КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Видавничо–поліграфічний центр
"Київський університет"
2006

Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу / Укладачі М. Ф. Городній, О. Ю. Константінов, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 103 с.

Рецензенти: завідувач кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики
д-р фіз.-мат. наук Ю.С. Мішура

ст. наук. співроб. відділу функ. аналізу Інституту математики НАН України
канд. фіз.-мат. наук Ю.А. Чаповський

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
30 червня 2006 року, протокол № 14

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сучасний курс функціонального аналізу, що читається для студентів спеціальностей "Математика", "Прикладна математика", "Статистика", "Системний аналіз та керування" та інших математичних спеціальностей є одним з найбільш абстрактних і важких для засвоєння дисциплін. Разом з тим елементи функціонального аналізу застосовуються в теорії ймовірностей та випадкових процесів, фінанасовій математиці, теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, гармонічному та вейвлет-аналізі та інших дисциплінах. Тому кожний кваліфікований математик обов'язково повинен оволодіти основними поняттями функціонального аналізу.

Ці навчальні завдання є результатом багаторічного досвіду викладання функціонального аналізу викладачами кафедри математичного аналізу.

Кожне заняття передбачає такі елементи:

1) підготовку студентами відповідей на контрольні питання з теми заняття (ці відповіді повинні містити основний теоретичний матеріал, необхідний для виконання запропонованих завдань);

2) розв'язування біля дошки під керівництвом викладача 3-5 основних задач, які в тексті відмічені літерою О (у коментарях до розв'язування викладач звертає увагу на типові способи і методи розв'язування задач);

3) самостійне розв'язування студентами 3-5 задач, дещо простіших, ніж у пункті 2), і відмічених літерою С (у разі необхідності викладач надає студентам відповідну допомогу);

4) виконання студентами домашнього завдання, що складається з обов'язкової частини (задачі з літерою О) та індивідуальної (задачі з літерою І).

До складу завдань для кожного заняття включені також додаткові задачі, що відмічені літерою Д. Вони містять матеріал підвищеної складності і можуть пропонуватися студентам, які успішно впоралися з основною частиною завдань.

Більшість наведених тут задач запозичена з відомої навчальної та монографічної літератури.

Студентам, що бажають поглибити свої знання, розв'язуючи складніші задачі з розглянутих в цих навчальних завданнях тем, пропонується в першу чергу такий збірник задач у двох частинах:

Збірник задач з функціонального аналізу. Розділи "Банахові простори", "Гільбертові простори", "Спряжені простори", "Теорія операторів". – К., 2004.

Збірник задач з функціонального аналізу. Розділи "Компактні оператори", "Інтегральні рівняння", "Узагальнені функції". – К., 2005.

Заняття 1
ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. ЗБІЖНІСТЬ В ЛІНІЙНИХ НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

Контрольні запитання

1. Означення лінійного простору.
2. Означення норми і лінійного нормованого простору (ЛНП).
3. Означення норм у просторах $C([a, b]), L_p(X, \lambda), 1 \le p < +\infty$, $l_p, 1 \le p \le +\infty$.
4. Означення банахового простору.
5. Означення збіжної в ЛНП послідовності.

А1

О1. Чи є нормами на відповідних просторах наведені функції:

1) $X = C([a, b]),\ \varphi(x) = \max\limits_{\frac{1}{2}(a+b) \le t \le b} |x(t)|$;

2) $X = C^1([a, b]),\ \varphi(x) = \int\limits_a^b |x'(t)|dt$;

3) $X = C^1([a, b]),\ \varphi(x) = |x(a)| + \int\limits_a^b |x'(t)|dt$;

4) $X = l_2,\ \varphi(x) = |x_1| + |x_3| + |x_5|$?

С1. Знайти норму заданого елемента в заданому просторі:
1) $x(t) = t^n$ в $C([0, 1]),\ n \ge 1$;
2) $x(t) = e^{-t}$ в $C([0, 1])$;
3) $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ в l_2; в l_∞;
4) $x = (1, i, 0, ...)$ в $l_p, 1 \le p < +\infty$;
5) $x = (1 + i, 0, ...)$ в $l_p, 1 \le p < +\infty$;
6) $x = (2 - i, 2i, 3 + 2i, 0, 0, ...)$ в l_3;
7) $x(t) = t$ в $L_4([0, 1])$;
8) $x(t) = 2^{it}$ в $L_p([0, 1]), 1 \le p < +\infty$;
9) $x(t) = \chi_{\mathbf{Q}}(t)$ в $L_1([0, 1])$.

С2. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ елемент $x \in l_p, 1 \le p \le +\infty$, якщо:
1) $x = (1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, ...)$;
2) $x = (\alpha, \alpha^2, \alpha^3, ...)$?

О2. Знайти необхідну й достатню умову на послідовність $\{\alpha_n : n \ge 1\} \subset [0, +\infty)$, щоб функція $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2\right)^{1/2}$ була нормою на l_2.

О3. Нехай X – лінійний метричний простір з метрикою ρ, яка має властивості: (i) $\{x,y,z\} \subset X\ :\ \rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)$; (ii) $\forall x \in X$ $\forall \lambda \in \mathbf{C}\ :\ \rho(0,\lambda x)=|\lambda|\rho(0,x)$.

1) Показати, що X – ЛНП з нормою $||x||=\rho(0,x)$.

2)* Навести приклад метрики на $\mathbf{R}$, що не має жодної з властивостей (i), (ii).

О4. Чи збігається у просторі $C([0,1])$ задана послідовність елементів?

1) $x_n(t)=t^n$; 3) $x_n(t)=t^n-t^{2n}$;
2) $x_n(t)=t^n-t^{n+1}$; 4) $x_n(t)=n\sin\frac{t}{n}$;

С3. Чи збігається у просторі $C^1([0,1])$ з нормою $||x||=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$ задана послідовність елементів?

1) $x_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}$; 2) $x_n(t)=\int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2n}}du$;

О5. Чи збігається у просторі $l_p,\ 1\le p\le+\infty$ задана послідовність елементів?

1) $x^{(n)}=(0,...,0,\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n},0,...)$; 3) $x^{(n)}=(\underbrace{0,...,0}_{n-1},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...)$;
2) $x^{(n)}=(\frac{1}{n},0,...,0,\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n},0,...)$; 4) $x^{(n)}=(1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},0,...)$;

О6. Чи збігаються у просторі $L_p([0,1]),\ 1\le p<+\infty$ послідовності з задачі О4?

С4. Чи збігаються у просторі $L_p(\mathbf{R}),\ 1\le p<+\infty$ задані послідовності елементів:

1) $x_n(t)=n\cdot\chi_{[0,\frac{1}{n^2}]}(t)$; 3) $x_n(t)=\frac{1}{\sqrt{t+\frac{1}{n}}}\cdot\chi_{[1,+\infty)}(t)$?
2) $x_n(t)=\frac{1}{t^4+1}\cdot\chi_{[n,+\infty)}(t)$;

Д1. Нехай $n\ge1$. Довести, що простір $C^n([a,b])$ з нормою $||x||_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\max\limits_{a\le t\le b}|x^{(k)}(t)|$ – банахів, а з нормою $||x||_{n-j}=\sum\limits_{k=0}^{n-j}\max\limits_{a\le t\le b}|x^{(k)}(t)|$ – не повний при будь-якому $j,\ 1\le j\le n$. Розглянути спочатку випадок $n=1$.

Д2. Нехай X – банахів простір. Довести, що простір неперервних обмежених функцій $C_b(\mathbf{R},X)$ з рівномірною нормою $||x||=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}||x(t)||_X$, $x\in C_b(\mathbf{R},X)$, є банаховим простором.

Д3. Нехай X – ЛНП. Довести, що:

1) $\forall x,y\in X\ :\ ||x||\le\max\{||x+y||,||x-y||\}$;

2) $\forall x, y \in X\ :\ ||x|| + ||y|| \le ||x+y|| + ||x-y||$.

Д4. Нехай X – ЛНП, $x, y \in X$ і виконується умова $||x+y|| = ||x|| + ||y||$. 1) Нехай $X = \mathbf{R}^m$ з евклідовою нормою. Довести, що x і y лінійно залежні. Чи вірно це в інших нормованих просторах? 2)* Довести, що $\forall \alpha, \beta \ge 0\ :\ ||\alpha x + \beta y|| = \alpha||x|| + \beta||y||$.

Д5.Довести, що $\forall x \in l_1\ :\ ||x||_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} ||x||_p$.

Д6 Нехай $1 \le p < r < s$. Довести, що $L_r(\mathbf{R}) \supset L_p(\mathbf{R}) \cap L_s(\mathbf{R})$.

Д7. Коли досягається рівність у нерівності: 1) Гельдера; 2) Мінковського?

Д8. Довести, що простір $BV([a,b])$ функцій обмеженої варіації на $[a,b]$ з нормою $||x|| = |x(a)| + \mathrm{Var}\,(x,[a,b])$ – банахів. Чи є він сепарабельним?

Д9. Нехай $x \in L_1([a,b])$. Довести, що $\lim\limits_{h\to 0+} \int\limits_a^{b-h} |x(t+h) - x(t)|dt = 0$.

Д10. Довести, що ЛНП X банахів $\Leftrightarrow$ будь-який ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, для якого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k|| < +\infty$, збігається в X.

В1

І1. Чи є нормами на відповідних просторах наведені функції:

1) $X = C([a,b]), \varphi(x) = \max\limits_{a \le t \le \frac{1}{2}(a+b)} |x(t)| + |x(b)|$;

2) $X = C([a,b]), \varphi(x) = \left(\int\limits_a^b \alpha(t)|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha \in C([a,b])$, $\alpha(t) > 0$, $t \in [a,b]$;

3) $X = C([a,b]), \varphi(x) = \max\limits_{a \le t \le \frac{1}{2}(a+b)} |x(t)| + \int\limits_{\frac{1}{2}(a+b)}^{b} |x(t)|dt$?

4) $X = \mathbf{R}^3,\ \varphi(x) = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3|$;

5) $X = \mathbf{R}^3,\ \varphi(x) = 4|x_1| + |x_3|$?

І2. Знайти норму заданого елемента в заданому просторі:

1) $x(t) = t^2$ в $C^1([0,1])$;

2) $x(t) = \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(t)$ в $L_2([0,1])$;

3) $x(t) = 1 - e^t$ в $L_3([0,1])$;

4) $x(t) = \sin t + \cos t$ в $L_2([0,1])$;

5) $x(t) = t\ln t$ в $L_1([1,e])$.

І3. Чи є нормами в $C^1([a,b])$ такі функції:

1) $\varphi(x) = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$;

2) $\varphi(x) = \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)|$;

3) $\varphi(x) = \max\limits_{a \le t \le \frac{1}{2}(a+b)} |x(t)| + \max\limits_{\frac{1}{2}(a+b) \le t \le b} |x'(t)|$;

4) $\varphi(x) = |x(a)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x'(t)|$;

5) $\varphi(x) = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x'(t)|$;

6) $\varphi(x) = \int\limits_a^b |x(t)|dt + \max\limits_{a\le t\le b} |x'(t)|$?

I4. Чи є нормами в $C^2([a,b])$ такі функції:

1) $\varphi(x) = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x''(t)|$;

2) $\varphi(x) = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x''(t)|$;

3) $\varphi(x) = \int\limits_a^b |x(t)|dt + |x'(a)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x''(t)|$?

O1. За якої умови на функцію $\alpha \in C([a,b])$ функція $\varphi(x) = \max\limits_{a\le t\le b} \alpha(t)|x(t)|,\ x \in C([a,b])$ є нормою в $C([a,b])$?

O2 Нехай $(T, \mathfrak{F}, \mu)$ – простір зі скінченною мірою, $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$. Довести, що:

1) $L_{p_1}(T,\mu) \supset L_{p_2}(T,\mu)$;

2) зі збіжності послідовності в $L_{p_2}(T,\mu)$ випливає її збіжність в $L_{p_1}(T,\mu)$;

3) простори $L_{p_1}(\mathbf{R})$ та $L_{p_2}(\mathbf{R})$ не вкладаються один в інший ні при яких $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$;

4) $l_{p_1} \subset l_{p_2}$.

I5. Чи збігається у просторі $C([0,1])$ задана послідовність елементів?

1) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$;

2) $x_n(t) = \sin t - \sin\frac{t}{n}$;

3) $x_n(t) = \frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}$;

4) $x_n(t) = nte^{-nt}$;

5) $x_n(t) = n\ln(1+\frac{t}{n})$;

6) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$;

7) $x_n(t) = \varphi(t+\frac{1}{n}),\ \varphi \in C(\mathbf{R})$ – фіксована функція;

I6 Послідовності з задачі I5 дослідити на збіжність в $L_p([0,1])$, $1 \le p < +\infty$.

I7. Чи збігається у просторі $l_p,\ 1 \le p \le +\infty$ задана послідовність елементів?

1) $x^{(n)} = (1, 0, ..., 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, ...)$;

2) $x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...)$;

3) $x^{(n)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, ...)$;

4) $x^{(n)} = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, ..., \tfrac{1}{n}}_{n}, 0, ...)$;

5) $x^{(n)} = (\underbrace{\tfrac{1}{\ln n}, ..., \tfrac{1}{\ln n}}_{n}, 0, ...)$;

6) $x^{(n)} = (\underbrace{1, ..., 1}_{n}, 0, ...)$;

7) $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, ..., \frac{1}{2}, 1, 0, ...)$;

8) $x^{(n)} = (\sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{2}, ..., \sqrt[n]{n}, 0, 0, ...)$;

9) $x^{(n)} = (\underbrace{(\frac{1}{2})^n, (\frac{2}{3})^n, ..., (\frac{n}{n+1})^n}_{n}, 0, 0, ...)$.

I8. Чи збігається у просторі $L_p(\mathbf{R}),\ 1 \leq p < +\infty$ задана послідовність елементів?

1) $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|+1}}\chi_{[n,2n]}(t)$;
2) $x_n(t) = ne^{-nt}$;
3) $x_n(t) = 1 - \frac{t}{n}$;
4) $x_n(t) = (\sqrt{n} - n\sqrt{n}t)\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)$.

I9.

1) Показати, що в просторі $\mathbf{R}$ кожна норма має вигляд $||x|| = \alpha|x|,\ x \in \mathbf{R}$, де $\alpha > 0$ – фіксована стала.
2) Нехай $X = \mathbf{R}^2,\ ||x||_1 := |x_1| + |x_2|, ||x||_2 := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$, $||x||_\infty = \max\limits_{i=1,2} |x_i|$. Намалювати одиничні кулі з центром у початку координат.
3) Довести, що функція $\mathbf{R}^m \ni x \mapsto ||x||_p := \left(\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ не є нормою на $\mathbf{R}^m$ при $p < 1$ і $m \geq 2$.
4) Довести, що $C([a,b]) \subset L_p([a,b]),\ 1 \leq p \leq +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$, а також $||x||_{L_p([a,b])} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}}||x||_{C([a,b])}$, $1 \leq p < +\infty,\ ||x||_{L_\infty([a,b])} = ||x||_{C([a,b])}$, $x \in C([a,b])$.
5) Для яких $1 \leq p < +\infty$ функція $x(t) = \begin{cases} n^\alpha, & \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n},\ n \geq 1, \\ 0, & t = 0,\ t = 1, \end{cases}$ належить простору $L_p([0,1])$?
6) Нехай $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$. Коли функція $x_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{t^\alpha + t^\beta}$, $t \in (0, +\infty)$, належить $L_p([0, +\infty))$?
7) Довести, що функції $1, \cos t, \cos^2 t$ лінійно незалежні, а $1, \cos^2 t, \cos 2t$ – лінійно залежні в $C([0,\pi])$.
8) Чи визначає функція $||x|| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t) - x(t)|$ норму на: $1) C^1([a,b])$? $\ 2)$ множині P_n многочленів, степені яких не перевищують $n (n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$?
9) Нехай X – ЛНП, $M \subset X$ – лінійна множина, $M \neq X$. Довести, що M не має внутрішніх точок.

Заняття 2
ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольні запитання

1. Означення скрізь щільної множини і сепарабельного ЛНП.
2. Означення лінійної оболонки(л.о.), замкненої лінійної оболонки (з.л.о.), тотальної множини.
3. Означення підпростору.
4. Теорема про ізоморфізм скінченновимірних ЛНП.

A2

O1. Довести, що:

1) система функцій $\{1, t, t^2, ...\}$ тотальна в $C([a,b])$ та $L_p([a,b])$, $1 \le p < +\infty$;
2) система функцій $\left\{t^{2k} \;:\; k \ge 0\right\}$ тотальна в $C([a,b])$ та $L_p([a,b])$, $1 \le p < +\infty$ при $a \ge 0$;
3) Довести щільність в $L_p([a,b]),\ 1 \le p < +\infty$ множини неперервних функцій x таких, що $x(a) = 0$;

O2. Нехай $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ – норми на лінійному просторі X. Довести, що якщо норми $||\cdot||_1$ і $||\cdot||_2$ еквівалентні, то послідовність $x_n \to x,\ n \to \infty$, в $(X, ||\cdot||_1)$ тоді й тільки тоді, коли $x_n \to x,\ n \to \infty$, в $(X, ||\cdot||_2)$.

O3. Довести, що:

1) збіжність в скінченновимірному ЛНП рівносильна покоординатній збіжності;

2) якщо X, Y – ізоморфні ЛНП і X – банахів простір, то Y – банахів простір;

3) кожний скінченновимірний ЛНП є банаховим;

4) кожна скінченновимірна лінійна множина в ЛНП є замкненою.

O4. Довести, що ЛНП X не є повним, якщо:

1) $X = C([a,b])$ з нормою $||x||_1 = \int\limits_a^b |x(t)|dt, x \in X$;

2) $X = C^1([a,b])$ з нормою $||x||_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|, x \in X$;

O5. Довести, що L – підпростір в $L_p([-1,1]), 1 \le p < +\infty$, якщо:

1) $L := \{x \in L_p([-1,1]) \mid x = 0 (mod \lambda)\text{на}[0,1]\}$;

2) L – множина многочленів степеня $\le m$, де $m \in \mathbf{N}$ – фіксоване.

C1. Довести, що норми $||x||_\infty = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t)|$ та $||x||_p = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < +\infty$, в $C([a,b])$ не еквівалентні.

С2. Нехай A – множина в ЛНП. Чи вірно, що л.о.$(\overline{A})$=з.л.о.(A)?

О6. Визначимо в l_∞ таку множину: $c = \left\{ x \in l_\infty \mid \exists \lim\limits_{i\to\infty} x_i \in \mathbf{K} \right\}$. Довести, що: 1) c – підпростір в l_∞; 2) c з нормою $||x|| = ||x||_\infty = \sup\limits_{i\geq 1} |x_i|,\ x \in c,$ – сепарабельний банахів простір.

О7. 1) Довести, що множина $C_0(\mathbf{R})$ фінітних неперервних на $\mathbf{R}$ функцій скрізь щільна в $L_p(\mathbf{R}),\ 1 \leq p < +\infty$; 2) Довести, що простір $L_p(\mathbf{R}),\ 1 \leq p < +\infty$, сепарабельний; 3) Показати, що твердження п. 1) неправильне при $p = \infty$; 4) Довести несепарабельність $L_\infty(\mathbf{R})$.

Д1. У просторі $C([a, b])$ розглядається норма з О1(В1). Знайти необхідну й достатню умову на функцію $\alpha \in C([a, b])$, щоб:

1) збіжність в $C([a, b])$ була рівносильна рівномірній збіжності;

2) $C([a, b])$ був повним.

Д2. Нехай K – компакт у метричному просторі $(\mathbf{R}^m, \rho)$. Довести, що простір $C(K)$ з рівномірною нормою сепарабельний.

Д3. Нехай $M = \left\{ x \in X \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$. Чи утворює M підпростір в X, якщо: 1) $X = l_1$; 2) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty$; 3) $X = l_\infty$?

Д4. Позначимо через $H^\lambda([a, b])$ множину всіх функцій, що задовольняють на $[a, b]$ умову Гельдера з показником $\lambda \in (0, 1]$, тобто $\varphi_\lambda(x) := \sup\limits_{a\leq s<t\leq b} \frac{|x(t)-x(s)|}{(t-s)^\lambda} < +\infty$. Довести, що $H^\lambda([a, b])$ – банахів простір відносно норми $||x|| = \max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)| + \varphi_\lambda(x),\ x \in H^\lambda([a, b])$. Чи є він сепарабельним?

