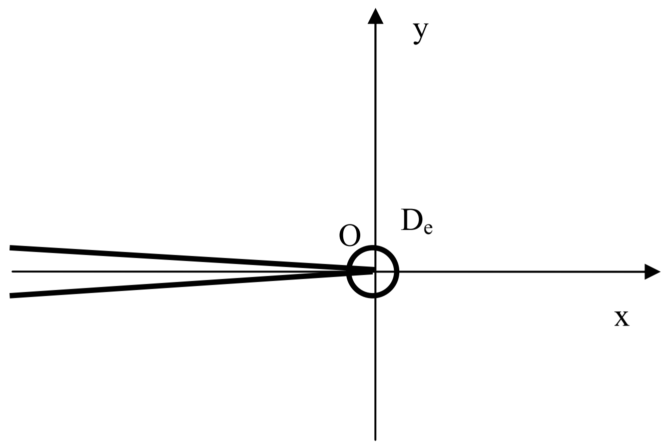

Рис.11

$$U = \frac{1}{2} \int_{D_\epsilon} \sigma_{ij}\, \epsilon_{ij}\, d\Omega. \tag{6.44}$$

Очевидно, для напружено–деформовного стану виду (6.42)– (6.43) при спрямуванні ϵ (лінійного розміру D_ϵ) до нуля, U буде прямувати до скінченної величини:

$$U = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi} (g_x(\theta)\, f_x(\theta)\, K_{II}(t)\, L_{II}(t) + g_y(\theta)\, f_y(\theta)\, K_I(t)\, L_I(t))\, d\theta. \tag{6.45}$$

6.5 Рух тріщини з постійною швидкістю.

Нехай точка розділу типу граничних умов рухається зі швидкістю $v = \text{const}$, таким чином, $l(t) = vt$ (Рис. 12). Покажемо, що задача може бути розв'язана з використанням попередніх формул.

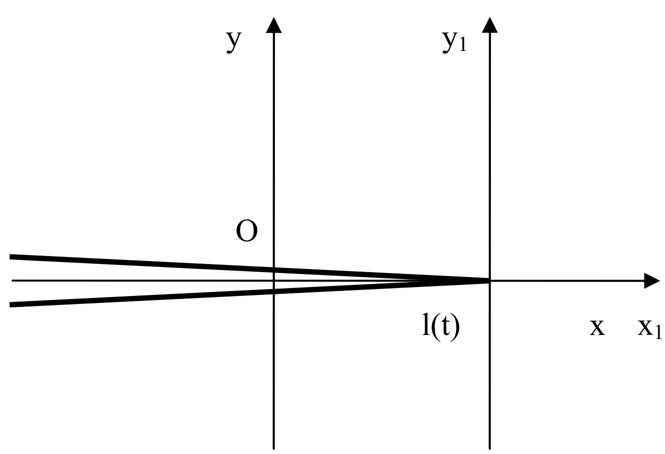

Рис.12

Нехай $f(x,t)$ та

$$\tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{i\omega t}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\,e^{i\alpha x}dx. \tag{6.46}$$

Розглянемо $g(x,t)=f(x+vt,t)$, тобто $g(x,t)$ розглянуто у відносній системі координат, що рухається відносно абсолютної зі швидкістю v.

Очевидно,

$$\begin{gathered}\tilde{\tilde{g}}(\alpha,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{i\omega t}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1+vt,t)\,e^{i\alpha x_1}dx_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{i\omega t}dt\times\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\,e^{i\alpha x-iv\alpha t}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{i(\omega-v\alpha)t}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\,e^{i\alpha x}dx=\\ \tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega-v\alpha).\end{gathered} \tag{6.47}$$

Отже, перехід до відносної системи координат, що рухається зі швидкістю $v=\mathrm{const}$ по відношенню до абсолютної в просторі оригиналів еквівалентний згортці зображень з функцією $\delta(\omega-\alpha v)$ в просторі зображень по ω.

Нагадаємо отримані в попередньому розділі формули.

$$\left\{\begin{aligned}\tilde{\tilde{u}}_x(\alpha,\omega)=&\quad s_{11}\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}(\alpha,\omega)-s_{12}\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}(\alpha,\omega),\\ \tilde{\tilde{u}}_y(\alpha,\omega)=&\quad s_{12}\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}(\alpha,\omega)+s_{22}\,\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}(\alpha,\omega),\end{aligned}\right. \tag{6.48}$$

де

$$\begin{aligned}&s_{11}=\frac{\gamma_2k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)},\qquad s_{12}=\frac{i\alpha(2\alpha^2-k_2^2-2\gamma_1\gamma_2)}{\mu R(\alpha,\omega)},\\ &s_{22}=\frac{\gamma_1k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)},\qquad R(\alpha,\omega)=(2\alpha^2-k_2^2)^2-4\alpha^2\,\gamma_1\,\gamma_2,\\ &\gamma_i=(\alpha^2-k_i^2)^{1/2},\quad k_i=\omega/c_i.\end{aligned} \tag{6.49}$$

Перейшовши до відносної системи координат та зберігаючи попередні позначення можемо записати:

$$u_x(x,y)=u_x(x+vt,y),\ldots, \tag{6.50}$$

матимемо:

$$\left\{\begin{aligned}\tilde{\tilde{u}}^r_x(\alpha,\omega)=&\quad s_{11}(\alpha,\omega-\alpha v)\,\tilde{\tilde{\sigma}}^r_{xy}(\alpha,\omega)-s_{12}(\alpha,\omega-\alpha v)\,\tilde{\tilde{\sigma}}^r_{yy}(\alpha,\omega),\\ \tilde{\tilde{u}}^r_y(\alpha,\omega)=&\quad s_{12}(\alpha,\omega-\alpha v)\,\tilde{\tilde{\sigma}}^r_{xy}(\alpha,\omega)+s_{22}(\alpha,\omega-\alpha v)\,\tilde{\tilde{\sigma}}^r_{yy}(\alpha,\omega).\end{aligned}\right. \tag{6.51}$$

Розглянемо початково–крайову задачу для дифрагованого поля:

$$\begin{aligned}&\sigma_{xy}(x,0,t)=-\sigma^i_{xy}(x,0,t)=-\tau^i_i(x,t),\quad x<l(t)=vt,\\ &\sigma_{yy}(x,0,t)=-\sigma^i_{yy}(x,0,t)=-p^i_i(x,t),\quad x<l(t)=vt,\\ &u_x(x,y,0)=u_y(x,y,0)=\dot{u}_x(x,y,0)=\dot{u}_y(x,y,0)=0,\end{aligned} \tag{6.52}$$

або у відносній системі координат:

$$\begin{aligned}&\sigma^r_{xy}(x,0,t)=-\tau^i(x_1+vt,t)=-\tau^r_i(x_1,t),\quad x_1<0,\\ &\sigma^r_{yy}(x,0,t)=-p^i(x_1+vt,t)=-p^r_i(x_1,t),\quad x_1<0.\end{aligned} \tag{6.53}$$

Початкові умови залишаються без змін.

Будуючи, як і раніше, граничне співвідношення аналогічне (6.51) для області $y<0$, отримуємо:

$$\begin{aligned}&D^{r^-}_x(\alpha,\omega)=\left[-\frac{2\gamma_2k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}\right]_{\omega\to\omega-\alpha v}(\tilde{\tilde{\sigma}}^{r+}_{xy}(\alpha,\omega)-\tilde{\tilde{\sigma}}^{r-}_{xy}(\alpha,\omega)),\\ &D^{r^-}_y(\alpha,\omega)=\left[-\frac{2\gamma_1k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}\right]_{\omega\to\omega-\alpha v}(\tilde{\tilde{\sigma}}^{r+}_{yy}(\alpha,\omega)-\tilde{\tilde{\sigma}}^{r-}_{yy}(\alpha,\omega)),\end{aligned} \tag{6.54}$$

де $[\cdot]_{\omega\to\omega-\alpha v}$ означає, що в виразі треба замінити ω на $\omega-\alpha v$. В даному випадку