Д5. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір з мірою, $L_\infty(T) := \{x : T \to \mathbf{R} \mid x - \mathcal{F} - \text{вимірна функція}, \exists C \geq 0\ :\ |x(t)| \leq C (\mathrm{mod}\, \mu)\}$ – множина істотно обмежених функцій, $||x||_\infty := \operatorname*{esssup}\limits_{t\in T} |x(t)| := \inf \{C \geq 0 \mid |x(t)| \leq C (\mathrm{mod}\, \mu)\}, x \in L_\infty$. Довести, що:

1) $||x||_\infty = \inf \left\{ \sup\limits_{t\in T\setminus A} |x(t)| \,|A \in \mathcal{F},\ \mu(A) = 0 \right\}, x \in L_\infty$.

2) $L_\infty(T)$ – лінійний простір;

3) якщо вважати, що $x = y$ в $L_\infty(T)$, коли $x(t) = y(t) (\mathrm{mod}\, \mu)$, то $||\cdot||_\infty$ – норма на $L_\infty(T)$;

4)* $L_\infty(T)$ – банахів простір;

5) якщо x – обмежена $\mathcal{F}$-вимірна функція, то $x \in L_\infty(T)$.

6) існують x, y – вимірні за Лебегом на $[0, 1]$ функції x, y такі, що $x \notin L_\infty([0, 1]), y \in L_\infty([0, 1])$, але y не обмежена на $[0, 1]$;

7) $L_\infty([a, b])$ несепарабельний простір;

8) $L_\infty(T)$ або скінченновимірний або несепарабельний простір;

9) $C([a,b]) \subset L_\infty([a,b])$, причому $||x||_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|, x \in C([a,b])$, але $C([a,b])$ не є скрізь щільною множиною в $L_\infty([a,b])$;

10) $L_\infty(T) \subset L_p(T), 1 \leq p < +\infty$, причому $||x||_\infty = \lim\limits_{p\to+\infty} ||x||_p$, $x \in L_\infty(T)$.

Д6. Побудувати в $L_1(\mathbf{R})$ нескінченновимірний підпростір, що:

1) складається з неперервних функцій;

2) не містить жодної ненульової неперервної функції.

Д7. Нехай X – ЛНП, $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$. Які з наведених умов рівносильні: 1) $\{x_n : n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність; 2) $||x_n - x_m|| \to 0$, $m, n \to \infty$; 3) $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} ||x_m - x_n|| = 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} ||x_m - x_n|| = 0$?

Д8*. Нехай (K, ρ) – компактний метричний простір. Довести, що: 1) якщо K – нескінченна множина, то $C(K)$ – нескінченновимірний простір; 2) якщо $\{U_i \,:\, 1 \leq i \leq n\}$ – скінченне відкрите покриття K, то існує система дійсних неперервних функцій $\{\varphi_i \,:\, 1 \leq i \leq n\}$ на K така, що: (i) $\varphi_i(t) \geq 0,\ 1 \leq i \leq n,\ t \in K$; (ii) $\varphi_i(t) = 0,\ t \notin U_i,\ i = 1, ..., n$; (iii) $\sum\limits_{i=1}^{k} \varphi_i(t) = 1,\ t \in K$ (таку систему називають *розбиттям одиниці*). 3) банахів простір $C(K)$ – сепарабельний.

Д9. Простором *локально інтегровних* з p-м степенем на вимірній множині $A \subset \mathbf{R}$ функцій називають простір

$$L_p^{loc}(A) := \left\{ f : A \to \mathbf{R} \mid \forall a, b \in \mathbf{R},\ a < b \,:\, f \cdot \chi_{[a,b]} \in L_p(A) \right\}.$$

За якої умови на функцію $g \in L_p^{loc}(\mathbf{R}),\ 1 \leq p < +\infty$, виконується рівність з.л.о. $\left\{ g \cdot \chi_{(\alpha,\beta]} \mid -\infty < \alpha < \beta < +\infty \right\} = L_p(\mathbf{R})$?

Д10. Лінійно незалежна система $\{x_\alpha \,:\, \alpha \in A\}$ елементів лінійного простору X називається *базисом Гамеля*, якщо л.о.$\{x_\alpha \,:\, \alpha \in A\} = X$. Довести, що:

1) у кожному просторі існує базис Гамеля (Вказівка. Застосувати лему Цорна до сукупності $\{\chi_A\}$ усіх систем лінійно незалежних елементів в X, ввівши на ній частковий порядок за включенням);

2) кожен елемент простору X однозначно зображується у вигляді лінійної комбінації деяких елементів з базису Гамеля простору X;

3)* у нескінченновимірному банаховому просторі не існує зліченного базису Гамеля (Вказівка. Якщо $\{e_n : n \geq 1\}$ – зліченний базис Гамеля в банаховому просторі $X, L_n :=$л.о.$(\{e_1, ..., e_n\}),\ n \geq 1$, то $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$. Далі застосувати теорему Бера про категорії.);

4) у п.3) повнота простору істотна.

Д11. Довести, що ЛНП несепарабельний тоді й тільки тоді, коли в ньому існує незліченна кількість куль деякого фіксованого радіуса $r > 0$, що попарно не перетинаються. (Вказівка. Застосувати лему Цорна.)

В2

О1. Нехай X – ЛНП, $M \subset X$. Довести, що:

1) лінійна множина M замкнена в X тоді й лише тоді, коли M – банахів простір з нормою, індукованою нормою з X;

2) л.о.(M) – лінійна множина, з.л.о.(M) – підпростір.

І1. Довести, що:

1) система функцій $\{1, \cos nt, \sin nt \ : \ n \geq 1\}$ тотальна в $L_p([0, 2\pi])$, $1 \leq p < +\infty$;
2) система функцій $\left\{e^{int} \ : \ n \in \mathbf{Z}\right\}$ тотальна в $L_p([0, 2\pi])$;
3) система функцій $\left\{e^{int} \ : \ n \in \mathbf{Z}\right\}$ тотальна в $C([a, b])$ тоді й лише тоді, коли $|b - a| < 2\pi$;
4) система функцій $\{1, \sin nt \ : \ n \geq 1\}$ тотальна в $C([a, b])$ тоді й лише тоді, коли $|b - a| < \pi$;
5) система функцій $\{1, \cos nt \ : \ n \geq 1\}$ тотальна в $C([a, b])$ тоді й лише тоді, коли $|b - a| < \pi$;
6) система елементів $\{e_n = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{n}, 0, ...) \ : \ n \geq 1\}$ тотальна в l_p, $1 \leq p < +\infty$.

І2. Чи є щільними в $L_p([a, b])$, $1 \leq p < +\infty$ множини:

1) простих функцій;
2) східчастих функцій;
3) характеристичних функцій;
4) неперервних функцій;
5) парних неперервних функцій при $[a, b] = [-1, 1]$;
6) многочленів;
7) многочленів з раціональними коефіцієнтами;
8) многочленів з цілими коефіцієнтами;
9) многочленів з нульовою сумою коефіцієнтів;
10) парних многочленів, якщо $a \geq 0$;
11) неперервних функцій x таких, що $x(a) = x(b) = 0$;
12) многочленів від $(t - \frac{a+b}{2})^2$;
13) многочленів від e^t.

І3. Чи є підпросторами в $C([-1, 1])$ такі підмножини:

1) монотонні функції;
2) неспадні функції;
3) парні функції;
4) непарні функції;
5) многочлени;
6) многочлени степеня $\leq m$ ($m \in \mathbf{N}$ – фіксоване);
7) кусково-гладкі функції;
8) неперервно диференційовні функції;
9) неперервні функції обмеженої варіації;
10) функції x, для яких $x(0) = 0$;

11) функції x, для яких $\int\limits_{-1}^{1} x(t)dt = 0$;

12) функції, що задовольняють умову Ліпшиця.

Примітка. Кусково-гладкими називають неперервні функції, що мають неперервну похідну в усіх точках, крім скінченного числа.

О2. Нехай A – сепарабельна множина в лінійному нормованому просторі X. Довести, що з.л.о.(A) є сепарабельним підпростором в X.

О3. Нехай $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ – норми на лінійному просторі X. Довести, що якщо норми $||\cdot||_1$ і $||\cdot||_2$ еквівалентні, то топології (тобто класи відкритих множин) у просторах $(X, ||\cdot||_1)$ і $(X, ||\cdot||_2)$ збігаються.

О4. Нехай $||\cdot||_1$ і $||\cdot||_2$ – еквівалентні норми на лінійному просторі X. Довести, що якщо простір $(X, ||\cdot||_1)$ сепарабельний, то простір $(X, ||\cdot||_2)$ теж сепарабельний.

О5. Нехай X – ЛНП. Довести, що X сепарабельний тоді й тільки тоді, коли існує $r > 0$ таке, що сфера $S(0, r)$ – сепарабельний метричний простір.

О6. Визначимо в l_∞ множину $c_0 := \left\{ x \in l_\infty \mid \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0 \right\}$. Довести, що: 1) c_0 – підпростір в l_∞; 2) c_0 з нормою $||x|| = ||x||_\infty = \sup\limits_{i\geq 1} |x_i|$ – сепарабельний банахів простір.

О7. Чи є повним простір l_1 з нормою простору l_2?

І4. Довести безпосередньо повноту просторів

1) $\mathbf{C}^m$ з нормою $||x||_\infty = \max\limits_{1\leq k\leq m} |x_k|$;

2) $l_p,\ 1 \leq p < +\infty$ з нормою $||x||_p := \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$;

3) l_∞ з нормою $||x||_\infty = \sup\limits_{k\geq 1} |x_k|$.

Заняття 3
ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення скалярного добутку; його властивості.
2. Означення гільбертового простору.
3. Рівність паралелограма та поляризаційна тотожність.
3. Ортогональне доповнення множини у гільбертовому просторі. Теорема про розклад гільбертового простору.
4. Означення ортогональної, ортонормованої, повної системи, ортонормованого базису.

А3

О1. Довести, що: 1) функція $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}dt + \int\limits_a^b x'(t)\overline{y'(t)}dt$, $\{x, y\} \subset C^1([a, b])$, визначає скалярний добуток у лінійному просторі $C^1([a, b])$;

2) простір $C^1([a, b])$ з цим скалярним добутком не є повним. (Поповнення $W_2^1([a, b])$ простору $C^1([a, b])$ за нормою, породженою цим скалярним добутком, називається соболєвським простором).

О2. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$, $\forall k \geq 1 \ : \ \alpha_k > 0$; $l_{2,\alpha}$ – множина всіх числових послідовностей $x = (x_1, x_2, ...)$, які задовольняють умову $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2 < \infty$. Перевірити, що $l_{2,\alpha}$ зі скалярним добутком $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \overline{y_k}$, $\{x, y\} \subset l_{2,\alpha}$, є гільбертовим простором.

З'ясувати, для яких α : $l_{2,\alpha} \subset l_2$.

О3. Довести, що в просторі $C([0, 1])$ норма не породжується скалярним добутком.

О4. Нехай L і M – підпростори в гільбертовому просторі H, причому $L \perp M$.

1) Довести, що для всіх $x \in L \bigoplus M$ зображення $x = x' + x''$, $x' \in L$, $x'' \in M$ єдине.

2) Нехай $H = L \bigoplus M$. Довести, що $M^\perp = L$.

О5. Знайти ортогональне доповнення в $L_2([-1, 1])$ до множини усіх парних функцій.

О6. Нехай $L \subset H$. Довести, що $L^\perp = \{0\} \ \Leftrightarrow \ L$ – тотальна в H.

О7. Знайти в $L_2([-1, 1])$ ортогональне доповнення до множини:

1) $C([0,1])$; 2) $\left\{t^k \mid k \geq 0\right\}$; 3) $\left\{t^k \mid k \geq 10\right\}$;

О8. Знайти в $L_2([-\pi,\pi])$ ортогональне доповнення до множин:

1) $\{\sin kt \mid k \geq 1\}$; 2) $\left\{e^{ikt} \mid k \geq 5\right\}$; 3) $\left\{t^{2k} \mid k \geq 0\right\}$.

С1. Знайти в l_2 ортогональне доповнення до множин:

1)$\{(1,1,0,...)\}$; 2)$\{e_k,\ 1 \leq k \leq n\},\ n \in \mathbf{N}$; 3) $\{e_{2k} \mid k \in \mathbf{N}\}$.

Д1. 1)* Довести, що $W_2^1([a,b]) \subset C([a,b])$.

2) Знайти ортогональне доповнення до множини $\left\{e^{ikt} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ у просторі $W_2^1([-\pi,\pi])$.

Д2. Розглянемо простір $H := \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \mid \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \neq 0\}$ – не більш ніж злічення множина, $\sum\limits_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|^2 < +\infty\}$. Довести, що H – несепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(f,g) = \sum\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x)g(x),\ f,g \in H$.

Д3. Довести, що система функцій Хаара $\{x_{kn} \mid 1 \leq k \leq 2^n,\ n \geq 0\} \cup \{x_0\}$, де $x_{kn}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & t \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}), \\ -2^{\frac{n}{2}}, & t \in [\frac{k-\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{k}{2^n}), \\ 0, & t \in [0,1] \backslash [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}], \end{cases}$ $x_0(t) = 1,\ t \in [0,1]$, є ортонормованим базисом у просторі $L_2([0,1])$.

Д4. Перевірити ортогональність у H таких систем:

1) $x_n(t) = \begin{cases} (-1)^m, & t \in [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}),\ m = 0,1,...,2^n-1, \\ -1, & t = 1; \end{cases}$
   $n \geq 1$, – функції Радемахера, $H = L_2([0,1])$;
2) $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,\ n \geq 0$ – многочлени Лежандра, $H = L_2([-1,1])$;
3) $H_n(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2},\ n \geq 0$ – функції Ерміта, $H = L_2(\mathbf{R})$;
4) $x_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}[(t-a)(t-b)]^n,\ n \geq 0$, $H = L_2([a,b])$;
5) $x_n(t) = e^{\frac{t}{2}} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}),\ n \geq 0$, – функції Лагерра, $H = L_2([0,+\infty))$.

Показати, що системи з у п.п. 2,4 є ортогональними базисами у відповідних просторах. У п. 1 перевірити, що функція $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ ортогональна до всіх x_n (звідси випливає, що система з п. 1 не є ортонормованим базисом).

Д5. Нехай L – лінійна оболонка множини $\left\{e^{i\lambda t} \mid \lambda \in \mathbf{R}\right\}$, в якій визначений скалярний добуток $(x,y) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t)\overline{y(t)}dt,\ \{x,y\} \subset L$.

Довести, що:

1) $(e^{i\lambda t}, e^{i\mu t}) = \delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu, \\ 0, & \lambda \neq \mu, \end{cases} \quad \{\lambda, \mu\} \subset \mathbf{R};$

2) поповнення множини L несепарабельне.

Д6. Нехай M, N – підпростори гільбертового простору H і $\forall x \in H$ $\exists! x_1 \in M$ $\exists! x_2 \in N$: $x = x_1 + x_2$. Чи правильно, що $N = M^{\perp}$?

Д7. Нехай $\{x_n : n \geq 1\}$ – довільна зліченна система функцій з $L_2([a.b])$, $c > b$. Довести, що функції x_n можна так продовжити на відрізок $[b, c]$, щоб отримати ортогональну систему на $L_2([a, c])$.

Д8. Нехай M і N – підпростори в гільбертовому просторі H. Довести, що: 1) не обов'язково $M + N$ – підпростір в H (розглянути випадок $H = l_2$, $N = \{(x_1, 0, x_3, 0, ...) \mid x \in l_2\}$, $M = \left\{(x_1, x_1, x_3, \frac{x_3}{3}, x_5, \frac{x_5}{5}, ...) \mid x \in l_2\right\}$ і встановити, що $M + N$ скрізь щільна в l_2, але $M + N \neq l_2$); 2) $M + N$ – підпростір в H, якщо $M \perp N$.

Д9. Довести, що система $\{t^n,\ t \in [0,1] : n \geq 0\}$ – лінійно незалежна, її замкнена лінійна оболонка дорівнює $L_2([0,1])$, але вона не є базисом в $L_2([0,1])$, тобто не для всіх $x \in L_2([0,1])$ існують коефіцієнти $\{c_n : n \geq 0\}$ такі, що $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ в $L_2([0,1])$ (збіжність розуміти, як збіжність в $L_2([0,1])$). Чи немає тут суперечності? Чому?

Д10*. Довести, що в ЛНП $(X, ||\cdot||)$ можна ввести скалярний добуток $(\cdot,\cdot)$, для якого $||x||^2 = (x, x),\ x \in X$, тоді й тільки тоді, коли для всіх $\{x, y\} \subset X$ виконується рівність паралелограма.

В3

І1. З'ясувати, чи визначає скалярний добуток в $\mathbf{R}^2$ функція $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, якщо:

1) $\varphi(x, y) = x_1 + x_2$;
2) $\varphi(x, y) = x_2 y_2$;
3) $\varphi(x, y) = 3x_1 x_2 + 2y_1 y_2$;
4) $\varphi(x, y) = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2$;
5) $\varphi(x, y) = 3x_1 y_1 - 2x_2 y_2$,

де $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$.

О1. Нехай p – вимірна за Лебегом функція на (a, b) така, що $p(t) > 0$ для майже всіх $t \in (a, b)$, і $L_{2,p}([a, b]) = \left\{x \mid \sqrt{p}\, x \in L_2([a, b])\right\}$. 1) Довести, що $L_{2,p}([a, b])$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком: $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)} p(t) dt$.

2)* Довести,що включення $L_{2,p}([a, b]) \subset L_2([a, b])$ справджується тоді й лише тоді, коли $\exists \varepsilon > 0 : p(t) \geq \varepsilon > 0 (\mathrm{mod}\, \mathrm{m})$.

I2. Довести, що в гільбертовому просторі над числовим полем $\mathbf{K}$ елементи x і y ортогональні тоді й тільки тоді, коли:

1) $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ при $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;

2) $||\lambda x + \mu y||^2 = ||\lambda x||^2 + ||\mu y||^2$ для довільних $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ при $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

O2. Нехай $\{x_k \ : \ k \geq 1\}$ – ортогональна система в гільбертовому просторі H. Довести, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ збігається в H тоді й лише тоді, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k||^2 < \infty$.

O3. Довести, що в лінійних нормованих просторах $c_0, \ l_p, \ L_p([a,b]), \ p \neq 2$, норма не породжується скалярним добутком.

I3. Нехай H – гільбертів простір і $\{x_n : \ n \geq 1\} \subset H, \{y_n : \ n \geq 1\} \subset H$, $||x_n|| = 1, \ ||y_n|| = 1, \ n \geq 1$. Довести правильність таких тверджень:

1) $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ \Rightarrow \ ||x_n - y_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

2) $||x_n + y_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \ \Rightarrow \ ||x_n - y_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

O4. Нехай $L = \{x \in L_2(\mathbf{R}) \mid x(t) = 0, \ t \geq 0 \ (\mathrm{mod}\, m)\}$. Довести, що L підпростір та знайти ортогональне доповнення до L

O5. 1) Довести, що для довільного $M \subset H$ ортогональне доповнення $M^{\perp}$ є підпростором.

2) Нехай $M \subset N \subset H$. Довести, що $M^{\perp} \supset N^{\perp}$.

3) Довести, що для довільного $M \subset H$ має місце $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

4) Рівність $M = (M^{\perp})^{\perp}$ має місце тоді й лише тоді, коли M – підпростір.

I4. Знайти в l_2 ортогональне доповнення до множин:

1) $\{(2,0,3,0,0,...)\}$;

2) $\{e_{2k+1} \mid k \in \mathbf{N}\}$.

3) $\left\{x = \left\{\alpha^k \ : \ k \geq 0\right\} \mid \alpha \in [0,1]\right\}$;

4) $\left\{x = \left\{\frac{1}{n^k} \ : \ k \geq 0\right\} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

I5. Знайти в $L_2([0,1])$ ортогональне доповнення до множини:

1) $P([0,1])$ усіх многочленів, що розглядаються на $[0,1]$;

2) $\left\{x \mid x(t) = y(t^2), \ t \in [0,1], \ y \in P([0,1])\right\}$;

3) $\{x \in P([0,1]) \mid x(0) = 0\}$;

4) $\left\{e^{kt} \mid k \geq 0\right\}$;

5) $\left\{t^{2k} \mid k \geq 0\right\}$;

6) $\left\{t^{3k} \mid k \geq 4\right\}$.

I6. Знайти в $L_2([-1,1])$ ортогональне доповнення до множини:

1) $\left\{t^k \mid k \geq 13\right\}$; 4) $\left\{t^{2k} \mid k \geq 7\right\}$;

2) $\left\{t^{2k} \mid k \geq 0\right\}$;

3) $\left\{t^{2k+1} \mid k \geq 0\right\}$; 5) непарних функцій.