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}^{r-}(\alpha,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\omega t}dt\int_{-\infty}^0 (-\tau_i^r(x_1,t))\,e^{i\alpha x_1}dx_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\omega t}dt\times\\ \int_{-\infty}^0 (-\tau^i(x_1+vt,t))\,e^{i\alpha x_1}dx_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\omega t}dt\int_{-\infty}^{vt}(-\tau^i(x,t))\,e^{i\alpha x-ivt\alpha}dx,\end{aligned} \tag{6.55}$$

та

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}^{r-}(\alpha,\omega) = \quad & \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\omega t}dt\int_{-\infty}^0 (-p_i^r(x_1,t))\,e^{i\alpha x_1}dx_1 = \\ & \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\omega t}dt\int_{-\infty}^{vt}(-\tau^i(x,t))\,e^{i\alpha x-i\alpha vt}dx.\end{aligned} \tag{6.56}$$

Таким чином, задача розпалась і в цьому випадку. Перша формула (6.54) відповідає дотичному руйнуванню (форма *II*), друга – нормальному (форма I).

Виконаємо факторизацію коефіцієнтів задач.

Як і раніше

$$\begin{aligned}&G_i(\alpha,\omega-\alpha v) = \frac{1}{\omega-\alpha v}\,S\left(\frac{\alpha}{\omega-\alpha v}\right)\lambda_i\left(\frac{\alpha}{\omega-\alpha v}\right), \quad \text{або}\\ &G_i(\alpha,\omega-\alpha v) = \frac{1}{\omega(1-qv)}\,S\left(\frac{q}{1-qv}\right)\lambda_i\left(\frac{q}{1-qv}\right), \quad \text{де}\\ &q=\alpha/\omega, \quad \lambda_i\left(\frac{q}{1-q/v}\right) = \lambda_i\left(\frac{1}{1/q-1/v}\right) = \left(\frac{q^2}{(1-qv)^2}-\frac{1}{c_i^2}\right)^{1/2} = \\ &\frac{1}{c_i(1-qv)}(q^2c_i^2-(1-qv)^2)^{1/2} = \frac{1}{c_i(1-qv)}\frac{1}{(c_i^2-v^2)^{1/2}}\left(q-\frac{1}{c_i+v}\right)^{1/2}\times\\ &\left(q+\frac{1}{c_i-v}\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{6.57}$$

Розглянемо випадок, коли $v<c_R$ (отже, $v<C_i$, $i=\overline{1,2}$), тобто дозвукову швидкість розповсюдження трішини. В цьому випадку, як слідує з (6.57), точки розгалудження $\pm 1/c_i$ зміщуються в комплексній площині і переходять в точки $\dfrac{1}{c_i+v}$, $-\dfrac{1}{c_i-v}$ (Рис. 13). В тому випадку, коли $v\to c_2$, очевидно, точка $-\dfrac{1}{c_2-v}$ прямує до $-\infty$. Таким чином, принаймні для $v<c_2$ факторизація $\lambda_i\left(\dfrac{q}{1-q/v}\right)$ залишається тією ж самою:

$$\lambda_i\left(\frac{q}{1-q/v}\right) = \frac{1}{c_i(c_i^2-v^2)^{1/2}(1-qv)}\frac{(q+1/(c_i-v))^{1/2}}{(q-1/(c_i+v))^{-1/2}}. \tag{6.58}$$

Розглянемо, яким чином зміниться функція $R(q)=(2q^2-1/c_2^2)^2-4q^2\lambda_1\,\lambda_2$. Нагадаємо, що $R(q)$ має в точках $q=\pm 1/c_R$ прості полюси, поведінка $R(q)$ на $q\to\infty$: $R(q)\sim -4q^2/c_2^2$.

$$\begin{aligned}R\left(\frac{q}{1-qv}\right) = \quad & \frac{1}{(1-qv)^4}\left[\left(2q^2-\frac{(1-qv)^2}{c_2^2}\right)^2-4q^2\left(q-\frac{1}{c_1+v}\right)^{1/2}\times\right.\\ & \left.\left(q+\frac{1}{c_1-v}\right)^{1/2}\left(q-\frac{1}{c_2+v}\right)^{1/2}\left(q+\frac{1}{c_2-v}\right)^{1/2}\right].\end{aligned} \tag{6.59}$$

$R(q)$ має прості нулі в точках $q=\pm\dfrac{1}{c_R}$, очевидно, $R\left(\dfrac{q}{1-qv}\right)$ має прості нулі в точках $\dfrac{q}{1-qv}=\pm\dfrac{1}{c_R}$, або $q=\pm\dfrac{1}{c_R\pm v}$. Якщо $v<c_R$, то розташування нулів показано на Рис. 14.