17. Знайти в $L_2([-\pi, \pi])$ ортогональне доповнення до множин:

1) $\{\cos kt \mid k \geq 1\}$; 2) $\left\{e^{-ikt} \mid k \geq 3\right\}$.

18. У гільбертовому просторі H знайти відстань від елемента $y \in H$ до підпростору L, якщо:

1) $y(t) = e^t,\ L =$ л.о.$\{1, t, t^2\},\ H = L_2([-1, 1])$;
2) $y(t) = t^3,\ L =$ л.о.$\{1, t, t^2\},\ H = L_2([0, 1])$;
3) $y(t) = t,\ L =$ л.о.$\{\sin t, \cos t\},\ H = L_2([-\pi, \pi])$;
4) $y(t) = \sin 3t,\ L =$ л.о.$\{1, \cos t, \cos 2t\},\ H = L_2([-\pi, \pi])$;
5) $y(t) = 1,\ L =$ л.о.$\{\chi_{[0,2]}, \chi_{[1,3]}\},\ H = L_2([0, 5])$;
6) $y(t) = \chi_{[4,5]},\ L =$ л.о.$\{\chi_{[0,2]}, \chi_{[1,3]}\},\ H = L_2([0, 5])$.

19. 1) Довести, що будь-яка ортонормована система в гільбертовому просторі є лінійно незалежною.

2) Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K},\ \{e_n : n \geq 1\} \subset H$ – ортонормована система і $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, де $x_n \in \mathbf{K},\ n \geq 1$. Довести, що $x_n = (x, e_n),\ n \geq 1$.

3) Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – послідовність елементів гільбертового простору H така, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n = 0$ для деякої послідовності $\{c_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{K}$. Чи правильно, що $c_n = 0,\ n \geq 1$, якщо: a) $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортогональна система? b) $\{e_n : n \geq 1\}$ – лінійно незалежна система?

4) Нехай $M \subset H$, де H – гільбертів простір. Чи завжди вірна формула $H = M \bigoplus M^{\perp}$?

5) Нехай L – одновимірний підпростір у гільбертовому просторі H, $a \in L,\ a \neq \overline{0}$. Довести, що $\forall x \in H\ :\ \rho(x, L^{\perp}) = \frac{|(x,a)|}{||a||}$.

6) Довести, що система функцій $\left\{e^{2\pi int} \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ утворює ортонормований базис в $L_2([0, 1])$.

7) Довести, що система функцій $\left\{e^{-int} \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ повна в $L_2([a, b])$ тоді й тільки тоді, коли $b - a \leq 2\pi$.

8) Довести, що одинична куля у нескінченновимірному гільбертовому просторі H містить безліч куль радіуса $\frac{1}{4}$, що попарно не перетинаються. (Вказівка: розглянути випадок $H = l_2$). Показати, що в H не існує ненульової міри (аналогічної мірі Лебега в $\mathbf{R}^m$), визначеної на борельових підмножинах H, інваріантної відносно паралельних перенесень і такої, що набуває скінченних значень на обмежених множинах.

Заняття 4
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ

Контрольні запитання

1. Означення лінійного функціонала.

2. Означення неперервного і обмеженого функціонала та їх зв'язок.

3. Означення норми лінійного неперервного функціонала(ЛНФ).

А4

О1. З'ясувати, чи є наведені функціонали в $C([0,1])$ лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти їх норми за означенням:

1) $f(x) = x(0)$;
2) $f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt$;
3) $f(x) = ||x||$;
4) $f(x) = 2x(0) - x(1)$;
5) $f(x) = x(0) - 3x(\frac{1}{2}) + 2x(1)$;
6) $f(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt - \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt$;
7) $f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt - 2x(0)$.

О2. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$;
2) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})x_n$;
3) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$;
4) $X = l_1, l_2, l_\infty,\ f(x) = x_1 - 2x_2 + (1+i)x_3$;
5) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$;

О3. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = L_2([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}(t - \frac{1}{2})dt$;
2) $X = L_2([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|^{\frac{3}{4}} dt$;
3) $X = L_p([0,\frac{\pi}{2}]),\ p = 1; +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sin t dt$;

О4. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = C^1([0,1])$ з нормою $||x||_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$,

$f(x) = x'(0)$;

2) $X = C^1([0,1])$ з рівномірною нормою $||x|| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$,

$f(x) = x'(0)$;

С1. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$. Довести, що область значень ненульового лінійного функціонала на X збігається з $\mathbf{K}$.

Д1. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$. Довести, що:

1) $||f|| = \sup\limits_{||x||\leq 1} f(x)$, якщо простір X дійсний;

2) $||f|| = \sup\limits_{x\in M, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||}$, де M – скрізь щільна множина в X.

Д2. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = \left\{ x \in L_2([0,1]) \mid \int\limits_0^1 |x(t^\alpha)| dt < +\infty \right\}$,

$|| \cdot ||_X := || \cdot ||_{L_2([0,1])}$, $f(x) = \int\limits_0^1 x(t^\alpha) dt$, $\alpha > 0$;

2) $X = C([0,1])$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x(t^n) dt$;

3) $X = \left\{ x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \sin n \text{ – збіжний} \right\}$, $|| \cdot ||_X := || \cdot ||_{l_2}$,

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \sin n$;

4) $X = \left\{ x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n^2} \text{ – збіжний} \right\}$, $|| \cdot ||_X := || \cdot ||_{l_2}$,

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n^2}$;

5) $\{y_n : n \geq 1\}$ така, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ збіжний умовно,

$X = \left\{ x \in l_\infty \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n \text{– збіжний} \right\}$, $|| \cdot ||_X := || \cdot ||_{l_\infty}$,

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Д3. Нехай X – ЛНП, f – лінійний функціонал на X. Довести, що
1) $\mathrm{Ker}\, f$ – лінійна множина;
2) якщо $z \in X \backslash \mathrm{Ker}\, f$, то $\forall x \in X\ \exists! y \in \mathrm{Ker}\, f\ \exists! \lambda \in \mathbf{K}\ :\ x = y + \lambda z$.

Д4. Лінійний функціонал $f : C([a,b]) \to \mathbf{R}$ називають невід'ємним, якщо для довільного $x \in C([a,b]),\ x(t) \geq 0,\ t \in [a,b]$, виконується нерівність $f(x) \geq 0$. Довести, що невід'ємний функціонал неперервний, причому $||f|| = f(x_1)$, де $x_1(t) = 1, t \in [a,b]$.

Д5. Знайти норму функціонала $C([a,b]) \ni x \mapsto \int\limits_a^b p(t)x(t)dt$, де p – фіксована функція з $C([a,b])$. (Вказівка: скористатися тим, що неперервна функція є рівномірною границею кусково-сталих функцій).

Д6***.** Довести, що лінійний функціонал f на комплексному ЛНП X неперервний тоді й лише тоді, коли $\mathbf{C} \backslash f(B(0,1)) \neq \varnothing$.

Д7***.** Довести, що лінійний функціонал f в ЛНП X неперервний тоді й лише тоді, коли його ядро $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ замкнене в X.

В4

О1. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}(t - \frac{1}{2})dt$;

2) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 \mathrm{sign}\, x(t)dt$;

3) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$;

4) $X = L_p([0,1]),\ p = 1; +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt$;

І1. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:
1) $X = C([a,b]),\ f(x) = x(\frac{a+b}{2})$;
2) $X = C([a,b]),\ f(x) = x(a) - x(b)$;
3) $X = C([-1,1]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^1 x(t)\,\mathrm{sign}\, t dt$;
4) $X = C([0,1])$ з нормою $||x|| = \int\limits_0^1 |x(t)|dt,\ f(x) = x(1)$;

І2. З'ясувати, чи є наведені функціонали в $C([0,1])$ лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти їх норми за означенням:

1) $f(x) = \int\limits_0^1 tx^2(t)dt;$

2) $f(x) = \int\limits_0^1 (1-2t)x(t)dt;$

3) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\cos\pi t dt;$

4) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\sin\pi t dt;$

5) $f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|\cos\pi t dt;$

6) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - x(0);$

7) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x(\frac{1}{2^n});$

8) $f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt - x(\frac{1}{2};$

I3. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$
де $y \in l_\infty$ – фіксований;
2) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n}{n};$
3) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-(-1)^n)\frac{n-1}{n} x_n;$
4) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = \mathrm{sign}(x_1);$
5) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = x_j,\ j \in \mathbf{N}$ – фіксоване;
6) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = x_j + x_{j+1},\ j \in \mathbf{N}$ – фіксоване;
7) $X = l_p,\ p = 1; +\infty,\ f(x) = x_1 + 2x_2.$

I4. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = L_2([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 \frac{x(t)}{\sqrt[4]{t}} dt;$
2) $X = L_p([0,1]),\ p = 1; +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} tx(t)dt;$
3) $X = L_p([0,2]),\ p = 1; +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - 3\int\limits_1^2 x(t)dt;$
4) $X = L_1(\mathbf{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} x(t)\,\mathrm{arctg}\, t dt.$

I5. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = C^1([0,1])$ з рівномірною нормою, $f(x) = \int\limits_0^1 x'(t)\,\mathrm{sign}\,\pi t dt;$

2) $X = C^1([0,1])$ з нормою $||x|| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$,

$f(x) = x'(0) + x(1)$;

3) $X = C([0,1])$, $f(x) = \int\limits_0^1 x(\sqrt{t})dt$;

4) $X = C([0,1])$, $f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2)dt$;

5) $X = c$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

O2. Навести приклад лінійного неперервного функціонала f на $C([0,1])$, для якого: 1) не існує елемента $x_0 \in C([0,1])$, $||x_0|| = 1$, такого, що $|f(x_0)| = ||f||$; 2) існує безліч елементів $x_0 \in C([0,1])$, $||x_0|| = 1$, таких, що $f(x_0) = ||f||$; 3) існує єдиний елемент $x_0 \in C([0,1])$, $||x_0|| = 1$, такий, що $f(x_0) = ||f||$.

I6. Нехай X – ЛНП, $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$, $||f_n|| \leq 1$, $n \geq 1$. Покладемо $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x)$, $x \in X$. Довести, що $f \in X^*$.

I7. 1) Знайти загальний вигляд лінійного функціонала на скінченновимірному ЛНП і довести, що кожний лінійний функціонал на цьому просторі є неперервним;

2) Описати всі множини $M \subset \mathbf{R}^2$, для яких існує лінійний функціонал f на $\mathbf{R}^2$ такий, що $\mathrm{Ker}\, f = M$. Аналогічне завдання для $\mathbf{R}^3$.

Заняття 5
СПРЯЖЕНІ ПРОСТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення спряженого простору.
2. Теореми про загальний вигляд ЛНФ у гільбертовому просторі, $C([a,b])$, $L_p(T,\mu),\ l_p,\ 1 \le p < +\infty$.

A5

O1. Нехай $1 \le p \le +\infty$ фіксоване. Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів та знайти їх норми:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$;

2) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n(n+1)}}$;

3) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x_n}{2^n}$;

4) $X = l_{\frac{4}{3}},\ f(x) = x_1 + \sqrt[4]{3} x_3$;

5) $X = L_1(\mathbf{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} x(t) \operatorname{arcctg} t dt$;

6) $X = L_2([0,2\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^{\pi} x(t) \sin t dt$;

7) $X = L_p([1,4]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_1^2 t x(t) dt - 2\int\limits_3^4 x(t) dt$;

C1. Нехай X – лінійний простір $\mathbf{R}^2$ з нормою $||x|| = |x_1| + |x_2|, x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Описати X^*. Довести, що функціонал $f : X \to \mathbf{R}$ належить до X^* та знайти його норму, якщо:

1) $f(x) = x_1 - x_2$; 2)$f(x) = 2x_1$.

O2. Користуючись описом спряженого простору $(C([a,b]))^*$, довести, що наведені функціонали є лінійними неперервними на $C([a,b])$ і знайти їх норми:

1) $f(x) = x(a) - x(b)$;
2) $f(x) = x(0) - x(-1) - x(1), a = -1, b = 1$;
3) $f(x) = x(0) + \int\limits_0^1 t^2 x(t) dt, a = 0, b = 1$;
4) $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t) dt - \int\limits_0^1 x(t) dt, a = -1, b = 1$.

С2. Нехай $1 \le p < +\infty$ фіксоване. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ наведені функціонали належать відповідним спряженим просторам? Знайти норми цих функціоналів.

1) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^\alpha};$

2) $X = L_p([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 \frac{x(t)}{t^\alpha} dt;$

О3. Довести, що функціонал $f(x) = \int\limits_a^b p(t)x(t)dt,\ x \in C([a,b])$, є лінійним неперервним функціоналом і знайти його норму, якщо:

1) $p \in C([a,b])$ – фіксована функція;

2)* $p \in L_1([a,b])$ – фіксована функція.

О4. Довести, що $l_1^* = l_\infty$.

Д1. Довести, що $c_0^* = l_1$, причому загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на c_0 задається формулою $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n a_n$, $x \in c_0$, де $a = (a_1, ..., a_n, ...) \in l_1$ – фіксований елемент, $||f|| = ||a||_1$.

Д2. Довести, що $c^* = l_1$, причому загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на c задається формулою $f(x) = a_0 \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n,\ x \in c$, де $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...) \in l_1$ – фіксований елемент, $||f|| = ||a||_1$.

Д3. Знайти загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в банаховому просторі $C^1([a,b])$.

Д4. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$, f – лінійний функціонал на X. Довести, що кожна з наступних умов рівносильна неперервності f:

1) існує $R > 0$ таке, що множина $f(\overline{B}(0,R))$ обмежена;
2) для будь-якої збіжної до нуля послідовності $\{x_n : n \ge 1\} \subset X$ множина $\{f(x_n) : n \ge 1\}$ обмежена;
3) для довільного $c \in \mathbf{R}$ множина $\{x \mid f(x) < c\}$ відкрита, якщо $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;
4) $\exists C > 0 : \{x \mid |f(x)| \le C\}$ має внутрішні точки.

Д5. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$, $f, g \in X^*$, $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$. Довести, що $\exists \alpha \in \mathbf{K} : g = \alpha f$.

Д6. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$, f – ненульовий лінійний функціонал на X. Довести, що f – відкрите відображення, тобто образ довільної відкритої множини в X при відображенні f є відкритою множиною в $\mathbf{K}$.

Д7*. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$. Довести, що $\forall x \in X : |f(x)| = ||f|| \cdot \rho(x, \mathrm{Ker}\, f)$, де $\rho(x, \mathrm{Ker}\, f) = \inf\limits_{y \in \mathrm{Ker}\, f} ||x - y||$.

Д8*. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$. 1) Довести, що для того, щоб існував елемент $z_0 \in \overline{B}(0,1)$ такий, що $|f(z_0)| = ||f||$, необхідно, щоб для будь-якого $x_0 \in X$, і достатньо, щоб для деякого $x_0 \in X \backslash \mathrm{Ker}\, f$ існував елемент $y_0 \in \mathrm{Ker}\, f$ такий, що $\rho(x_0, \mathrm{Ker}\, f) = ||x_0 - y_0||$ (тобто елемент найкращого наближення для елемента x_0 в $\mathrm{Ker}\, f$).

2) За якої умови на функціонал f для кожного елемента $x_0 \in X$ існує не більше одного елемента найкращого наближення в $\mathrm{Ker}\, f$?

Д9. Довести, що для кожного функціонала $f \in (C([a,b]))^*$ існують невід'ємні функціонали f_1 і f_2 такі, що $f = f_1 - f_2$.

Д10. Довести, що в нескінченновимірному ЛНП існують лінійні розривні функціонали.

В5

О1. Довести, що $l_1 \subset (l_\infty)^*$, тобто що для довільного елемента $a = (a_1, ..., a_n, ...) \in l_1$ функціонал $f_a(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n, x = (x_1, ..., x_n, ...) \in l_\infty$, є лінійним неперервним функціоналом на l_∞ і $||f_a|| = ||a||_\infty$.

О2. Довести, що $L_1(T, \mathcal{F}, \mu) \subset (L_\infty(T, \mathcal{F}, \mu))^*$, тобто що для довільного елемента $h \in L_1(T, \mathcal{F}, \mu)$ функціонал $f(x) := \int\limits_T h(t)x(t)d\mu(t)$, $x \in L_1(T, \mathcal{F}, \mu)$, є лінійним неперервним функціоналом на $L_\infty(T, \mathcal{F}, \mu)$ і $||f|| = ||h||_\infty$.

О3. Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів в просторі X:

1) $X = C([-1,1]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt - x(0);$

2) $X = C([a,b]),\ f(x) = x(\frac{a+b}{2}) - \int\limits_a^b x(t)dt;$

3) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(x_k + x_{k+1});$

4) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k};$

5) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt - \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} x(t)dt.$

І2. Користуючись описом спряженого простору $(C([a,b]))^*$, довести, що наведені функціонали є лінійними неперервними на $C([a,b])$ і знайти їх норми:

1) $X = C([a,b]),\ f(x) = \frac{1}{2}(x(a) + x(b));$

2) $X = C([0,2]),\ f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt;$

3) $X = C([0,3]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt + \int\limits_2^3 tx(t)dt;$

4) $X = C([0,2]),\ f(x) = \int\limits_0^1 (1-2t)x(t)dt - x(0) + 2x(2);$

5) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^\pi x(t)\cos t dt - 2x(0);$

6) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^\pi x(t)|\cos t| dt - 4x(1);$

7) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^\pi x(t)\sin t dt - 5x(\pi);$

8) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^{\ln 2} e^t x(t)dt + x(1);$

9) $X = C([-1,2]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^1 |t|x(t)dt + 3\int\limits_1^2 x(t)dt - 2x(0);$

10) $X = C([0,1]),\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} x(\frac{1}{n});$

11)* $X = C([0,1]),\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} x(\frac{1}{n^2});$

12)* $X = C([0,1]),\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2^n} x(1-\frac{1}{n});$

13)* $X = C([a,b]),\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k x(t_k)$, де $t_1, ..., t_n$ – набір різних точок з $[a,b]$, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – набір дійсних чисел;

14) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2)dt.$

I3. Нехай $1 \le p \le +\infty$ фіксоване. Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів та знайти їх норми:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty x_n \operatorname{arctg} n;$

2) $X = l_{\frac{7}{5}},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{x_{3n}}{\sqrt[7]{k^4}};$

3) $X = l_p,\ f(x) = x_j,$
де $j \in \mathbf{N}$ – фіксоване;

4) $X = l_p,\ f(x) = 2x_1 + 4x_2;$

5) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{x_n}{2^n};$

6) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{2^{n/2}} x_n;$

11) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = x_j + x_{j+1},\ j$ – фіксоване;
12) $X = L_1(\mathbf{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} x(t)\operatorname{arctg}(t+1)dt;$
13) $X = L_p([-1,3]),\ f(x) = \int\limits_0^2 e^t x(t)dt - \int\limits_2^3 x(t)dt;$
14) $X = L_p(\mathbf{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-t^2} x(t)dt;$
15) $X = L_\infty([0,+\infty)),\ f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2} x(t)dt;$
16) $X = L_\infty([0,+\infty)),\ f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} x(t)dt.$

I4. Нехай $1 \le p < +\infty$ фіксоване. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ наведені функціонали належать відповідним спряженим просторам? Знайти норми цих функціоналів.

1) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n((n+1)^\alpha - n^\alpha);$
2) $X = L_p([0,+\infty)),\ f(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} x(t)dt;$
3) $X = L_p([1,+\infty)),\ f(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x(t)}{t^\alpha} dt;$
4) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n x_n.$

O1. 1) Знайти загальний вигляд лінійного функціонала на скінченновимірному ЛНП і довести, що кожний лінійний функціонал на цьому просторі є неперервним;

2) Описати всі множини $M \subset \mathbf{R}^2$, для яких існує лінійний функціонал f на $\mathbf{R}^2$ такий, що $\operatorname{Ker} f = M$. Аналогічне завдання для $\mathbf{R}^n$.

I5. Нехай X – ЛНП, $f \in X^* \backslash \{0\},\ L := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Довести, що $\frac{1}{||f||} = \inf\limits_{x \in L} ||x||$.

I6. Нехай X – ЛНП. 1) Чи може існувати функціонал $f \in X^*$, для якого $\exists! x_0 \in \overline{B}(0,1)\ :\ a)|f(x_0)| = ||f||?\ b) f(x_0) = ||f||?$

2) Нехай $f \in X^*$. Чи правильно, що: a) якщо $x \in X,\ |f(x)| = ||f||$, то $||x|| = 1$? b) якщо $x \in \overline{B}(0,1),\ |f(x)| = ||f||$, то $||x|| = 1$?

3) Нехай $f \in X^*$. Розглянемо твердження: a) $\exists x \in X,\ x \neq 0\ :\ |f(x)| = ||f|| \cdot ||x||$; b) $\exists x \in \overline{B}(0,1)\ :\ |f(x)| = ||f||$; c) $\exists x \in \overline{B}(0,1)\ :\ f(x) = ||f||$. Які з цих тверджень є еквівалентними?

4) Нехай X_1, X_2 – ЛНП такі, що $X_1 \subset X_2$ і зі збіжності $x_n \to x$ в X_1 випливає збіжність $x_n \to x$ в X_2. Довести, що $X_1^* \supset X_2^*$.

5) В яких ЛНП X існує функціонал $f \in X^*$ такий, що: a) $|f(x)| = ||f|| \cdot ||x||,\ x \in X$? b) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$?

Заняття 6
ТЕОРЕМА ГАНА-БАНАХА. СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ

Контрольні запитання

1. Теорема Гана – Банаха. Її наслідки.
2. Означення сильної, слабкої збіжності.
3. Критерії слабкої збіжності в довільному ЛНП, у просторах $l_p, L_p(\mathbf{R})$, $1 < p < +\infty,\ C([a,b])$.
4. Означення рефлексивного простору.

А6

О1. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП X (для збіжних послідовностей знайти границі):

1) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (0, ..., 0, \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{n}, 0, ...);$

2) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...);$

3) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p \leq +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} n, & t \in [0, \frac{1}{n^2}], \\ 0, & t \in (\frac{1}{n^2}, 1]; \end{cases}$

4) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \sin \pi n t,\ t \in [0,1];$

5) $X = C([0,1]),\ x_n(t) = t^n - t^{2n},\ t \in [0,1];$

6) $X = C([0,1]),\ x_n(t) = t^n,\ t \in [0,1];$

7) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 < p < +\infty,\ \ x_n(t) = \frac{1}{1+(t-n)^2},\ t \in [0,1].$

О2. Довести, що послідовність функціоналів $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ є слабко збіжною, якщо:

1) $X = L_p([0, 2\pi]),\ 1 < p < +\infty,\ f_n(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(t) \sin^2 nt dt;$

2) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = \sqrt{n} \int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} x(t) dt.$

О3. У просторі $\mathbf{R}^2$ на підпросторі $G := \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbf{R}\}$ задано функціонал $f(x) = \alpha x_1,\ x = (x_1, 0) \in G$, де $\alpha \in \mathbf{R}$ – фіксоване. Описати всі лінійні продовження F функціонала f на $\mathbf{R}^2$. Для яких із цих продовжень $||F|| = ||f||$, якщо $\mathbf{R}^2$ розглядати з нормою $||\cdot||_p,\ 1 \leq p \leq +\infty$? В яких випадках продовження, що зберігає норму, єдине?

О4. Нехай G – підпростір гільбертового простору H і $f \in G^*$. Описати всі лінійні неперервні продовження F функціонала f на H. Які з них зберігають норму?

С1. Нехай X – ЛНП, A – деяка множина індексів. Системи $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X$, $\{f_\alpha : \alpha \in A\} \subset X^*$ називають *біортогональними*, якщо $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \ \alpha, \beta \in A$, де $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера ($\delta_{\alpha\beta} = 0, \ \alpha \neq \beta, \ \delta_{\alpha\alpha} = 1$).

Нехай $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ – лінійно незалежна система. Довести, що існує біортогональна до неї система.

О5. Нехай X – ЛНП, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ – лінійно незалежна система і $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$. Довести існування функціонала $f \in X^*$ такого, що $f(x_k) = c_k, \ k = 1, ..., n$.

О6. Нехай H – гільбертів простір, $x, x_n \in H, \ n \geq 1$. Довести, що: 1) кожна ортонормована послідовність слабко збігається до нуля; 2) $x_n \to x$ за нормою, якщо $x_n \xrightarrow{w} x$ і виконується умова $||x_n|| \to ||x||$.

С2. Нехай X – ЛНП. Множину $M \subset X$ називають *слабко замкненою*, якщо для кожного $x \in X$ з того, що $x_n \xrightarrow{w} x$, де $\{x_n : n \geq 1\} \subset M$ – деяка послідовність, випливає, що $x \in M$. Довести, що: 1) кожна слабко замкнена множина в X є сильно замкненою; 2) твердження, обернене до твердження п.1, хибне; 3) підпростір в X є слабко замкненою множиною;

Д1. Дослідити наведені послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$ на слабку та сильну збіжність у ЛНП X, якщо:

1) $X = L_2([0,1]), \ x_n(t) = \sin(nt^2)$;
2) $X = L_2([0,1]), \ x_n(t) = \sin(ne^t)$;
3) $X = L_p([0,+\infty)), \ 1 < p < +\infty, \ x_n(t) = x_0(2^n t)$, де $x_0(t) = (-1)^k, \ x \in [k, k+1), \ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$;
4) $X = L_1(\mathbf{R}), \ x_n(t) = \chi_{[n,n+1]}(t)$;
5) $X = l_1, \ x_n = e_n$.

Д2. Сформулювати і довести критерії слабкої збіжності у просторах: 1) c_0; 2) c.

Д3. Розглянемо c_0 як підпростір простору c. Описати всі лінійні неперервні продовження функціонала $f \in c_0^*$ на c. Які з них зберігають норму?

Д4. 1) Довести, що існує функціонал $F \in l_\infty^*$ такий, що $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \ x \in c$; 2) Довести, що включення $l_1 \subset l_\infty^*$ строге.

Д5. Нехай X – ЛНП, A – деяка множина індексів. Системи $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X$, $\{f_\alpha : \alpha \in A\} \subset X^*$ називають *біортогональними*, якщо $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \ \alpha, \beta \in A$, де $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера ($\delta_{\alpha\beta} = 0, \ \alpha \neq \beta, \ \delta_{\alpha\alpha} = 1$).

1)* За якої умови на лінійно незалежну систему $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X$ існує біортогональна до неї система?

2)* Нехай $\{f_1, ..., f_n\} \subset X^*$ – лінійно незалежна система. Довести, що в X існує біортогональна до неї система.

Д6. Нехай X – ЛНП, $\{x_n : n \geq 1\} \subset X, \{c_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{R}, M > 0.$ Довести, що для існування функціонала $f \in X^*$, який задовольняє умови $f(x_n) = c_n,\ n \geq 1$ і $||f|| \leq M,$ необхідно і достатньо, щоб для довільної скінченної системи $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \subset \mathbf{R}$ виконувалась нерівність $\left|\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k c_k\right| \leq M \left|\left|\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x_k\right|\right|.$

Д7. Довести, що скінченновимірний ЛНП є рефлексивним.

Д8. Знайти образ $\varphi(y) \in l_\infty$ елемента $y \in c$ при канонічному вкладенні $\varphi : c \to c^{**} = l_\infty$.

Д9. Довести нерефлексивність просторів c і c_0.

Д10*. Довести, що підпростір рефлексивного простору рефлексивний.

Д11*. Довести, що банахів простір X рефлексивний тоді й тільки тоді, коли рефлексивним є спряжений до нього простір X^*.

Д12*. Нехай X – банахів простір, простір X^* сепарабельний. Довести, що простір X сепарабельний. Чи правильне обернене твердження? Зробити висновок про нерефлексивність просторів $l_1, C([a, b])$.

Д13. Довести, що функціонал $F(g) := \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dg(t),\ g \in BV_0([0, 1]),$ є лінійним і неперервним на $(C([0, 1]))^*$. Вивести звідси нерефлексивність простору $C([0, 1])$.

Д14. Довести, що наведені банахові простори не повні відносно слабкої збіжності: 1) $C([0, 1])$; 2) c_0; 3) c.

Д15*. (Шур). Довести, що слабка збіжність у просторі l_1 рівносильна збіжності за нормою.

В6

О1. Нехай G – підпростір гільбертового простору H і $f \in G^*$. Описати всі лінійні неперервні продовження F функціонала f на H. Які з них зберігають норму?

1) $G = \{x \in H \mid (x, h) = 0\}, \quad f(x) = (x, a),$ $x \in G$, де $a, h \in H$ – фіксовані елементи.

2) $G = \{x \in H \mid (x, h_i) = 0,\ 1 \leq i \leq n\},$ $f(x) = (x, a),\ x \in G$, де $a \in H$ – фіксований елемент, $\{h_i : 1 \leq i \leq n\} \subset H$ – ортонормована система.

І1. 1) Нехай $G = \left\{x \in C([0, 1]) \mid \int\limits_0^1 x(t)dt = 0,\ x(1) = 0\right\}$. Побудувати функціонал $f \in (C([0, 1]))^*$ такий, що $f(x) = 0,\ x \in G,$

$f(x_1) = f(x_2) = 1$, де $x_1(t) = 1,\ x_2(t) = 1 - t,\ t \in [0,1]$.

2) Нехай $\alpha > 0$ – задане, $G := \{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2,\ f((x,x)) = \alpha x,\ (x,x) \in G$. Описати всі лінійні продовження F функціонала f на $\mathbf{R}^2$. Для яких із цих продовжень $||F|| = ||f||$, якщо $\mathbf{R}^2$ розглядати з нормою $||\cdot||_p,\ 1 \le p \le +\infty$? В яких випадках таке продовження єдине?

3) У просторі $\mathbf{R}^3$ на підпросторі $G = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$ задано функціонал $f(x) = \alpha x_1 + \beta x_2, x = (x_1, x_2, 0) \in G$, де $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ – фіксовані. Описати всі лінійні продовження F функціонала f на $\mathbf{R}^3$. Для яких із цих продовжень $||F|| = ||f||$, якщо $\mathbf{R}^3$ розглядати з нормою $||\cdot||_p,\ 1 \le p \le +\infty$? У яких випадках продовження, що зберігає норму, єдине?

O4. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір із σ-скінченною мірою, $A \in \mathcal{F}$, $1 \le p < +\infty$, $G := \{x \in L_p(T, \mathcal{F}, \mu) \mid x(t) = 0$ для майже всіх $t \in T \setminus A\}$, $a \in L_q(A)$, q – спряжений індекс до p. Описати всі лінійні неперервні продовження F на $L_p(T, \mathcal{F}, \mu)$ функціонала $f(x) = \int\limits_A a(t)x(t)d\mu(t),\ x \in G$. Для яких із цих продовжень $||F|| = ||f||$?

O5. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП X (для збіжних послідовностей знайти границі):

1) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$;

2) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p < +\infty,\ x_n(t) = t^n$;

3) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$;

4) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$;

I3. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП X (для збіжних послідовностей знайти границі):

1) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...)$;

2) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{1, ..., 1}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...)$;

3) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...)$;

4) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\frac{1+n}{1+n}, ..., \frac{1+n}{1+kn}, ...)$;

5) $X = l_p,\ 1 \le p < +\infty,\ x^{(n)} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, ..., \frac{n}{2^n}, \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+2)^2}, ...)$;

6) $X = l_p,\ 1 \le p < +\infty,$
$x^{(n)} = (1, 0, \frac{1}{3^2}, 0, \frac{1}{5^2}, ..., 0, \frac{1}{(2n-1)^2}, \frac{1}{(2n)^2}, \frac{1}{(2n+1)^2}, ...)$;

7) $X = l_\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \ln n, 0, 0, ...)$;

8) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = e^{int}$;

9) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \sin(t \cdot \ln n)$;

10) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \cos(n^2 t)$;

11) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \sin(2^n t)$;

12) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}t, & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$;

13) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p \le +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} 2n(1 - nt), & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$;

14) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p < +\infty,\ x_n(t) = \sin(t^n)$;

15) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = \sqrt[4]{n}\chi_{[n, n+\frac{1}{n}]}(t)$;

16) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \chi_{[n, n+1]}(t)$;

17) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{[n, 2n]}(t)$.

I4. Дослідити наведені послідовності в $C([0,1])$ на слабку та сильну збіжність:

1) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$;

2) $x_n(t) = e^{-nt}$;

3) $x_n(t) = te^{-nt}$;

4) $x_n(t) = nte^{-nt}$;

5) $x_n(t) = \frac{n^2 t}{1+n^4 t^2}$;

6) $x_n(t) = \frac{n^3 t^2}{1+4n^4 t^4}$.

I5. Довести, що послідовність функціоналів $\{f_n : n \ge 1\} \subset X^*$ є слабко збіжною, і з'ясувати, чи збігається вона сильно (за нормою), якщо:

1) $X = L_2([0,1]),\ f_n(x) = \int\limits_0^1 \cos 2\pi n t x(t) dt$;

2) $X = L_2([0,1]),\ f_n(x) = \int\limits_0^1 e^{2\pi i n t} x(t) dt$;

3) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1 - 2nt) x(t) dt$;

4) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = n\int\limits_0^1 x(t) t^n dt$;

5) $X = C^1([-1,1]),\ f_n(x) = \frac{n}{2}(x(\frac{1}{n}) - x(-\frac{1}{n}))$.

I9. 1) Нехай $G = \{x \in C([0,1]) \mid x(0) = 0\}$. Побудувати лінійний неперервний функціонал на $C([0,1])$, який дорівнює нулю на G і набуває значення 2 на функції $x_0(t) = t + 1,\ t \in [0,1]$.

2) Нехай $G = \{x \in C([0,1]) \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t,\ t \in [0,1]$. Побудувати лінійний неперервний функціонал на $C([0,1])$, який дорівнює нулю на G і такий, що a) $f(x_1) = 2,\ f(x_2) = 3$; b) $f(x_1) = 2,\ ||f|| = 2,\ f(x_2) \leq 0$.

3) Нехай X – ЛНП, G – лінійна множина в X, яку будемо розглядати як ЛНП з нормою, індукованою нормою в X. a) Нехай G – скрізь щільна в X. Довести, що $G^* = X^*$. b) Чи правильне обернене твердження?

4) a) Нехай X – нескінченновимірний ЛНП. Довести, що X^* – нескінченновимірний. b) Чи правильне твердження, обернене до твердження п. a? c) Як пов'язані розмірності просторів X і X^*, якщо вони обидва скінченновимірні?

5) Нехай X – ЛНП, $x \in X$. Довести, що $||x|| = \max\{|f(x)| \mid f \in X^*,\ ||f|| = 1\}$.

6) Нехай X – рефлексивний банахів простір. Довести, що модуль кожного лінійного неперервного функціонала досягає на $\overline{B}(\overline{0}, 1)$ свого найбільшого значення.

7) Нехай H – гільбертів простір, $x, x_n \in H,\ n \geq 1$. Довести, що: a) $x_n \xrightarrow{w} x$ тоді й тільки тоді, коли $(x_n, a) \to (x, a), n \to \infty$, для всіх $a \in H$; b) якщо $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \to y$ за нормою, то $(x_n, y_n) \to (x, y),\ n \to \infty$; c) кожна ортонормована послідовність слабко збігається до нуля; d) $x_n \to x$ за нормою, якщо $x_n \xrightarrow{w} x$ і виконується одна з таких умов: а)$||x_n|| \to ||x||$; б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, ||x_n|| \leq ||x||$.

8) Нехай H – гільбертів простір. Побудувати приклади послідовностей $\{x_n : n \geq 1\} \subset H,\ \{y_n : n \geq 1\} \subset H$ таких, що: a) $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \xrightarrow{w} y$, де $x, y \in H$; але $(x_n, y_n) \not\to (x, y)$. b) $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \xrightarrow{w} y$, де $x, y \in H,\ x_n \not\to x,\ y_n \not\to y$ в H; але $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

9) Нехай $\{x_n : n \geq 1\}$ – ортогональна система в гільбертовому просторі H. Довести еквівалентність таких тверджень: a) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається сильно; b) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається слабко; c) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2$ збігається.

10) Довести, що коли послідовність $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$, де X – ЛНП, слабко збігається до $f \in X^*$ як послідовність елементів ЛНП X^*, то вона слабко збігається до цього ж елемента і як послідовність функціоналів на X. Довести, що обернене твердження хибне. (Вказівка. Розглянути функціонали $f(x) = 0, f_n(x) = x_n, c \in c_0, n \in \mathbf{N}$.)

Заняття 7
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення лінійного оператора.

2. Означення неперервного і обмеженого оператора та їх зв'язок.

3. Означення норми лінійного неперервного оператора(ЛНО).

А7

О1. 1) Знайти загальний вигляд лінійного оператора $A : \mathbf{C}_1^m \to \mathbf{C}_1^n$ і обчислити його норму. Тут $\mathbf{C}_1^m$ – простір $\mathbf{C}^m$ з нормою $||x||_1 := \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|$.

2) Довести, що будь-який лінійний оператор у скінченновимірному просторі неперервний. Довести, що будь-який лінійний оператор зі скінченновимірною областю визначення неперервний.

О2. Нехай $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ – обмежена послідовність. Довести, що оператор $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$ в l_p $(1 \leq p \leq \infty)$ є лінійним і неперервним і знайти його норму.

О3. Нехай $X = L_2(T, \mu),\ a \in L_\infty(T, \mu),\ \mu - \sigma$-скінченна. Довести, що оператор множення на a: $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ належить до $\mathcal{L}(X)$ та знайти його норму.

С1. Нехай $\alpha = \alpha(t)$ – фіксована функція з $C([a, b])$, оператор $(Ax)(t) := \alpha(t)x(t)$ (оператор множення на функцію).

1) Довести, що A–лінійний неперервний оператор у $C([a, b])$ і знайти норму A.

2) Довести, що A – лінійний неперервний оператор в $L_p([a, b])$, $1 \leq p \leq +\infty$, і знайти норму A.

О4. Нехай $\{\alpha_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ – числова матриця, для якої $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty$. Довести, що оператор множення на матрицю $(Ax)_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} x_k,\ j \geq 1$, є лінійним і неперервним у просторі l_2.

С2. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Чи будуть нормами в X : 1) $||x||_1 = ||Ax||$? 2) $||x||_2 = ||x|| + ||Ax||$? Чи буде X у нормі $|| \cdot ||_2$ банаховим простором?

О5. 1)Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора A з неперервним ядром K, тобто оператора $A : C([a, b]) \to C([a, b])$, що діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t, s)x(s)ds,\ t \in [a, b],\ K \in C([a, b]^2)$.

2)* Довести, що $||A|| = \max\limits_{t \in [a,b]} \int\limits_a^b |K(t, s)|ds$.

О6. Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора A з квадратично сумовним ядром K, тобто оператора $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, що діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{[a,b]} K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b]$, $K \in L_2([a,b]^2)$. Довести оцінку

$$||A|| \leq ||K||_{L_2([a,b]^2)} = \left(\int\limits_{[a,b]^2} |K(t,s)|^2 dtds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

С3. Чи є наведені оператори $A : l_2 \to l_2$ лінійними? неперервними? Для лінійних неперервних знайти їх норми.

1) $Ax = (0, 2x_3, 0, 2x_4, 0, 2x_5, 0, ...),\ x \in l_2$;
2) $Ax = (x_2, 2x_1, 3x_4, 0, 0, ...),\ x \in l_2$;
3) $Ax = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, ...),\ x \in l_2$.
4) $Ax = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{k}, x_{k+1}, x_{k+2}, ...)$.

Д1. Нехай ядро $K \in C([a,b]^2),\ \alpha < 1$. Довести, що інтегральний оператор $A : C([a,b]) \to C([a,b])$, де $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \frac{K(t,s)}{|t-s|^\alpha} x(s)ds$, $t \in [a,b]$, – лінійний та неперервний.

Д2. Нехай числа α, β, γ такі, що $\beta > \alpha \geq \gamma \geq 0$. Позначимо через C_α банахів простір неперервних на $[0, +\infty)$ функцій x таких, що $\sup\limits_{0 \leq t < \infty} e^{\alpha t}|x(t)| < \infty$, з нормою $||x||_\alpha = \sup\limits_{0 \leq t < \infty} e^{\alpha t}|x(t)|$. Довести, що оператор $A : C_\alpha \to C_\gamma$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)}x(s)ds,\ t \geq 0$, є лінійним і неперервним. Знайти норму A.

Д3. Довести, що оператор $A : C^1([a,b]) \to C([a,b])$, де $(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt},\ t \in [a,b]$, є лінійним і неперервним. Знайти його норму.

Д4. Знайти норму оператора вкладення $Ax = x$, який діє:
а) з $C^1([a,b])$ в $C([a,b])$;
б) з $L_p([a,b])$ в $L_q([a,b]),\ p \geq q$.

Д5. 1) Довести, що ядро $\operatorname{Ker} A$ будь-якого лінійного неперервного оператора $A : X \to Y$, де X, Y – ЛНП, є підпростором в X.