Поведінка $R\left(\dfrac{q}{1-qv}\right) \sim R\left(-\dfrac{1}{v}\right)$ при $q \to \infty$. Запишемо коефіцієнти задачі у вигляді:

$$
\begin{gathered}
G_i = \frac{1}{\omega(1-qv)} \frac{1}{c_i(c_i^2-v^2)^{1/2}(1-qv)} \frac{\left(q+\frac{1}{c_i-v}\right)^{1/2}}{\left(q-\frac{1}{c_i+v}\right)^{-1/2}} \frac{v^2 R\left(-\frac{1}{v}\right)}{R\left(\frac{q}{1-qv}\right)} \times \\
\frac{\left(q-\frac{1}{c_R+v}\right)\left(q+\frac{1}{c_R-v}\right)}{(1-qv)^2} \frac{(1-qv)^2}{R\left(-\frac{1}{v}\right) v^2}.
\end{gathered} \tag{6.60}
$$

Покажемо, також, що $R\left(\dfrac{q}{1-qv}\right)(1-qv)^2 \sim \mathrm{const} \neq 0$ при $q \to 1/v$. Очевидно, $R(q) \sim -4q^2/c_2^2$ при $q \to \infty$. Звідси маємо: $R(1/\zeta) \sim -4/(\zeta^2 c_2^2)$ при $\zeta \to 0$. Тоді $R\left(\dfrac{q}{1-qv}\right) = R\left(\dfrac{1}{1/q-v}\right) \sim -\dfrac{4}{(1/q-v)^2 c_2^2}$. Отже

$$
R\left(\frac{q}{1-qv}\right)(1-qv)^2 \sim -\frac{4(1-qv)^2 q^2}{c_2^2(1-qv)^2} \sim -\frac{4}{c_2^2 v^2} \neq 0. \tag{6.61}
$$

Таким чином, функція

$$
M(q) = \frac{v^2 R\left(-\frac{1}{v}\right)}{R\left(\frac{q}{1-qv}\right)} \frac{\left(q-\frac{1}{c_R+v}\right)\left(q+\frac{1}{c_R-v}\right)}{(1-qv)^2} \tag{6.62}
$$

не має нулів та полюсів на дійсній осі, та прямує до 1 при $q \to \pm\infty$. Ця функція може бути факторизована методом Гахова:

$$
\begin{aligned}
&M(q) = \frac{M^+(q)}{M^-(q)}, \quad \text{де} \\
&M^\pm(q) = e^{\Gamma^\pm(q)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln M(\tau)}{\tau - z} d\tau.
\end{aligned} \tag{6.63}
$$

Коефіцієнт задачі представимо у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&G_i(q,\omega) = \frac{X_i^+(q,\omega)}{X_i^-(q,\omega)}, \quad \text{де} \\
&X_i^+(q,\omega) = \frac{\left(q+\frac{1}{c_i-v}\right)^{1/2} M^+(q) \left(q+\frac{1}{c_R+v}\right)}{\omega\, c_i\, (c_i^2-v^2)^{1/2}\, v^2\, R(-1/v)}, \\
&X_i^-(q,\omega) = \left(q-\frac{1}{c_i+v}\right)^{-1/2} \left(q-\frac{1}{c_R+v}\right)^{-1} M^-(q).
\end{aligned} \tag{6.64}
$$

Використовуючи стандартну процедуру, знаходимо розв'язок у вигляді:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
D_x^{r^-}(\alpha,\omega) & = & \dfrac{1}{X_1^-(\alpha/\omega,\omega)}\psi_x^-(\alpha,\omega), \\
\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}^{r+}(\alpha,\omega) & = & \dfrac{1}{X_1^+(\alpha/\omega,\omega)}\psi_x^+(\alpha,\omega),
\end{array}
\right. \tag{6.65}
$$