2) Нехай $A : X \to Y$ – лінійний оператор, $\operatorname{Ker} A$ – підпростір в X. Чи випливає звідси, що A – обмежений оператор?

3) Навести приклад лінійного неперервного оператора A, в якого область значень: а) замкнена; б) незамкнена.

Д6. Нехай A – лінійний оператор у ЛНО X. Довести, що A неперервний тоді й лише тоді, коли множина $\{x \in X \mid ||Ax|| < 1\}$ має хоча б одну внутрішню точки.

Д7. Нехай A – лінійний оператор у банаховому просторі, який переводить всяку сильно збіжну послідовність у слабко збіжну. Довести, що A – неперервний.

Д8. 1) Нехай оператор A – це інтегральний оператор з ядром K, $(Ax)(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)d\mu(s),\ t \in T,\ x \in L_2(T,\mu)$ причому $a_1 = \operatorname{esssup}\limits_{t\in T} \int\limits_T |K(t,s)|d\mu(s) < \infty$, $a_2 = \operatorname{esssup}\limits_{s\in T} \int\limits_T |K(t,s)|d\mu(t) < \infty$. Довести, що оператор $A \in \mathcal{L}(L_2(T,\mu))$ і $||A|| \le (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}}$.

2) Нехай ядро $K \in L_\infty([a,b]^2),\ \alpha < 1$. Довести, що оператор $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, де $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \frac{K(t,s)}{|t-s|^\alpha} x(s)ds,\ t \in [a,b]$, – лінійний та неперервний.

3) Нехай $p \in L_1(\mathbf{R})$. Довести, що інтегральний оператор $A : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} p(t-s)x(s)ds,\ t \in \mathbf{R}$, (оператор згортки з функцією p) є лінійним і неперервним.

B7

O1. Знайти загальний вигляд лінійного оператора $A : X \to Y$ і обчислити його норму (яка існує за задачею A7.01), у таких випадках:

1) $X = \mathbf{R}^m_\infty,\ Y = \mathbf{R}^n_\infty$; 2) $X = \mathbf{C}^m_1,\ Y = \mathbf{C}^n_\infty$;

O2. Знайти норму оператора $A : \mathbf{C}^m \to l_2$, якщо $Ax = (x_1, ..., x_m, \frac{x_1}{2}, ..., \frac{x_m}{2}, \frac{x_1}{3}, ..., \frac{x_m}{3}, ...),\ x = (x_1, ...x_m) \in \mathbf{C}^m$ (у $\mathbf{C}^m$ розглядається евклідова норма).

O3. Нехай $p, q \in L_2([a,b])$. Довести, що інтегральний оператор $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{[a,b]} p(t)q(s)x(s)ds,\ t \in [a,b]$, є лінійним, неперервним, причому $||A|| = ||p|| \cdot ||q||$.

O4. Нехай H – гільбертів простір, $G \subset H$ – підпростір, $Px = \operatorname{pr}_G x$. Довести, що оператор проектування P є лінійним і неперервним. Знайти норму P.

I1. 1) Довести, що лінійний неперервний оператор $A : X \to Y$ залишається неперервним, якщо в X і Y замінити норми на еквівалентні.

2) Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора Вольтерри A з неперервним ядром K, тобто $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ і визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b]$, де $K \in C(\{(t,s) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le s \le t,\ a \le t \le b\})$. Знайти $||A||$.

3) Довести, що в ЛНП X такі умови рівносильні: а) $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ – еквівалентні норми на X; б) довільна послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ збігається до $x \in X$ в $(X, ||\cdot||_1)$ тоді й тільки тоді, коли $x_n \to x$ в $(X, ||\cdot||_2)$. Вказівка: Розглянути одиничний оператор $I : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$.

I2. Довести, що наведені оператори $A : l_2 \to l_2$ є лінійними, неперервними і знайти їх норми:

1) $Ax = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{k}, x_1, x_2, ...)$;
2) $Ax = (x_{k+1}, x_{k+2}, ...)$;
3) $Ax = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, ...)$;
4) $Ax = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, ...)$;
5) $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, ...)$;
6) $Ax = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, ...)$.

I3. Які з наведених операторів лінійні? неперервні? Для лінійних і неперервних визначити їх норму.

1) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = x^2(t)$;
2) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = \sin x^2(t)$;
3) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^t x^2(s)ds$;
4) $X = C([1,2]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 tx(s)ds$;
5) $X = C([-1,1]),\ (Ax)(t) = (e^t - 1)x(t)$;
6) $X = L_3(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = x(t+1)$;
7) $X = L_4(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = (\operatorname{arctg} t)x(t)$;
8) $X = L_4(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = \operatorname{arctg}(tx(t))$;
9) $X = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = (e^{-|t|})x(t)$;
10) $X = L_1(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = \chi_{[0,4]}(t)x(t-1)$;
11) $X = L_1(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = 3\chi_{[0,1]}(t)x(t) - 5\chi_{[3,6]}(t)x(t-2)$.

Заняття 8
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ (ПРОДОВЖЕННЯ)
А8

О1. Нехай X, Y – ЛНП, $f \in X^*,\ y \in Y$ і $Ax = f(x)y,\ x \in X$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ і знайти $||A||$.

С1. Нехай H – гільбертів простір, $y, z \in H,\ Ax = (x, y)z,\ x \in H$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(H)$ і знайти $||A||$.

С2. Нехай $p, q \in C([a, b])$ і $Ax = \int\limits_a^b p(t)q(s)x(s)ds$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X)$ та знайти норму $||A||$. Розглянути випадки: 1) $X = L_p([a, b])$; 2) $X = C([a, b])$.

О2. Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ називають скінченновимірним, якщо $\dim(R(A)) < \infty$. Довести, що A – скінченновимірний тоді й лише тоді, коли існують $\{f_1, ..., f_n\} \subset X^*,\ \{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ такі, що $Ax = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)y_k,\ x \in X$.

О3. Нехай $\{y_k \mid 1 \le k \le n\}$ і $\{z_k \mid 1 \le k \le n\}$ – ортонормовані системи в гільбертовому просторі H, $\{c_k \mid 1 \le k \le n\} \subset \mathbf{C}$. Для оператора $Ax = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x, y_k)z_k,\ x \in H$, довести, що $||A|| = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |c_k|$.

С3. Довести, що наведені інтегральні оператори є лінійними, неперервними. Знайти їх норми.

1) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s)ds,\ \alpha \ge 0, \beta > -1$;

2) $X = L_2([0, 2\pi]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} \cos(t - s)x(s)ds$;

3) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = (2x(0) - \int\limits_0^1 sx(s)ds) \cos t$;

4) $X = L_2([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 stx(s)ds$;

5) $X = C([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$.

О5. Довести, що оператор $A : C^1([a, b]) \to C([a, b])$, де $(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt},\ t \in [a, b]$ є лінійним і неперервним. Знайти його норму.

Д1. Довести, що оператор множення на вимірну за Лебегом функцію a в $L_p([a, b]),\ 1 \le p \le +\infty$ обмежений тоді й лише тоді, коли функція a істотно обмежена.

Д2. Довести, що наведений інтегральний оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ є лінійним, неперервним, знайти його норму: $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \sin \pi(t-s)x(s)ds$.

Д3. Довести, що оператор $A : C([a,b]) \to C([a,b])$, де $(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $t \in [a,b]$ з областю визначення $D(A) = C^1([a,b])$ є *щільно визначеним* (тобто $\overline{D(A)} = C([a,b])$), *замкненим* (тобто коли $x_n \to x$, $n \to \infty$, у $C([a,b])$ і $\{Ax_n : n \geq 1\}$ – збіжна в $C([a,b])$, то $x \in D(A)$ і $Ax_n \to Ax$, $n \to \infty$, у $C([a,b])$), але не є неперервним.

Д4*. Нехай X, Y – ЛНП, $A : X \to Y$ – лінійний оператор, причому $\dim R(A) < +\infty$, а $\operatorname{Ker} A$ – замкнена множина в X. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Д5. Нехай A – лінійний оператор у ЛНП, який будь-яку сильно збіжну послідовність переводить у слабко збіжну. Довести, що A – обмежений оператор.

Д6. 1) Нехай $X = l_2$. Довести, що простір $\mathcal{L}(X)$ – несепарабельний.

2)* Знайти необхідну і достатню умову на лінійний нормований простір X, щоб простір $\mathcal{L}(X)$ був сепарабельним.

B8

I1. Довести, що наведені інтегральні оператори є лінійними, неперервними. Знайти їх норми.

1) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{3t-2s}x(s)ds;$

2) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^\pi \cos t \sin s x(s)ds;$

3) $X = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s)ds,\ \alpha > -\frac{1}{2},\ \beta > -\frac{1}{2};$

I1. Довести, що наведені інтегральні оператори є лінійними, неперервними. Знайти їх норми.

1) $X = L_2([0,2\pi]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+s)x(s)ds;$

2) $X = L_2([0,2\pi]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} \cos(2t+2s)x(s)ds;$

3) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = t\int\limits_0^1 x(s)ds - x(0).$

13. 1) Перевірити, що оператори A, B де $(Ax)(t) = tx(t), (Bx)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds, t \in [0,1]$, є лінійними і неперервними в $L_2([0,1])$, але не є переставними.

2) Знайти n-й степінь оператора A, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds, t \in [0,1]$, і діє в $C([0,1])$.

14. 1) Довести, що ядро $\operatorname{Ker} A$ будь-якого лінійного неперервного оператора $A : X \to Y$, де X, Y – ЛНП, є підпростором в X.

2) Нехай $A : X \to Y$ – лінійний оператор, $\operatorname{Ker} A$ – підпростір в X. Чи випливає звідси, що A – обмежений оператор?

3) Навести приклад лінійного неперервного оператора A, в якого область значень: а) замкнена; б) незамкнена.

4) Нехай X – банахів простір, $A \in L(X)$ – такий оператор, що $\exists C > 0 \ : \ ||Ax|| \geq C||x||, \ x \in X$. Довести, що: а) $R(A)$ – підпростір в X; б) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

5) Довести, що оператори $Ax = (x_2, 0), \ Bx = (x_2, x_1), \ x \in \mathbf{R}^2$ є лінійними, неперервними і не комутують;

6) Довести, що оператори $Ax = (x_2, 0), \ Bx = (0, x_1), \ x \in \mathbf{R}^2$ є лінійними, неперервними і не комутують;

7) Довести, що оператори $(Ax)(t) = tx(t), \ (Bx)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$, $t \in [0,1]$, є лінійними, неперервними в $L_2([0,1])$ і не комутують.

8) Нехай X – ЛНП, Y – банахів простір, лінійна множина $M \subset X$ є скрізь щільною в X, оператор $A \in \mathcal{L}(M, Y)$. Довести, що A допускає єдине лінійне неперервне продовження $\tilde{A}$ на X. Більше того, $||\tilde{A}|| = ||A||$.

9) Нехай H – гільбертів простір, $A : H \to H$ – лінійний оператор. Довести, що $A \in \mathcal{L}(H)$ тоді й тільки тоді, коли $\exists C > 0 \ \forall x, y \in H \ : |(Ax, y)| \leq C||x|| \cdot ||y||$. Більш того, $||A|| = \sup\limits_{||x||=1, ||y||=1} |(Ax, y)|$.

Заняття 9
РІВНОМІРНА, СИЛЬНА, СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ. ПРИНЦИП РІВНОМІРНОЇ ОБМЕЖЕНОСТІ

Контрольні запитання

1. Означення рівномірної, сильної, слабкої збіжності операторів.

2. Принцип рівномірної обмеженості.

А9

О1. Дослідити послідовність операторів $A_n : X \to X,\ n \geq 1$, на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:

1) $X = l_p,\ 1 \leq p \leq +\infty,\ A_n x = \left(0, ..., 0, \dfrac{x_n}{n}, \dfrac{x_{n+1}}{n+1}, ..., \dfrac{x_{2n}}{2n}, 0, 0, ...\right);$

2) $X = l_p,\ 1 \leq p \leq +\infty,\ A_n x = (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...);$

3) $X = l_p,\ 1 \leq p \leq +\infty,\ A_n x = (0, ..., 0, \underbrace{x_1}_{n}, 0, 0, ...);$

4) $X = C([0,1]),\ (A_n x)(t) = \int\limits_0^1 \sqrt{(t-s)^2 + \frac{1}{n}}\, x(s) ds;$

5) $X = C([0,1]),\ (A_n x)(t) = \int\limits_0^1 t^n x(s) ds;$

6) $X = L_3(\mathbf{R}),\ (A_n x)(t) = \begin{cases} x(t-n), & t \geq n, \\ 0, & t < n; \end{cases}$

7) $X = L_2(\mathbf{R}),\ (A_n x)(t) = e^{-(t-n)^2} x(t).$

О2. Нехай $\{p_n : n \geq 1\} \subset C([a,b])$ – фіксована послідовність, $(A_n x)(t) := p_n(t) x(t),\ t \in [a,b],\ x \in C([a,b])$. За яких умов на послідовність $\{p_n : n \geq 1\}$ послідовність операторів $\{A_n : n \geq 1\}$ збігається: 1) рівномірно; 2) сильно; 3) слабко? Визначити вигляд граничного оператора.

О3. Нехай X – банахів простір і $\{A, B, A_n, B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$. Довести, що:

1) $A_n \xrightarrow{s} A,\ B_n \xrightarrow{s} B \ \Rightarrow\ A_n B_n \xrightarrow{s} AB;$

2) $A_n \rightrightarrows A,\ B_n \rightrightarrows B \ \Rightarrow\ A_n B_n \rightrightarrows AB;$

3) $A_n \xrightarrow{w} A,\ B_n \xrightarrow{w} B \ \not\Rightarrow\ A_n B_n \xrightarrow{w} AB.$

О4. Нехай X – банахів простір. Довести, що послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ слабко обмежена (тобто для кожного $f \in X^*$ числова послідовність $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ обмежена) тоді й тільки тоді, коли вона обмежена в X.

С1. Нехай X, Y – банахові простори, $\{A, A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, $A_n \xrightarrow{s} A$ і K – компакт у просторі X. Довести, що $\{A_n : n \geq 1\}$ збігається до A рівномірно на K.

Д1. Нехай X – простір $C^1([0,1])$ з нормою $||x|| := \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, $x \in C^1([0,1])$. Визначимо оператор $A_n : X \to C([0,1])$ формулою $(A_n x)(t) = n(x(t+\frac{1}{n}) - x(t)),\ t \in [0,1],\ x \in X,\ n \geq 1$ (якщо $t > 1$, то покладемо $x(t) := x(1) + x'_-(1)(t-1)$.) Довести, що:

1) для кожного $x \in X$ послідовність $\{A_n x : n \geq 1\}$ збігається за нормою в $C([0,1])$;

2) $\{||A_n|| : n \geq 1\}$ не обмежена;

3) простір $\mathcal{L}(X, C([0,1]))$ не є повним відносно сильної операторної збіжності. Як узгоджуються ці твердження з принципом рівномірної обмеженості?

Д2. Нехай X_1, X_2 – банахові простори. 1) Довести, що простір $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ повний відносно сильної збіжності операторів, тобто довільна послідовність $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$, для якої $\forall x \in X_1\ :\ \{A_n x : n \geq 1\}$ – фундаментальна послідовність елементів з X_2, сильно збігається до деякого оператора $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$; 2) За якої умови на банахові простори X_1 та X_2 простір $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ буде повним відносно слабкої збіжності?

Д3. За яких умов на число $\alpha \in \mathbf{C}$ послідовність операторів $A_n : l_p \to l_p,\ 1 \leq p \leq +\infty,\ A_n x = (\alpha^n x_1,\ \alpha^{n-1} x_2, ..., \alpha x_n, 0, 0, ...)$, збігається рівномірно, слабко, сильно?

Д4. Знайти необхідні та достатні умови на послідовність $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{C}$, за яких послідовність операторів $\{A_n : l_p \to l_p : n \geq 1\}$, $1 \leq p \leq +\infty$, збігається рівномірно, сильно, слабко, якщо:

1) $A_n x = (\alpha_n x_1, 0, 0, ...)$;

2) $A_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, \alpha_n x_1, 0, 0, ...)$;

3) $A_n x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, 0, 0, ...)$;

4) $A_n x = (\alpha_n x_1, \alpha_n x_2, ..., \alpha_n x_n, 0, 0, ...)$;

Д5. Нехай $1 \leq p \leq +\infty$, q – спряжений індекс до p. 1) Нехай послідовність $a = \{a_n : n \geq 1\}$ така, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ збігається для довільного $x \in l_p$. Довести, що $a \in l_q$. 2) Нехай вимірна функція f така, що функціонал $f(x) = \int\limits_a^b f(t)x(t)dt$ визначений для кожного $x \in L_p([a,b])$. Довести, що $f \in L_q([a,b])$.

Д6. Довести, що послідовність функціоналів $\{f_n : n \geq 1\} \subset (C([0,1]))^*$, де $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} x(\frac{k}{n}),\ x \in C([0,1]),\ n \geq 1$, $*$-слабко збіжна та знайти її границю. Чи збігається вона за нормою?

Д7. Нехай $f_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} A_{nk} x(t_{nk}),\ x \in C([a,b])$, де $a \leq t_{n1} \leq \ldots \leq t_{nn} \leq b,\ n \geq 1,\ \{A_{nk} \mid 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1\} \subset \mathbf{K}$. Довести, що $f_n(x) \to \int\limits_a^b x(t)dt,\ n \to \infty$, для всіх $x \in C([a,b])$ тоді й тільки тоді, коли: 1) $\sup\limits_{n \geq 1} \sum\limits_{k=1}^{n} |A_{nk}| < +\infty$; 2) $f_n(p) \to \int\limits_a^b p(t)dx(t),\ n \to \infty$ для кожного многочлена p.

Перевірити, що умова 1) випливає з умови 2), якщо для всіх $n \geq 1$ і $1 \leq k \leq n$ маємо $A_{nk} \geq 0$.

Д8. Нехай $f_n(x) = \int\limits_a^b x(t)dF_n(t),\ x \in C([a,b]),\ F_n \in BV_0([a,b]),\ n \geq 0$. Довести, що $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$ тоді й тільки тоді, коли $\sup\limits_{n \geq 1} V(F_n, [a,b]) < +\infty,\ F_n(t) \to F_0(t),\ n \to \infty$ у точках неперервності $F_0,\ F_n(a) \to F_0(a),\ n \to \infty$, і $F_n(b) \to F_0(b),\ n \to \infty$.

Д9. (Тепліц) Нехай задано нескінченний набір чисел $\{a_{nk} : k \geq 1,\ n \geq 1\} \subset \mathbf{K}$. Довести, що для кожної збіжної послідовності $x = \{x_n : n \geq 1\}$ послідовність $f_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ збігається до границі послідовності x тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) $\forall k \geq 1 : \lim\limits_{n \to \infty} a_{nk} = 0$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$;

3) $\exists C > 0\ \forall n \geq 1 : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq C$.

Д10*. (Мертенс-Шур) Нехай $\{a_n : n \geq 0\} \subset \mathbf{C}, \{b_n : n \geq 0\} \subset \mathbf{C}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ n \geq 0$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ збігається тоді й тільки тоді, коли для будь-якого збіжного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ збігається.

В9

O1. Якого вигляду набуває рівномірна, сильна та слабка операторні збіжності для операторів із $\mathcal{L}(X, \mathbf{C})$, де X – лінійний нормований простір, тобто для лінійних неперервних функціоналів?

I1. Дослідити послідовність операторів $A_n : l_p \to l_p,\ n \geq 1,\ 1 < p < +\infty$ на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:

1) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_1, x_2, ...)$;
2) $A_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$;
3) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, x_n, 0, 0, ...)$;
4) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...)$;
5) $A_n x = (x_n, x_{n-1}, x_2, ...x_1, 0, 0, ...)$;
6) $A_n x = (\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n-1}, ..., \frac{x_n}{1}, 0, 0, ...)$;
7) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \sqrt{n}\, x_{2n}, 0, 0, ...)$;
8) $A_n x = (\sum\limits_{m=1}^{n} x_m, 0, 0, ...),\ p = 1$;
9) $A_n x = (\frac{1+n}{1+n} x_1, \frac{1+n}{1+2n} x_2, \frac{1+n}{1+3n} x_3, ..., \frac{1+n}{1+n^2} x_n, 0, 0, ...)$;
10) $A_n x = (\sqrt[n]{n} x_1, \sqrt[n]{n} x_2, ..., \sqrt[n]{n} x_n, ...)$;
11) $A_n x = (\sqrt[n]{n} x_1, \sqrt[n]{n} x_2, ..., \sqrt[n]{n} x_n, 0, 0, ...)$;
12) $A_n x = (\frac{x_n}{2n}, \frac{x_{n+1}}{2n+1}, ..., \frac{x_{2n}}{3n}, 0, 0, ...)$;
13) $A_n x = (\frac{1+n}{1+n} x_1, \frac{1+n}{1+2n} x_2, \frac{1+n}{1+3n} x_3, ..., \frac{1+n}{1+kn} x_k, ...)$;
14) $A_n x = (\frac{1+n}{1+n} x_1, \frac{1+n}{1+2n} x_2, \frac{1+n}{1+3n} x_3, ..., \frac{1+n}{1+kn} x_k, 0, 0, ...)$, де $k \in \mathbf{N}$ – фіксоване.