де

$$
\psi_x(z,\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}^{r-}(\tau,\omega)\, X_1^+(\tau/\omega,\omega)}{\tau - z} d\tau, \tag{6.66}
$$

та

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
D_y^{r^-}(\alpha,\omega) & = & \dfrac{1}{X_2^-(\alpha/\omega,\omega)}\psi_y^-(\alpha,\omega), \\
\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}^{r+}(\alpha,\omega) & = & \dfrac{1}{X_2^+(\alpha/\omega,\omega)}\psi_y^+(\alpha,\omega),
\end{array}
\right. \tag{6.67}
$$

де

$$\psi_y(z,\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}^{r-}(\tau,\omega)\, X_1^+(\tau/\omega,\omega)}{\tau - z} d\tau. \tag{6.68}$$

Розв'язок в нерухомій системі координат знаходиться через формули типу:

$$u_x(x,+0,t) - u_x(x,-0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} D_x^{r^-}(\alpha,\omega)\, e^{-i\alpha(x-vt)} d\alpha, \quad x<0. \tag{6.69}$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень, відповідно для першої та другої форм руйнування, можна відшукати з формул (6.65):

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x-vt,y,t) &\sim \frac{K_I(t)\, f_y(v,\theta)}{\sqrt[4]{(x-vt)^2+y^2}\,\sqrt{2\pi}}, \quad \text{при} \quad x\to vt, \quad y\to 0,\\ \sigma_{xy}(x-vt,y,t) &\sim \frac{K_{II}(t)\, f_x(v,\theta)}{\sqrt[4]{(x-vt)^2+y^2}\,\sqrt{2\pi}}, \quad \text{при} \quad x\to vt, \quad y\to 0, \end{aligned} \tag{6.70}$$

$K_I(t)\, f_y(v,0)$ та $K_{II}(t)\, f_y(v,0)$ можна відшукати, використовуючи (6.65) та (6.67) аналогічно тому, як це було зроблено для нерухомої тріщини. Як було показано,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\kappa} f_0(\omega)\, e^{-i\alpha x} d\alpha = -\frac{i}{x^{1/2}\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{f_0'(t-\tau)}{\tau^{1/2}} d\tau. \tag{6.71}$$

Застосовуючи (6.71) до (6.65), (6.67), отримаємо:

$$K_{I(II)}(t)\, f_{x(y)}(v,0) = (-i)c_i\,(c_i^2 - v^2)^{1/2}\, v^2\, R(-\frac{1}{v}) \int_0^t \frac{g_i'(t-\tau)}{\tau^{1/2}} d\tau, \tag{6.72}$$

де

$$g_i(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tilde{\sigma}}_{xy(yy)}^{r-}(\tau,\omega)\, X_1^+(\tau/\omega,\omega) d\tau. \tag{6.73}$$

6.6 Рух тріщини з довільною швидкістю.

В попередньому параграфі ми отримали граничне співвідношення:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{D}}_x^-(\alpha,\omega) &= \left[-\frac{2\gamma_2 k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}\right] (\tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}^+(\alpha,\omega) - \tilde{\tilde{\sigma}}_{xy}^-(\alpha,\omega)),\\ \tilde{\tilde{D}}_y^-(\alpha,\omega) &= \left[-\frac{2\gamma_1 k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}\right] (\tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}^+(\alpha,\omega) - \tilde{\tilde{\sigma}}_{yy}^-(\alpha,\omega)). \end{aligned} \tag{6.74}$$

Нехай $l(t)$ – деяка монотонна функція часу ($v = \text{const}$), очевидно, якщо

$$\begin{aligned} &\tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{i\omega t}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, e^{i\alpha x}\, dx,\\ &g(x_1,t) = f(x_1 + l(t), t), \quad x_1 + l(t) = x, \end{aligned} \tag{6.75}$$

тоді

$$\begin{aligned} &\tilde{\tilde{g}}(\alpha,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{i\omega t}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 + l(t), t)\, e^{i\alpha x_1}\, dx_1 =\\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{i\omega t}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\, e^{i\alpha x - i\alpha\, l(t)}\, dx = \tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega) ** \tilde{r}(\alpha,\omega), \end{aligned} \tag{6.76}$$