I2. Дослідити послідовність операторів $A_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:

1) $(A_n x)(t) = t^n (1-t) x(t)$;
2) $(A_n x)(t) = t^n x(t)$;
3) $(A_n x)(t) = e^{-nt} x(t)$;
4) $(A_n x)(t) = x(t) \cdot \sin nt$;
5) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 (t^n + s^n) x(s) ds$;
6) $(A_n x)(t) = x(t) \cdot \sin \frac{t}{n}$;
7) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 \frac{(t+s)^n}{3} x(s) ds$;
8) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 \frac{(t+s)^n}{3^n} x(s) ds$;
9) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^t \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k s^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) x(s) ds$;

10)* $(A_nx)(t)=x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right);$

11) $(A_nx)(t)=(t^{10n}-t^{2n})x(t);$

12) $(A_nx)(t)=t\int\limits_0^1 x\left(\sin^n\frac{\pi}{2}s\right)ds;$

13) $(A_nx)(t)=t\int\limits_0^1 x(s)\sin^n\frac{\pi}{2}sds;$

14) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^1 t\frac{1+(2s)^n}{1+(2s)^{2n}}x(s)ds;$

15) $(A_nx)(t)=\frac{\ln(1+nt)}{1+nt}x(t);$

16) $(A_nx)(t)=\frac{\ln(1+t)}{1+nt}x(t);$

17) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^1 t^2\frac{\ln(1+ns)}{1+ns}x(s)ds;$

18) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^{\frac{t^n}{2^n}} x(s)ds;$

19) $(A_nx)(t)=\int\limits_0^{t^n} x(s)ds;$

20) $(A_nx)(t)=(1-t)^n\int\limits_0^{t^n} x(s)ds;$

21) $(A_nx)(t)=n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(s)ds$, де $x(s):=x(1),\ s>1.$

I3. Дослідити послідовність операторів $A_n : L_p(T)\to L_p(T),\ 1<p<+\infty$ на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:

1) $T=\mathbf{R},\ (A_nx)(t)=x(t+n);$

2) $T=\mathbf{R},\ (A_nx)(t)=\begin{cases}x(t), & t\ge n,\\ 0, & t<n;\end{cases}$

3) $T=\mathbf{R},\ (A_nx)(t)=\frac{1}{1+|t-n|}x(t);$

4) $T=[0,1],\ (A_nx)(t)=t^n\int\limits_0^1 s^nx(s)ds;$

5) $T=[0,1],\ (A_nx)(t)=x(t)\cos nt,\ p=2;$

6) $T=[0,1],\ (A_nx)(t)=x(t)\cos e^nt,\ p=2;$

7) $T=[0,1],\ (A_nx)(t)=x(t)\cos ne^t,\ p=2;$

8)* $T=[0,1],\ (A_nx)(t)=x(t)\cos e^{nt},\ p=2;$

9) $T=\mathbf{R},\ (A_nx)(t)=x(t)\cdot\chi_{[\ln n,2\ln n]}(t);$

10) $T=[0,1],\ (A_nx)(t)=\sqrt[n]{t}x(t),\ p=1;$

11) $T=[0,1],\ (A_nx)(t)=\int\limits_0^1 t^2(s^n-s^{2n})x(s)ds.$

O2. В $L_p(\mathbf{R}),\ 1\le p<+\infty$, при фіксованому $s\in\mathbf{R}$ визначимо оператор зсуву за правилом $(A_sx)(t):=x(t+s),\ t\in\mathbf{R},\ x\in L_p(\mathbf{R}),\ s\in\mathbf{R}$. Нехай $s_n\to s,\ n\to\infty$. Довести, що $A_{s_n}\xrightarrow{s}A_s$, але, узагалі кажучи, $A_{s_n}\not\rightrightarrows A_s$.

I4. Нехай X – банахів простір, $\{x,x_n\ :\ n\ge 1\}\subset X$, $\{A,A_n\ :\ n\ge1\}\subset\mathcal{L}(X)$. Довести, що:

1) $A_n\xrightarrow{s}A,\ x_n\to x\ \Rightarrow\ A_nx_n\to Ax;$

2) $x_n\xrightarrow{w}x,\ A_n\rightrightarrows A\ \Rightarrow\ A_nx_n\xrightarrow{w}Ax;$

3) $A_n \xrightarrow{w} A,\ x_n \to x\ \Rightarrow\ A_n x_n \xrightarrow{w} Ax;$

4) $x_n \xrightarrow{w} x\ \Rightarrow\ Ax_n \xrightarrow{w} Ax;$

5)* $A_n \xrightarrow{s} A,\ x_n \xrightarrow{w} x\ \not\Rightarrow\ A_n x_n \xrightarrow{w} Ax.$

I5*. Зробити I1 при $p = 1$ (пп 1-14) та при $p = +\infty$ (пп 2,5,7,9,10,12-14).

I6. 1) Нехай H – гільбертів простір, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$, $\sup\limits_{n\geq 1} ||A_n|| < +\infty$, а також $\exists L \subset H,\ \overline{L} = H,\ \forall x, y \in L\ :\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} (A_n x, y)$. Довести, що $\exists A \in \mathcal{L}(H)\ :\ A_n \xrightarrow{w} A$.

2) Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X),\ \{\lambda_k\ :\ k \geq 0\} \subset \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n t^n,\ t \in \mathbf{R}$, – сума збіжного на $\mathbf{R}$ степеневого ряду. Довести, що послідовність $\{\varphi_n(A)\ :\ n \geq 0\}$, де $\varphi_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k A^k,\ n \geq 0$, $A^0 = I$, збігається в $\mathcal{L}(X)$ до деякого оператора $\varphi(A) \in \mathcal{L}(X)$. За якої умови на послідовність $\{\lambda_k\ :\ k \geq 0\}$ виконується нерівність $||\varphi(A)|| \leq \varphi(||A||)$?

3) Довести, що для довільного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, де X – банахів простір, визначені оператори $e^A := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},\ \sin A := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos A := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$, причому $e^A, \sin A, \cos A \in \mathcal{L}(X)$.

O3. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ збігається в $\mathcal{L}(X)$ тоді й тільки тоді, коли для деякого $k \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $||A^k|| < 1$.

Заняття 10
ОБЕРНЕНІ ОПЕРАТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення оберненого оператора.
2. Умови існування оберненого оператора.
3. Теорема Банаха про обернений оператор.

A10

O1. Довести, що для лінійного оператора $A : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$, наведені твердження еквівалентні:

1) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$;
2) $R(A) = \mathbf{C}^m$;
3) оператор A має неперервний обернений A^{-1};
4) матриця $\mathcal{A}$, якою задається оператор A, є невиродженою;
5) рівняння $Ax = y$ має розв'язок для кожного $y \in \mathbf{C}^m$.

O2. Нехай $X = l_2,\ \sup\limits_{n\geq 1} |a_n| < +\infty,\ Ax = (a_1x_1, a_2x_2, ...)$. Довести, що:

1) $\operatorname{Ker} A = \{0\} \ \Leftrightarrow\ \forall n \geq 1\ :\ a_n \neq 0$;
2) A – неперервно оборотний $\Leftrightarrow\ \inf\limits_{n\geq 1} |a_n| > 0$.
3) Нехай $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Довести, що область значень $R(A)$не замкнена в l_2.

C1. Чи є оператор $A : l_2 \to l_2$ неперервно оборотним, якщо:

1) $Ax = (x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, ...)$;
2) $Ax = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3, x_4, ...)$;
3) $Ax = (x_1 + x_2, x_3, 2x_1 + 2x_2, x_4, ...)$;

O5. Нехай $X = L_2([a, b]), p \in L_2([a, b]), (Ax)(t) = p(t)x(t)$. Довести, що:

1) $\operatorname{Ker} A = \{0\} \ \Leftrightarrow\ |p(t)| > 0 (\operatorname{mod} m)$;
2) A – неперервно оборотний $\Leftrightarrow\ p^{-1} \in L_\infty([a, b])$.

O3. 1) Нехай X – банахів простір, $A, B \subset \mathcal{L}(X),\ A$ має неперервний обернений $A^{-1},\ ||B|| < ||A^{-1}||^{-1}$. Довести, що $A + B$ неперервно оборотний і знайти $(A + B)^{-1}$.

2) Довести, що множина неперервно оборотних операторів відкрита в $\mathcal{L}(X)$.

O4. Нехай X – банахів простір. Довести, що оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ має неперервний обернений тоді й тільки тоді,коли A^2 має неперервний обернений.

C2. Довести, що оператор $A : C([0, 1]) \to C([0, 1])$, де $(Ax)(t) = \alpha(t)x(t),\ \alpha \in C([0, 1])$, є неперервно оборотним тоді й тільки тоді, коли $\alpha(t) \neq 0,\ t \in [0, 1]$.

С3. Нехай $A : C([0,1]) \to C([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 (ts + t^2 s^2) x(s) ds.$
Довести, що $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ і, зокрема, оператор A не має оберненого.

С4. Нехай $X_0 = X_1 = \big\{ x \in C^1([0,1]) \ : \ x(0) = 0 \big\}$ і на X_i розглядаються норми $||x||_0 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ та $||x||_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$ відповідно. Нехай також $A_i : C([0,1]) \to X_i,\ (A_i x)(t) = \int\limits_0^t x(s) ds$. Знайти A_i^{-1}. Довести. що A_1^{-1} неперервний, A_0^{-1} не є неперервним.

Д1. Знайти A^{-1} для оператора $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, дія якого задається формулою $(Ax)(t) = x(t) - \int\limits_0^t x(s) ds, t \in [0,1]$.

Д2. Довести, що оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, де $(Ax)(t) = x(t) - \int\limits_0^t tsx(s) ds,\ t \in [0,1]$, є неперервно оборотним. Знайти A^{-1}.

Д3. Нехай $X_2 = \big\{ x \in C^2([0,1]) \ : \ x(0) = x(1) = 0 \big\},\ ||x||_2 = \sum\limits_{k=0}^{2} \max\limits_{t\in[0,1]} |x^{(k)}(t)|$, оператор $A : X_2 \to C([0,1]), (Ax)(t) = x''(t) - 4x(t)$, $t \in [0,1]$. Знайти A^{-1} і довести, що A – неперервно оборотний.

Д4. Нехай X – банахів простір відносно $||\cdot||_1$ і $||\cdot||_2$. Припустимо, що $||\cdot||_1$ *підпорядкована* $||\cdot||_2$, тобто $\exists C > 0\ \forall x \in X \ : \ ||x||_1 \le C||x||_2$. Довести, що $||\cdot||_1$ еквівалентна нормі $||\cdot||_2$. Чи істотна повнота простору відносно обох норм?

В10

О1. Нехай оператор A задається формулою $Ax = (\alpha_1 x_1,\ \alpha_2 x_2, ...)$, $x \in l_p,\ 1 \le p \le +\infty$, де $\{\alpha_n : n \ge 1\} \subset \mathbf{C}$ – фіксована послідовність, $\sup\limits_{n\ge1} |\alpha_n| < +\infty$.
Довести, що A має неперервний обернений A^{-1} тоді й лише тоді, коли $\inf\limits_{n\ge1} |\alpha_n| > 0$.

І1. Нехай X_1 – простір з задачі С4. Довести, що кожний з наступних операторів: $A : X_1 \to C([0,1])$ є неперервно оборотним і знайти A^{-1}, якщо:

1) $(Ax)(t) = 2x'(t) - 3x(t)$;
2) $(Ax)(t) = x'(t) - tx(t)$;
3) $(Ax)(t) = x'(t) + e^t x(t)$;
4) $(Ax)(t) = 4x'(t) - x(t)$;
5) $(Ax)(t) = x'(t) - t^3 x(t)$;

6) $(Ax)(t) = x'(t) + e^{2t+1}x(t);$
7) $(Ax)(t) = x'(t) + 2t^2x(t);$
8) $(Ax)(t) = e^tx'(t) - 2tx(t);$
9) $(Ax)(t) = (t+1)x'(t) + tx(t);$
10) $(Ax)(t) = x'(t) + \alpha(t)x(t),\ \alpha \in C([0,1]).$

I2. Чи є оператор $A : l_2 \to l_2$ неперервно оборотним, якщо:
1) $Ax = (0, x_1, x_2, ...);$
2) $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_5, ...);$
3) $Ax = (x_1 - x_2, x_2, x_3, ...);$
4) $Ax = (0, x_3, x_4, x_5, ...);$
5) $Ax = (x_2, x_1, x_3, x_4, x_5, ...);$
6) $Ax = (x_1 - x_2, 2x_2 - 2x_1, x_3, ...);$
7) $Ax = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, ...);$
8) $Ax = (x_1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...);$
9) $Ax = (x_1 - x_2, x_2 + x_1, x_3, ...);$
10) $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4, x_5, ...)?$

Знайти оператор A^{-1}, якщо він існує.

O1. Нехай X – ЛНП, $A,\ B \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що:

1) коли існують A^{-1}, B^{-1}, то існує $(AB)^{-1}$, причому $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

2) коли існують $A^{-1}, (BA)^{-1}$, то існує B^{-1};

3) з існування $(AB)^{-1}$ не випливає існування $(BA)^{-1}$. Вказівка: розглянути оператори з пп 1,2 задачі I2.

O2. Нехай X–ЛНП, $A \in \mathcal{L}(X)$, існує послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ така, що $||x_n|| = 1$ і $Ax_n \to 0, n \to \infty$. Довести, що A не є неперервно оборотним.

I3. 1) Нехай $A_i : C([0,1]) \to C^{(i)}([0,1]),\ A_i$ задається формулою $(A_ix)(t) = \int\limits_0^t e^{-(s-t)}x(s)ds$. У кожному з випадків $i = 0; 1; 2$ відповісти на такі питання. а) Чи існує A_i^{-1}? б) Чи є A_i неперервно оборотним?

2) Нехай $A : C([-1,1]) \to C([-1,1]),\ (Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$. Чи існує A^{-1}?

3) Нехай $A, B : C([-1,1]) \to C([-1,1])$, де $(Ax)(t) = x(t^2)$, $(Bx)(t) = x(t^3),\ t \in [-1,1]$. Довести, що A^{-1} не існує, а B є неперервно оборотним. Знайти B^{-1}.

4) У просторі $C([0,1])$ оператори A і B визначаються формулами $(Ax)(t) = (t+1)x(t);\ (Bx)(t) = x(t^2),\ t \in [0,1]$. Знайти $(AB)^{-1}$ та $(BA)^{-1}$.

Заняття 11
ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ. ПОНЯТТЯ СПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

Контрольні запитання

1. Означення спряженого оператора в гільбертовому просторі.
2. Означення самоспряженого оператора.
3. Означення білінійної та квадратичної форми.
4. Зв'язок норми оператора та норми білінійної та квадратичної форми.
5. Означення унітарного, ізометричного, невід'ємного, нормального оператора, ортопроектора.

A11

O1. Знайти спряжений до оператора $A : H \to H$, якщо

1) $H = l_2,\ Ax = (0, x_1, x_2, ...)$;
2) $H = l_2,\ Ax = (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2, x_3, 0, 0, ...)$;
3) $H = L_2([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$.
4) $H = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = tx(t)$;
5) $Ax = (x, y)z$, де $y, z \in H$ – фіксовані елементи.

O2. Нехай лінійний оператор A в гільбертовому просторі $\mathbf{C}^m$ заданий матрицею $\mathcal{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^m$ і нехай $\mathcal{A}^*$ – транспонована комплексно спряжена матриця, $\mathcal{I}$ – одинична матриця. Довести, що:

1) A – самоспряжений $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$;
2) A – унітарний $\Leftrightarrow$ A – ізометричний $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$;
3) A – невід'ємний $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ та всі корені рівняння $\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0$ невід'ємні;
4) у випадку гільбертового простору $\mathbf{R}^m$ (тоді $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^T$ – звичайна транспонована матриця) твердження пп. 1 і 2 істинні, але з умови $(Ax, x) \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^m$, не випливає рівність $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^T$.

O3. Нехай A – оператор у l_2, заданий матрицею Якобі

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \alpha_4 & \beta_4 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix},\ \{\alpha_j, \beta_j,\ \gamma_j\ :\ j \geq 1\} \subset \mathbf{K}.$$

Довести, що оператор A неперервний тоді й тільки тоді, коли $\sup\limits_{k\geq 2}(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2+|\gamma_k|^2)<+\infty$. За яких умов на матрицю $\mathcal{A}$ оператор A самоспряжений? Розглянути випадки $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ і $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

О4. Нехай $(T,\mathcal{F},\mu)$ – простір із σ-скінченною мірою, A – оператор множення на функцію $p\in L_\infty(T,\mu)$ у просторі $L_2(T,\mu)$. Довести, що:

1) $A=A^*$ $\Leftrightarrow$ функція p дійсна майже скрізь;
2) A – унітарний $\Leftrightarrow$ $|p|=1$ майже скрізь;
3) $A\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $p\geq 0$ майже скрізь;
4) A – ортопроектор $\Leftrightarrow$ $p^2=p$ майже скрізь, тобто $p=\chi_C(\mathrm{mod}\,\mu)$, де $C\in\mathcal{F}$ – деяка множина.

О5. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір і $\{e_n : n\geq 1\}$ – ортонормований базис в H.

1) Знайти проектор на лінійну оболонку множини $\{e_1,...,e_k\},\ k\in\mathbf{N}$.
2) Довести, що оператор $Ax=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_{\sigma(n)}e_n,\ x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_ne_n\in H$, де $\sigma:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ – фіксована бієкція, є унітарним.

Д1. Довести, що неперервність білінійної форми b рівносильна кожній з наступних умов:

1) білінійна форма b обмежена;

2) існує єдиний оператор $A\in\mathcal{L}(H)$ такий, що $b(x,y)=(Ax,y)$, $x,y\in H$; при цьому $||b||=||A||$;

3) існує єдиний оператор $C\in\mathcal{L}(H)$ такий, що $b(x,y)=(x,Cy)$, $x,y\in H$; при цьому $||b||=||C||$.

Д2. Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K},\ A\in\mathcal{L}(H),\ A\geq 0$. Довести, що:

1) $|(Ax,y)|^2\leq(Ax,x)(Ay,y),\ x,y\in H$;
2) $||Ax||^2\leq||A||(Ax,x),\ x\in H$.

Д3. Чи є підпростором у гільбертовому просторі H множина $G=\{x\in H\,|\,(Ax,x)=0\}$, де $A\in\mathcal{L}(H)$, якщо: 1) $A^*=A$; 2) $A\geq 0$?

Д4. Нехай H – гільбертів простір, $P\in\mathcal{L}(H),\ P^2=P$. Довести, що такі твердження рівносильні:

1) P – ортопроектор;
2) $P=P^*$;
3) $PP^*=P^*P$;
4) $R(P)=(\mathrm{Ker}\,P)^\perp$;
5) $(Px,x)=||Px||^2,\ x\in H$.

Д5. Нехай $H_1,\ H_2$ – підпростори гільбертового простору H, $H_0:=H_1\cap H_2,\ P_j$ – ортопроектор на $H_j,\ j=0,1,2$. Позначимо $H_i\ominus H_0:=\{x\in H_i\,|\,x\perp H_0\},\ i=1,2$. Довести такі твердження:

1) P_1+P_2 – ортопроектор $\Leftrightarrow$ $P_1P_2=0$ $\Leftrightarrow$ $H_1\perp H_2$, при цьому P_1+P_2 – ортопроектор на $H_1\oplus H_2$;

2) P_1P_2 – ортопроектор $\Leftrightarrow$ $P_1P_2 = P_2P_1 \;\Leftrightarrow\; (H_1 \ominus H_0) \perp (H_2 \ominus H_0)$, при цьому P_1P_2 – ортопроектор на H_0;
3) $P_1 - P_2$ – ортопроектор $\Leftrightarrow$ $P_1 \geq P_2 \;\Leftrightarrow\; H_1 \supset H_2$, при цьому $P_1 - P_2$ – ортопроектор на $H_1 \ominus H_0$;
4) $P_1P_2 = P_2 \;\Leftrightarrow\; P_2P_1 = P_2 \;\Leftrightarrow\; P_1 \geq P_2 \;\Leftrightarrow\; H_1 \supset H_2$.

Для оператора $A \in \mathfrak{L}(H)$ виразити у вигляді алгебраїчного співвідношення між A і P_1 такі твердження:

5) H_1 інваріантний відносно A (тобто $A(H_1) \subset H_1$);
6) H_1 і $H_1^{\perp}$ інваріантні відносно A.

Д6. Навести приклад гільбертового простору H і операторів $A, B \in \mathfrak{L}(H)$ таких, що:

1) A – нормальний, але не самоспряжений:
2) $A^2 = A$, але A не є ортопроектором;
3) A – унітарний оператор, але не ортопроектор;
4) $A^* = A$, але жодна з нерівностей $A \geq 0,\; A \leq 0$ не виконується;
5) $A^2 = I$, але жодна з нерівностей $A \geq 0,\; A \leq 0$ не виконується;
6) $A^* = A$, але $R(A)$ не є замкненою в H;
7) $A^* = A$, але множина $\{(Ax, x) \mid x \in H,\; ||x|| = 1\}$ не є замкненою в $\mathbf{R}$;
8) $A \geq 0,\; B \geq 0$, але AB не є невід'ємним;
9) A не є нормальним;
10) $A \neq 0$, але $A^2 = 0$;
11) $A = A^*, B = B^*,\; A^2 = B^2$, але $AB \neq BA$.

Д7. Нехай H – комплексний гільбертів простір, $A \in \mathfrak{L}(H)$. Довести, що:

1) оператори $\mathrm{Re}A := \frac{1}{2}(A + A^*),\; \mathrm{Im}A := \frac{1}{2i}(A - A^*)$ самоспряжені;
2) оператор A однозначно зображається у вигляді $A = B + iC$, де B і C – самоспряжені оператори;
3) оператор A нормальний $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}A \cdot \mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A \cdot \mathrm{Re}A$;
4) оператор A унітарний тоді й тільки тоді, коли виконуються умови: а) A – нормальний; б) $(\mathrm{Re}A)^2 + (\mathrm{Im}A)^2 = I$.

Д8. Нехай A, B – лінійні оператори у гільбертовому просторі H такі, що $(Ax, y) = (x, By),\; x, y \in H$. Довести, що $A \in \mathfrak{L}(H)$ і $B = A^*$.

Д9. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathfrak{L}(H)$. Довести, що: $(R(A))^{\perp} = \mathrm{Ker}\, A^*,\; (\mathrm{Ker}\, A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}$ (риска означає замикання).

Д10. Нехай H – гільбертів простір, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathfrak{L}(H)$, $A_n \geq 0,\; n \geq 1$, а також $\exists C > 0\; \forall n \geq 1 \;:\; ||A_n|| \leq C$. Довести, що: $A_n \xrightarrow{s} 0,\ n \to \infty,\ \Leftrightarrow\ A_n \xrightarrow{w} 0,\ n \to \infty,\ \Leftrightarrow\ \forall x \in H\ :\ (A_n x, x) \to 0,\ n \to \infty.$

Д11. Нехай H – гільбертів простір, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$, і $\forall n \geq 1\ :\ A_n \geq 0,\ A_{n+1} \leq A_n$. Довести, що $\exists A \in \mathcal{L}(H)\ :\ A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty$.

Д12. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що коли $A \geq 0$, то $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)\ \Leftrightarrow\ \exists \lambda > 0\ :\ A \geq \lambda I$;

В11

І1. Знайти спряжений до оператора $A : H \to H$, якщо:

1) $H = l_2,\ Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$;
2) $H = l_2,\ Ax = (x_2, x_3, ...)$;
3) $H = l_2,\ Ax = (x_1, ..., x_j, 0, 0, ...)$;
4) $H = l_2,\ Ax = (\underbrace{0, ..., 0}_{j-1}, x_1, 0, 0, ...)$;
5) $H = l_2,\ Ax = (\underbrace{x_1, ..., x_1}_{j}, 0, 0, ...)$;
6) $H = l_2,\ Ax = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, ...)$;
7) $H = l_2,\ Ax = (\alpha_j x_j, \alpha_{j+1} x_{j+1}, ...)$;
8) $H = l_2,\ Ax = (0, 0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$;
9) $H = l_2,\ Ax = (x_1, 4x_2 + 7x_3, 7x_2 + 2x_3, 0, x_5, 0, 0, ...)$;
10) $H = l_2,\ Ax = (3x_1 - 2x_2, x_2, x_3, x_4, ...)$,

де $x = (x_1, x_2, ...),\ j \in \mathbf{N}$ – фіксоване, $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{C}$ – задані числа;

11) $H = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = \chi_{[-\alpha,\alpha]}(t) x(t)$;
12) $H = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = a(t) x(t+s)$;
13) $H = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$;
14) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t+\tau} x(\tau) d\tau$;
15) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = t^3 \int\limits_0^{t^2} x(\tau) d\tau$;
16) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^2 \tau^3 x(\tau) d\tau$;
17) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = x(t^\alpha)$,

де $a \in L_\infty(\mathbf{R})$ – задана функція, $\{s, \alpha\} \subset \mathbf{R},\ \alpha > 0$;

І2. Нехай $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{C}$ – фіксована обмежена послідовність, $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...),\ x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$. Виразити в термінах чисел $\alpha_n,\ n \geq 1$, твердження:

1) A – самоспряжений;
2) A – нормальний;
3) A – унітарний;
4) A – ізометричний;
5) A – ортопроектор;
6) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

I3. Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K}$ і $A, B, C, D \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) якщо $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ і $\exists C \in \mathbf{R}\ \forall x \in H\ :\ (Ax, x) \geq C||x||^2$, то $A = A^*$;
2) якщо $A^* = A$, то $A^2 \geq 0$;
3) умова $A^* = A$ у пункті 2 істотна;
4) якщо $A \leq B,\ B \leq A$, то $A = B$;
5) якщо $A \leq B,\ B \leq C$, то $A \leq C$;
6) якщо $A \leq C,\ B \leq D$, то $A + B \leq C + D$;
7) якщо $A \leq B,\ \lambda \geq 0$, то $\lambda A \leq \lambda B$;
8) якщо $A \leq B$, то $-B \leq -A$;
9) якщо $A^* = A,\ B^* = B$ і $AB = BA$, то $A^2 + B^2 \geq 2AB$;
10) якщо $A^* = A$, то $\exists m, M \in \mathbf{R}\ :\ mI \leq A \leq MI$;
11) якщо $A^* = A,\ B^* = B$, то не обов'язково $A \leq B$ або $B \leq A$;
12) якщо $A^* = A,\ A \geq 0$ і $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, то $A^{-1} \geq 0$;
13) якщо A і B унітарні, то AB теж унітарний;
14) якщо $A^* = A,\ B^* = B,\ A \geq B$, то оператори $C^*AC,\ C^*BC$ самоспряжені і $C^*AC \geq C^*BC$;
15) якщо $A^2 = A$, то $R(A)$ – замкнена множина в H;
16) якщо $\mathbf{K} = \mathbf{C},\ \alpha, \beta \in \mathbf{C},\ |\alpha| = |\beta| = 1$, то оператор $\alpha A + \beta A^*$ нормальний;
17) якщо A – ортопроектор, то $A \geq 0$;
18) якщо A – ортопроектор, то $I - A$ також ортопроектор;
19) якщо $\mathbf{K} = \mathbf{C},\ A = A^*,\ B = B^*$, то оператор $C := i(AB - BA)$ самоспряжений.

I4. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) A – ізометричний $\Leftrightarrow\ ||Ax|| = ||x||,\ x \in H$;
2) якщо H – скінченновимірний, то A – унітарний тоді й лише тоді, коли A – ізометричний;
3) A – ізометричний $\Leftrightarrow\ A^*A = I$;
4) A – унітарний $\Leftrightarrow\ A^*A = I$ і $AA^* = I$;
5) A може бути ізометричним, але не унітарним.

O1. Нехай $s \in \mathbf{R}, (A_s x)(t) = x(t+s), t \in \mathbf{R}, x \in L_2(\mathbf{R})$, – оператор зсуву.

1) Знайти A_s^* і A_s^{-1} та довести, що оператор A_s унітарний.
2) Покладемо $A = \frac{1}{2}(A_{s_0} + A_{s_1}),\ \{s_0, s_1\} \subset \mathbf{R}$. Довести, що $A^* = A\ \Leftrightarrow\ s_0 + s_1 = 0$.

O2. Нехай H – гільбертів простір і $\{A,\ A_n\ :\ n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) $A_n \rightrightarrows A \ \Leftrightarrow\ A_n^* \rightrightarrows A^*$;

2) $A_n \xrightarrow{w} A \ \Leftrightarrow\ A_n^* \xrightarrow{w} A^*$;

3) $A_n \xrightarrow{s} A \ \not\Leftrightarrow\ A_n^* \xrightarrow{s} A^*$.

O3. Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K}$, $b : H \times H \to \mathbf{K}$ – білінійна форма, $b[x] = b(x,x),\ x \in H,$ – відповідна квадратична форма. Довести, що:

1) якщо $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, то $4b(x,y) = b[x+y] - b[x-y] + ib[x+iy] - ib[x-iy],\ x,y \in H$ (*поляризаційна тотожність*);

2) якщо $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, то форма b симетрична ($b(x,y) = b(y,x),\ x,y \in H$) тоді й лише тоді, коли $4b(x,y) = b[x+y] - b[x-y],\ x,y \in H$;

O4. Довести, що у комплексному гільбертовому просторі такі твердження рівносильні: 1) оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ самоспряжений; 2) білінійна форма b_A, породжена оператором A, ермітова; 3) квадратична форма $b_A[x] = b_A(x,x),\ x \in H,$ набуває лише дійсних значень. Довести, що у дійсному гільбертовому просторі перші два твердження рівносильні між собою, але не рівносильні третьому.

O5. Нехай H – гільбертів простір, $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Довести твердження:

1) якщо $A = A^*,\ B^* = B$, то $(AB)^* = AB \ \Leftrightarrow\ AB = BA$;

2) якщо $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, то $\exists (A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ і $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

I5. Нехай H – гільбертів простір.

1) Нехай $A \in \mathcal{L}(H)$ – самоспряжений оператор. Довести, що $A = 0$ тоді й тільки тоді, коли $\forall x \in H\ :\ (Ax,x) = 0$.

2) У дійсному гільбертовому просторі побудувати ненульовий оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ такий, що $\forall x \in H\ :\ (Ax,x) = 0$.

3) Довести, що коли $U : H \to H,\ R(U) = H$ і $(Ux,Uy) = (x,y),\ x,y \in H$, то U – лінійний неперервний оператор (тобто U – унітарний оператор) і $||U|| = 1$;

4) оператор $P \in \mathcal{L}(H)$ є ортопроектором на деякий підпростір $G \subset H$ тоді й тільки тоді, коли $P^* = P$ і $P^2 = P$, при цьому $G = \{x \in H\ :\ Px = x\}$.

5) Нехай $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що $||A^*A|| = ||AA^*|| = ||A||^2 = ||A^*||^2$.

I6. Нехай H – гільбертів простір і $\{A,\ A_n\ :\ n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) $A_n = A_n^*,\ n \geq 1,\ A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty, \Rightarrow A = A^*$;

2) $A_n \geq 0,\ n \geq 1,\ A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty, \Rightarrow A \geq 0$;

3) A_n, A – нормальні, $n \geq 1,\ A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty, \Rightarrow\ A_n^* \xrightarrow{s} A^*,\ n \to \infty$;

4) $A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$, і $\forall x \in H\ :\ ||A_n x|| \to ||Ax||,\ n \to \infty$, $\Rightarrow A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty$; зокрема, це означає, що якщо A, A_n, $n \geq 1$, – ізометричні (унітарні), то $A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty,\ \Leftrightarrow$ $A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty$;

5) якщо $A_n,\ n \geq 1$, – ізометричні і $A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$, то A – не обов'язково ізометричний;

6)* якщо $A_n,\ n \geq 1$, – унітарні і $A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$, то A – не обов'язково унітарний.

I7. Нехай оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ задається в деякому ортонормованому базисі комплексного гільбертового простору H матрицею $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$. Довести, що:

1) A – самоспряжений $\Leftrightarrow$ матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ ермітова;

2) $A \geq 0\ \Leftrightarrow$ матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ ермітова і для кожного $n \in \mathbf{N}$ матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{n}$ невід'ємно визначена;

3) A – ортопроектор $\Leftrightarrow$ матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ ермітова і $a_{jk} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ji} a_{ik},\ j, k \in \mathbf{N}$;

4) A – ізометричний $\Leftrightarrow$ стовпчики матриці $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ є координатами відносно базиса $\{e_n : n \geq 1\}$ деякої ортонормованої системи.

Знайти умови, необхідні й достатні для того, щоб матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ визначала унітарний оператор в H.

Заняття 12
КОМПАКТНІ МНОЖИНИ ТА ОПЕРАТОРИ

Контрольні запитання

1. Означення компактної та передкомпактної множин.
2. Критерій Хаусдорфа компактності множин у метричному просторі.
3. Критерій компактності множин у евклідовому просторі.
4. Теорема Асколі-Арцела про компактність множин в $C([a,b])$.
5. Означення компактного оператора.
6. Властивості компактних операторів.
7. Теорема про компактність кулі в банаховому просторі.

А12

О1. З'ясувати, чи є наведені множини передкомпактними (компактними) у відповідних просторах:

1) $M = \{e_n : n \geq 1\}$ в $l_p,\ 1 \leq p < +\infty;$
2) $M = \{x_n(t) = t^n,\ t \in [0,1] \mid n \geq 1\}$ в $C([0,1])$, в $L_p([0,1]);$ $1 \leq p < +\infty;$
3) $M = \{x_n(t) = \cos nt,\ t \in [0,\pi] \mid n \geq 1\}$ в $C([0,\pi])$, в $L_2([0,\pi]);$
4) $M = \left\{x \in C^1([0,1]) \mid |x(t)| \leq 1,\ |x'(t)| \leq 3,\ t \in [0,1]\right\}$ в $C([0,1])$.

С1. Довести, що рівномірна границя скінченновимірних операторів у банаховому просторі є компактним оператором.

О2. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ – обмежена послідовність комплексних чисел. Розглянемо оператор $A : l_2 \to l_2,\ Ax := (a_1x_1, a_2x_2, ...)$. Довести, що A компактний тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

О3. Нехай X_1, X_2 – ЛНП, $A : X_1 \to X_2$ – лінійний оператор. Чи правильно, що $A \in S_\infty(X_1, X_2)$, якщо: 1) $\dim X_1 < +\infty$; 2) $\dim X_2 < +\infty$?

О4. Чи є оператор $A \in \mathcal{L}(l_2),\ Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...)$, компактним?

О5. Нехай $a_1, ..., a_n \in L_p([a,b]),\ b_1, ..., b_n \in L_q([a,b]),\ 1 \leq p \leq +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Покладемо $K(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)b_k(s)$. Довести компактність оператора $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ в просторі $L_p([a,b])$.

О6. Які з наведених операторів компактні у відповідних просторах X :

1) $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \sin(t - ts)x(s)ds,\ X = L_2([a,b]);$

2) $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \cos(ts)x(s)ds + 3x(t),\ X = L_2([a,b]);$

3) $(Ax)(t) = p(t)x(t),\ p \in L_\infty(\mathbf{R}),\ X = L_2(\mathbf{R}).$

С2. Чи є оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ компактним, якщо $(Ax)(t) = tx(t)$.

С3. Довести, що оператор $A : l_2 \to l_2$, що заданий матрицею Якобі (див. задачу А11.03) компактний тоді й лише тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0.$

С4. Нехай H – гільбертів простір і $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що оператори A, A^* і A^*A одночасно компактні або некомпактні.

Д1. Довести, що обмежена множина M елементів простору l_2 передкомпактна тоді й лише тоді, коли $\forall\varepsilon > 0\ \exists n = n(\varepsilon) \in \mathbf{N}\ \forall x \in M\ :\ \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 < \varepsilon.$

Узагальнити це твердження на випадок довільного сепарабельного гільбертового простору.

Д2. Сформулювати й довести критерій передкомпактності в $l_p,\ 1 \le p < +\infty.$

Д3. Сформулювати й довести критерій передкомпактності в $C^k([a,b]),\ k \in \mathbf{N}.$

Д4. Нехай $a_n > 0,\ n \in \mathbf{N}$. Сформулювати умови на $\{a_n : n \ge 1\}$, за яких наведена множина компактна в l_2 :

1) $\left\{x \in l_2 \mid\ \forall n \ge 1\ :\ |x_n| \le \frac{1}{a_n}\right\}$;2) $\left\{x \in l_2 \mid\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n|x_n|^2 \le 1\right\}$.

Д5. Нехай X – ЛНП, $M \subset X,\ N \subset X$. Чи правильно, що множина $M+N$: 1) компактна, якщо M і N – компактні; 2) передкомпактна, якщо M і N передкомпактні; 3) замкнена, якщо M – компактна, N – замкнена; 4) замкнена, якщо M і N – замкнені?

Д6. Довести компактність оператора $A : X_1 \to X_2$, заданого формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b],\ x \in X_1$, якщо:

1) $X_1 = L_2([a,b]),\ X_2 = C([a,b]),\ K \in C([a,b]^2);$

2) $X_1 = X_2 = L_2([a,b]),\ K(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\alpha},\ (t,s) \in [a,b]^2,\ t \ne s,\ K_0 \in L_\infty([a,b]^2),\ \alpha < \frac{1}{2};$

3) $X_1 = X_2 = C([a,b]),\ K(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\alpha},\ (t,s) \in [a,b]^2,\ t \ne s,\ K_0 \in C([a,b]^2),\ \alpha < 1;$

4) $X_1 = X_2 = C([0,1]),\ K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{|\sin t - \sin s|}},\ (t,s) \in [0,1]^2,\ t \ne s;$

5) $X_1 = X_2 = C([a,b]),\ K : [a,b]^2 \to \mathbf{R}$ – вимірна за Лебегом функція така, що $\forall t \in [a,b]\ :\ K(t,\cdot) \in L_1([a,b])$, а також $\forall t_0 \in [a,b]\ :\ \int\limits_a^b |K(t,s) - K(t_0,s)|ds \to 0,\ t \to t_0;$

6)* виконуються припущення п. 3, але $\alpha < 1$.

Д7. Чи може компактний оператор A в нескінченновимірному нормованому просторі задовольняти рівняння $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k A^k = 0$, де прийнято $A^0 = I$?

Д8. Сформулювати й довести критерій компактності в просторах $c_0; c$.

Д9*. Нехай X і Y – банахові простори, оператор $A : X \to Y$ компактний і його множина значень $R(A)$ замкнена. Довести, що $R(A)$ скінченновимірна.

Д10. Нехай H – гільбертів простір і $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що оператор A компактний тоді й тільки тоді, коли існує послідовність скінченновимірних лінійних операторів, яка рівномірно збігається до A.

Д11. Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис у гільбертовому просторі $H,\ A \in \mathcal{L}(H)$ і $\sup\limits_{x \in L_n} ||Ax|| \to 0,\ n \to \infty$, де $L_n = \left\{x \in (\{e_1, ..., e_n\})^{\perp} \mid ||x|| = 1\right\},\ n \geq 1$. Довести, що A – компактний оператор.

Д12. 1) Нехай X_1, X_2 – ЛНП, $A \in S_\infty(X_1, X_2)$. Довести, що A переводить довільну слабко збіжну послідовність у сильно збіжну.

2) Нехай X_1 – рефлексивний простір. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ буде компактним тоді й тільки тоді, коли він переводить усяку слабко збіжну послідовність у сильно збіжну.

3) Довести, що в п. 2) у частині достатності умова рефлексивності простору X_1 істотна.

Д13. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$ і $A \geq 0$. Довести, що оператор A компактний тоді й тільки тоді, коли для всякої слабко збіжної до нуля послідовності $\{x_n : n \geq 1\} \subset H$ виконується співвідношення $(Ax_n, x_n) \to 0,\ n \to \infty$.

Д14. Нехай $p > 1$ і $A \in \mathcal{L}(L_p([a,b]), C([a,b]))$. Довести, що оператор A компактний, як оператор, що діє з $L_p([a,b])$ в $L_p([a,b])$.