де

$$\tilde{r}(\alpha,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{i\omega t-i\alpha\, l(t)}\,dt. \tag{6.77}$$

Окрім того,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{r}(\alpha,\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega=e^{-i\alpha\, l(t)}. \tag{6.78}$$

Можна також записати обернене до (6.77) співвідношення:

$$\begin{gathered}\tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{i\omega t}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1+l(t),t)\,e^{i\alpha(x_1+l(t))}\,dx_1=\\ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{i\omega t+i\alpha l(t)}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}g(x_1,t)\,e^{i\alpha x_1}\,dx_1=\tilde{\tilde{g}}(\alpha,\omega)**\tilde{p}(\alpha,\omega),\end{gathered} \tag{6.79}$$

де

$$\tilde{p}(\alpha,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{i\omega t+i\alpha l(t)}\,dt, \tag{6.80}$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{p}(\alpha,\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega=e^{i\alpha l(t)}. \tag{6.81}$$

Таким чином:

$$\begin{aligned}&\tilde{\tilde{g}}(\alpha,\omega)=\tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega)**\tilde{\tilde{r}}(\alpha,\omega),\\ &\tilde{\tilde{f}}(\alpha,\omega)=\tilde{\tilde{g}}(\alpha,\omega)**\tilde{\tilde{p}}(\alpha,\omega),\end{aligned} \tag{6.82}$$

Записати (6.74) у відносній системі координат в просторі зображень можна таким чином:

$$\begin{aligned}&\tilde{\tilde{D}}{}_x^{r^-}(\alpha,\omega)**\tilde{\tilde{p}}(\alpha,\omega))=-\frac{2\gamma_2 k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}(\tilde{\tilde{\sigma}}{}_{xy}^r(\alpha,\omega)**\tilde{\tilde{p}}(\alpha,\omega)),\\ &\tilde{\tilde{D}}{}_y^{r^-}(\alpha,\omega)**\tilde{\tilde{p}}(\alpha,\omega))=-\frac{2\gamma_1 k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}(\tilde{\tilde{\sigma}}{}_{yy}^r(\alpha,\omega)**\tilde{\tilde{p}}(\alpha,\omega)).\end{aligned} \tag{6.83}$$

або:

$$\begin{aligned}&\tilde{\tilde{D}}{}_x^{r^-}(\alpha,\omega)=\left[-\frac{2\gamma_2 k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}(\tilde{\tilde{\sigma}}{}_{xy}^r(\alpha,\omega)**\tilde{\tilde{p}}(\alpha,\omega)\right]**\tilde{r}(\alpha,\omega),\\ &\tilde{\tilde{D}}{}_y^{r^-}(\alpha,\omega)=\left[-\frac{2\gamma_1 k_2^2}{\mu R(\alpha,\omega)}(\tilde{\tilde{\sigma}}{}_{yy}^r(\alpha,\omega)**\tilde{\tilde{p}}(\alpha,\omega)\right]**\tilde{r}(\alpha,\omega).\end{aligned} \tag{6.84}$$

Та, окрім того, $\tilde{\tilde{p}}(\alpha,\omega)**\tilde{\tilde{r}}(\alpha,\omega))=1$, бо $r(\alpha,t)\cdot p(\alpha,t)=1$.

Розглянемо деякі співвідношення.

Нехай є функції $f(t)$, $g(t)$, $r(t)$ з зображеннями $\tilde{f}(\omega)$, $\tilde{g}(\omega)$, $\tilde{r}(\omega)$. Спробуємо відшукати таку функцію

$$\tilde{d}(t,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}d(t,s)\,e^{is\omega}\,ds, \tag{6.85}$$

щоб

$$\tilde{f}(\omega)[\tilde{g}(\omega)**\tilde{r}(\omega)]=[\tilde{d}(t,\omega)\,\tilde{g}(\omega)]**\tilde{r}(\omega) \tag{6.86}$$

для будь-яких функцій $\tilde{g}(\omega)$.

Переходимо в (6.86) до оригіналів:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,r(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{d}(t,\omega)\,\tilde{g}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,dt\,r(t), \tag{6.87}$$

але

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{d}(t,\omega)\,\tilde{g}(\omega)\,e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega)\,e^{-i\omega t}\times\\ \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d(t,s)\,e^{i\omega s}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d(t,s)\,\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega)\,e^{-\omega(t-s)}\,d\omega =\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d(t,s)\,g(t-s)\,ds.\end{gathered} \tag{6.88}$$

Отже

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,r(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)\,d(t,s)\,g(t-s)\,ds\times\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\,(f(\tau)\,r(t-\tau)-d(t,\tau)\,r(t))\,d\tau = 0.\end{gathered} \tag{6.89}$$

(6.89) виконується в тому випадку, коли

$$\frac{f(\tau)\,r(t-\tau)}{r(t)} = d(t,\tau). \tag{6.90}$$

В нашому випадку $\tilde{r}(\omega) = \tilde{p}(\alpha,\omega)$, тобто $r(t) = e^{i\alpha l(t)}$, а $\tilde{f}(\omega) = -\dfrac{2\gamma_{2(1)}(\alpha,\omega)}{\mu\,R(\alpha,\omega)}$. Отже

$$d(t,\tau) = e^{i\alpha(l(t-\tau)-l(t))}f(\tau), \tag{6.91}$$

де

$$f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-2)\,\gamma_{2(1)}(\alpha,\omega)}{\mu\,R(\alpha,\omega)}e^{-i\omega\tau}d\omega, \tag{6.92}$$

$$\tilde{d}(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha(l(t-\tau)-l(t))}f(\tau)\,e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{6.93}$$

Для випадку, коли $l(t) = vt$, $v = \text{const}$:

$$\begin{gathered}\tilde{d}(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau(\omega-v\alpha)}f(\tau)\,d\tau = \tilde{f}(\omega-vl) =\\ \left[\frac{(-2)\,\gamma_{2(1)}(\alpha,\omega)}{\mu\,R(\alpha,\omega)}\right]_{\omega\to\omega-\alpha v},\end{gathered} \tag{6.94}$$

що співпадає з отриманим раніше співвідношенням.

Співвідношення (6.84) можна в цьому випадку записати як:

$$\tilde{\tilde{D}}{}^{r-}_{x(y)}(\alpha,\omega) = M_{x(y)}(\alpha,\omega,t)(\tilde{\tilde{\sigma}}{}^{r+}_{xy(yy)}(\alpha,\omega) - \tilde{\tilde{\sigma}}{}^{r-}_{xy(yy)}(\alpha,\omega)), \tag{6.95}$$

де

$$\begin{gathered}M_{x(y)}(\alpha,\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha(l(t-\tau)-l(t))}\times\\ \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{2\pi}}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-2)\,\gamma_{2(1)}(\alpha,s)}{\mu\,R(\alpha,\omega)}e^{-i\tau s}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-2)\,\gamma_{2(1)}(\alpha,s)}{\mu\,R(\alpha,s)}ds\times\\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha(l(t-\tau)-l(t))+i\tau(\omega-s)}d\tau = \frac{(-2)\,\gamma_{2(1)}(\alpha,\omega)}{\mu\,R(\alpha,\omega)} **k(\alpha,\omega,t),\end{gathered} \tag{6.96}$$

де

$$k(\alpha,\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{i\alpha(l(t-\tau)-l(t))+i\omega\tau}d\tau. \qquad (6.97)$$

Таким чином, необхідно факторизувати новий коефіцієнт задачі $M(\alpha,\omega,t)$, де t – деякий параметр.

Література

[1] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М: "Нау-ка", 1973

[2] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М: "Наука", 1968

[3] Нобл Б. Применение метода Виннера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М: "Изд-во иностранной литеретуры". 1962

[4] Титчмарш Е. Теория функций. М: "Гостехиздат", 1951

[5] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: "Наука", 1977

[6] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М: "Наука", 1978

[7] Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М: "Мир", 1979

[8] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М: "Мир", 1974

[9] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: "Наукова Думка"

[10] Ворович И.И., Бабашко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М: "Наука", 1979

Зміст