Д15. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір зі скінченною мірою, $p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $K : T \times T \to \mathbf{C}$ – вимірна функція, $\sup\limits_{t \in T} \int\limits_T |K(t,s)|^q d\mu(s) < \infty$. Довести, що оператор $A : L_p(T,\mu) \to L_p(T,\mu)$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_T K(t,s)x(s)d\mu(s),\ t \in T$, є компактним.

Д16. Які з наведених множин передкомпактні (компактні) в $C([0,1])$? $L_2([0,1])$?

1) $\left\{e^{-nt} \mid n \geq 1\right\}$;
2) $\{\sin \pi nt \mid n \geq 1\}$;
3)* $\{\sin(t+n) \mid n \geq 1\}$;
4) $\{\sin \alpha t \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$;
5) $\{\sin \alpha t \mid \alpha \in [1,3]\}$;
6) $\{\operatorname{arctg} \alpha t \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$;
7) $\left\{e^{t-\alpha} \mid \alpha \in \mathbf{R}\right\}$;
8) $\left\{e^{t-\alpha} \mid \alpha \geq 0\right\}$;
9) $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3} e^{-nt} \mid a_n \in (-1,1),\ n \geq 1\right\}$;
10) $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{t+n^2} \mid a_n \in (-1,1),\ n \geq 1\right\}$?

Д17. За якої умови на множину $A \subset \mathbf{R}$ наведені множини будуть передкомпактними (компактними) в $C([0,1])$:

1) $\{\sin \alpha t \mid \alpha \in A\}$;
2) $\{\operatorname{arctg} \alpha t \mid \alpha \in A\}$;
3) $\left\{e^{t-\alpha} \mid \alpha \in A\right\}$;
4) $\left\{\frac{1}{1+|t-\alpha|} \mid \alpha \in A\right\}$?

Д18. Довести компактність наведених множин в l_2 :

1) $\left\{x \in l_2 \mid \forall n \geq 1\ :\ |x_n| \leq \frac{1}{n}\right\}$;
2) $\left\{x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 \leq 1\right\}$;
3) $\left\{x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |x_n|^2 \leq 2\right\}$;
4) $\left\{x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n |x_n|^2 \leq 3\right\}$.

В12

І1. Довести, що наведені множини передкомпактні в $C([a,b])$ $(k_1, k_2 \in [0,+\infty)$ – фіксовані сталі):

1) $\left\{\int\limits_a^t x(u)du,\ t \in [a,b] \mid x \in M\right\}$, M – обмежена в $C([a,b])$;
2) $\{x \mid |x(a)| \leq k_1; |x(t_1) - x(t_2)| \leq k_2 |t_1 - t_2|,\ t_1, t_2 \in [a,b]\}$;
3) $\left\{x \in C^1([a,b]) \mid |x(t_0)| \leq k_1;\ |x'(t)| \leq k_2,\ t \in [a,b]\right\}$, де $t_0 \in [a,b]$ – фіксоване;
4) $\left\{x \in C^1([a,b]) \mid |x(a)| \leq k_1, \int\limits_a^b |x'(t)|^2 dt \leq k_2\right\}$;
5) $\left\{x \in C^1([a,b]) \mid \int\limits_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2) dt \leq k_2\right\}$;
6) $\left\{x \in C^2([a,b]) \mid |x(t)| \leq k_1, |x''(t)| \leq k_2,\ t \in [a,b]\right\}$;
7) $\{x \in C^1([a,b]) \mid |x(t)| \leq k_1, t \in [a,b];\ |x'(t_1) - x'(t_2)| \leq k_2 |t_1 - t_2|,\ t_1, t_2 \in [a,b]\}$;
8) одностайно неперервна множина неперервних функцій, значення яких обмежені однією сталою в деякій точці $t_0 \in [a,b]$;

9) обмежена множина многочленів степеня n.

Які з цих множин будуть компактними в $C([a,b])$?

O4. Які з наведених операторів в l_2 компактні:

1) $Ax = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$;

2) $Ax = (x_2, x_3, ..., x_{100}, 0, 0, ...)$;

3) $Ax = (x_3, \frac{x_4}{2}, ..., \frac{x_n}{n-2}, ...)$?

I2. Які з наведених операторів $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ є компактними:

1) $(Ax)(t) = x(0) + t^2 x(1)$;

2) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$;

3) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{its} x(s)ds$;

4) $(Ax)(t) = t^2 x(t)$;

5) $(Ax)(t) = x(\sqrt{t})$;

6) $(Ax)(t) = x(t^3)$;

7) $(Ax)(t) = 3x(t) + \int\limits_0^1 e^{ts} x(s)ds$;

8) $(Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(1-t))$;

9) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 x(s^2)ds$?

I3. Які з наведених операторів $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ є компактними:

1) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)ds$;

2) $(Ax)(t) = p(t) \int\limits_0^1 q(s)x(s)ds$, де $p, q \in L_2([0,1])$;

3) $(Ax)(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (ts^2 + s)x(s)ds$;

4) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$;

5) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t tsx(s)ds$?

O1. Чи буде компактним оператор вкладення ЛНП X у ЛНП Y, якщо: 1) $X = l_1, Y = l_2$; $2) X = l_1, Y = c_0$; $3) X = C([0,1]), Y = L_2([0,1])$; $4) X = L_2([0,1]), Y = L_1([0,1])$?

O2. Довести, що оператор ортогонального проектування в гільбертовому просторі буде компактним тоді й лише тоді, коли він скінченновимірний.

O3. Знайти необхідну й достатню умову на обмежену послідовність $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{R}$, щоб оператор $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$, $x \in X$, був компактним у просторі X, якщо: 1) $X = l_p$, $1 \leq p < +\infty$; $2) X = l_\infty$.

O4. За якої умови на функцію a оператор $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ буде компактним у просторі: 1) $C([0,1])$, якщо $a \in C([0,1])$; 2) $L_2([0,1])$, якщо $a \in L_\infty([0,1])$?

O5. Чи є компактним оператор $A : X \to Y, (Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $t \in [0,1]$, якщо: 1) $X = C^1([0,1]),\ Y = C([0,1]);\ 2) X = C^2([0,1]),$ $Y = C^1([0,1]);\ 3) X = C^2([0,1]), Y = C([0,1])$?

I4*. Довести компактність оператора $A : X_1 \to X_2$, заданого формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b],\ x \in X_1$, якщо:

1) $X_1 = X_2 = C([a,b]),\ K(t,s) = \frac{K_0(t,s)}{|t-s|^\alpha},\ (t,s) \in [a,b]^2,$ $t \neq s,\ K_0 \in C([a,b]^2),\ \alpha < 1;$
2) $X_1 = X_2 = C([0,1]),\ K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{|\sin t - \sin s|}},\ (t,s) \in$ $[0,1]^2,\ t \neq s.$

Заняття 13
СПЕКТР ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

Контрольні запитання

1. Означення регулярної точки, резольвенти, резольвентної множини та спектра лінійного оператора.
2. Означення власного числа і власного вектора(елемента) оператора.
3. Означення спектрального радіуса оператора та формула для його обчислення.
4. Означення $\sigma(A), \sigma_p(A)$.
5. Властивості спектра лінійного неперервного оператора.
6. Властивості спектра самоспряженого оператора. Зв'язок між спектральним радіусом і нормою самоспряженого оператора.

А13

О1. 1) Довести, що спектр лінійного оператора A у скінченновимірному нормованому просторі X збігається з множиною власних чисел матриці, яка задає оператор A у деякому базисі.

2) Навести приклад оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^m)$ такого, що $r(A) = 0$, але $A \neq 0$.

О2. Нехай $X = l_2,\ \{a_n : n \geq 1\} \in l_\infty,\ Ax = \{a_n x_n\ :\ n \geq 1\}$. Довести, що:

1) $\sigma_p(A) = \{a_n : n \geq 1\}$; 2) $\sigma(A) = \overline{\{a_n : n \geq 1\}}$.

С1. Нехай $A : l_2 \to l_2,\ Ax = (x_1 - x_2, x_2, x_3, ...)$. Знайти $B = A^*A,\ \sigma(B),\ ||B||,\ ||A||$.

О3. Нехай $X = L_2([a, b]),\ (Ax)(t) = tx(t),\ t \in [a, b]$. Знайти $\sigma(A),\ \sigma_p(A),\ R_\lambda(A),\ r_A$.

О4. Нехай H – гільбертів простір і $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що $\sigma(A^*) = \left\{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\right\}$.

О5. Нехай $X = l_2,\ A, B \in \mathcal{L}(l_2),\ Ax = (x_2, x_3, x_4, ...),$ $Bx = (0, x_1, x_2, ...),\ x \in l_2$. Знайти $\sigma(B),\ \sigma_p(B),\ B^*$ і те саме для оператора A.

О6. Нехай H – гільбертів простір, $U \in \mathcal{L}(H)$ – унітарний оператор. Довести, що $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

О7. Нехай H – гільбертів простір, P – проектор в H, $P \neq 0$ і $P \neq I$. Довести, що $\sigma(P) = \sigma_p(A) = \{0, 1\},\ R_\lambda(P) = -\frac{1}{\lambda}(I - P) - \frac{1}{\lambda - 1}P,\ \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$.

Д1. Нехай X – банахів простір, $A, B \in \mathcal{L}(X)$ і $AB = BA$. Довести, що

1) $r(AB) \leq r(A)r(B)$;

2)* $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Чи вірні ці твердження у випадку, коли A і B не комутують?

Д2. Довести, що довільна непорожня компактна множина в $\mathbf{C}$ може бути спектром деякого лінійного неперервного оператора. Вказівка: скористатися задачею О2.

Д3. Розглянемо діагональний оператор $A \in \mathcal{L}(l_p)$ $(1 \le p \le +\infty)$, $Ax = \{a_n x_n \,:\, n \ge 1\}$, де $\{a_n : n \ge 1\} \in l_\infty$. 1) Знайти множину власних чисел оператора A. 2) Знайти спектр $\sigma(A)$ та резольвенту $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1},\ \lambda \in \rho(A)$, оператора A. 3) Знайти степені A^n, $n \ge 1$ та спектральний радіус оператора A.

Д4. Нехай X – банахів простір, оператор $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що

1) $\sigma_p(A^2) = \left\{\lambda^2 \mid \lambda \in \sigma_p(A)\right\}$;

2) $\sigma(A^2) = \left\{\lambda^2 \mid \lambda \in \sigma(A)\right\}$;

3) $\sigma(A^n) = \{\lambda^n \mid \lambda \in \sigma(A)\}$, $n \ge 1$;

4) якщо p – поліном, то $\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

Д5. Нехай X – банахів простір і оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ задовольняє співвідношення $A^n + c_1 A^{n-1} + \ldots + c_n I = 0$, де $c_1, \ldots, c_n$ – фіксовані комплексні числа. Довести: якщо $\lambda \in \sigma(A)$, то $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n = 0$. Чи вірне обернене твердження?

Д6. Нехай $A \in \mathcal{L}(L_2(\mathbf{R}))$, $s \in \mathbf{R}$, $(Ax)(t) = x(t+s)$, $t \in \mathbf{R}$. Знайти $\sigma(A), \sigma_p(A)$.

Д7. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести: якщо для $\lambda \in \mathbf{C}$ існує така послідовність $\{x_n : n \ge 1\} \subset X$, $||x_n|| = 1$, що $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n - \lambda x_n) = 0$, то $\lambda \in \sigma(A)$.

Д8. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^*$. Довести: $\lambda \in \rho(A)$ тоді й тільки тоді, коли існує $r > 0$ таке, що $\forall x \in H \;:\; ||(A - \lambda I)x|| \ge r||x||$. Вивести звідси, що $\lambda \in \sigma(A)$ тоді й тільки тоді, коли існує така послідовність $\{x_n : n \ge 1\} \subset H$, $||x_n|| = 1$, що $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n - \lambda x_n) = 0$.

Д9*. Довести, що для $A, B \in \mathcal{L}(X) \;:\; r(AB) = r(BA)$.

Д10*. Нехай X – банахів простір, $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що $\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}$ і $\forall\lambda \in \rho(AB)\backslash\{0\} \;:\; A(BA - \lambda I)^{-1}B - \lambda(AB - \lambda I)^{-1} = I$.

Д11. Нехай X – банахів простір, оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ і має неперервний обернений A^{-1}. Довести, що 1) $\sigma(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\right\}$; 2) A і A^{-1} мають однакові власні вектори.

Д12. Знайти спектри операторів $(Ax)(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$, $(Bx)(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$, $X = C([-1,1])$.

Д13. Нехай $s \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ – фіксоване число, оператор $A : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$ і визначається рівністю $(Ax)(t) = x(t+s)$, $t \in \mathbf{R}$. Довести, що $\sigma_p(A) = \varnothing$, а $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

В13

О1. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що A і $R_\lambda(A)$ комутують.

І1. Знайти $\sigma(A),\ \sigma_p(A)$, резольвенту, спектральний радіус оператора $A : l_2 \to l_2$, якщо:

1) $Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, ...)$;
2) $Ax = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2, x_3, x_4, ...)$;
3) $Ax = (-2x_3, x_1, 4x_2, x_4, x_5, ...)$;
4) $Ax = (x_1, ..., x_k, 0, ...),\ k \in \mathbf{N}$ – фіксоване;
5) $Ax = (0, x_1, x_2, 0, ...)$;
6) $Ax = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2, x_3, x_4, ...)$;
7) $Ax = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, x_3, x_4, ...)$;
8) $Ax = (x_1 + 2ix_2, (3 - 2i)x_1 + x_2, x_3, x_4, ...)$;
9) $Ax = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2, x_3, x_4, ...)$;
10) $Ax = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2, x_1 - x_3, x_4, x_5, ...)$.

І2. Знайти $||A||$ для операторів з попередньої задачі.

І3. 1) Для оператора $A : C([a,b]) \to C([a,b])$, що задається формулою $(Ax)(t) = tx(t), t \in [a,b]$, знайти $\sigma(A),\ \sigma_p(A),\ \sigma_r(A),\ \sigma_c(A),\ R_\lambda(A)$.

2) Те саме для оператора $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, що задається формулою $(Ax)(t) = e^t x(t), t \in [a,b]$.

3) Те саме для оператора $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, що задається формулою $(Ax)(t) = a(t)x(t), t \in [0,1],\ a \in C([0,1])$.

4) Те саме для оператора $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$, що задається формулою $(Ax)(t) = a(t)x(t), t \in [0,1],\ a \in C([0,1])$.

І4. Знайти спектр і спектральний радіус оператора $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, якщо:

1) $(Ax)(t) = (t+1)x(t)$; 3) $(Ax)(t) = te^t x(t)$;
2) $(Ax)(t) = x(0) + tx(1)$; 4) $(Ax)(t) = 2x(0) + x(\frac{1}{2})$.

О2. Розглянемо в $L_2([0,1])$ інтегральний оператор Вольтерри $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds,\ t \in [0,1]$.

1) Знайти $\sigma(A)$ і $R_\lambda(A)$.

2) Знайти $A + A^*$ і довести, що це проектор на одновимірний підпростір, що складається з констант.

І5. Знайти спектр і спектральний радіус оператора $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$, якщо:

1) $(Ax)(t) = (t+1)x(t)$; 3) $(Ax)(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(t)x(t) + t\chi_{[\frac{1}{2},1]}(t)x(t)$;

2) $(Ax)(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(t)x(t)$; 4) $(Ax)(t) = (\ln(t+1))x(t)$.

16. 1) Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що спектральний радіус $r(A)$ не зміниться, якщо в X перейти до еквівалентної норми.

2) Знайти власні числа, власні функції та спектр оператора $A : C([-\pi, \pi]) \to C([-\pi, \pi])$, якщо $(Ax)(t) = x(-t),\ t \in [-\pi, \pi]$.

3) Довести, що спектральний радіус оператора $A : C([0, \frac{1}{2}]) \to C([0, \frac{1}{2}])$, де $(Ax)(t) = tx(t^2),\ t \in [0, \frac{1}{2}]$, дорівнює нулю.

Заняття 14
СПЕКТР КОМПАКТНИХ ОПЕРАТОРІВ. ОПЕРАТОРИ ГІЛЬБЕРТА-ШМІДТА

Контрольні запитання

1. Теорема про спектр компактного оператора.

2. Теорема Гільберта-Шмідта для самоспряженого компактного оператора.

3. Означення оператора Гільберта-Шмідта.

A14

O1. Які з наведених множин можуть бути спектром компактного оператора в l_2 : 1) $[0,1]$, 2) $\{0,1\}$, 3) $\{0\}$, 4) $\{1\}$, 5) $\left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$, 6) $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$, 7) $\{0\} \cup \left\{\frac{i}{n} : n \geq 1\right\}$?

O2. Нехай y, z – фіксовані елементи гільбертового простору H і $A \in \mathcal{L}(H)$ – оператор, що задається рівністю $Ax = (x,y)z$. Знайти $\sigma_p(A), \sigma(A), R_\lambda(A),\ A^n$ для довільного $n \geq 1$ та $r(A)$.

C1. З'ясувати, чи буде оператор $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 ts^3 x(s)ds$ компактним і знайти його спектр у просторі 1) $L_2([0,1])$; 2) $C([0,1])$.

O3. Нехай $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\pi t \sin n\pi s,\ \ t,s \in [-1,1]$. Розглянемо в $L_2([-1,1])$ оператор A, який діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{-1}^{1} K(t,s)x(s)ds,\ t \in [-1,1]$.

1) Довести, що A – самоспряжений оператор Гільберта – Шмідта (зокрема, A – компактний оператор). 2) Знайти $\sigma(A),\ \ r(A)$ і $||A||$, а також послідовність власних функцій. 3) Зобразити A у вигляді рівномірно збіжного ряду одновимірних операторів (ряду Шмідта).

O4. Нехай $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \min\{t,s\} x(s)ds$ – оператор в $L_2([0,1])$. Довести, що: 1) A – самоспряжений оператор Гільберта-Шмідта; 2) будь-яка функція φ, що відповідає власному числу λ оператора A, належить до простору $C^2([0,1])$ і є розв'язком крайової задачі $\lambda\varphi'' + \varphi = 0,\ \varphi(0) = 0,\ \varphi'(1) = 0$; 3) послідовності власних чисел і відповідних ортонормованих власних функцій оператора A визначаються формулами $\lambda_n = \pi^{-2}(n + \frac{1}{2})^{-2},\ \varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin(n+\frac{1}{2})\pi t,\ n \geq 0.$

Знайти $\sigma(A), r(A)$, зобразити A у вигляді ряду Шмідта, довести, що $\min(t,s) = \frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t \sin(n+\frac{1}{2})\pi s}{(n+\frac{1}{2})^2},\ t,s \in [0,1].$

С2. З'ясувати, чи буде оператор $(Ax)(t) = x(t) + \int\limits_{-1}^{1} (ts + 3t^2s^2)x(s)ds$ компактним і знайти його спектр в $L_2([a, b])$.

С5. Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – деякий ортонормований базис у гільбертовому просторі H, $A \in \mathcal{L}(H)$ і $Ae_n = \lambda_n e_n$, $n \geq 1$, де $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ – деяка обмежена числова послідовність. Довести, що $\forall x \in H \ : \ Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$.

С6. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $\{e_n : n \geq 1\}$ і $\{g_n : n \geq 1\}$ – дві ортонормовані послідовності в H, $\{s_n : n \geq 1\}$ – числова послідовність така, що $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 0$. Для довільного $x \in H$ покладемо $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n (x, g_n) e_n$, $A_k x = \sum\limits_{n=1}^{k} s_n (x, g_n) e_n$. Довести, що: 1) $A_n \rightrightarrows A$, $n \to \infty$; 2) A – компактний оператор в H; 3) A – оператор Гільберта – Шмідта тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 < \infty$.

Д1. Знайти норму оператора Вольтерра в $L_2([0, 1])$: $(Vx)(t) = \int\limits_{0}^{t} x(s)ds$. Вказівка: скористатись задачею Б11.І5.

Д2. Нехай A – самоспряжений компактний оператор у гільбертовому просторі H, $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\cdot, \varphi_n) \varphi_n$ – його розклад у ряд Шмідта. Довести твердження:

1) $\forall k \geq 1 \ : \ A^k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k (\cdot, \varphi_n) \varphi_n$;
2) $\forall \lambda \in \mathbf{C} \backslash \{0, \lambda_n, \ n \geq 1\} \ : \ R_\lambda(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\cdot, \varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n$;
3) якщо $A \geq 0$ і $\sqrt{A} := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (\cdot, \varphi_n) \varphi_n$, то $(\sqrt{A})^2 = A$.

Д3. Нехай A – невід'ємний компактний оператор у гільбертовому просторі H. Довести, що існує єдиний невід'ємний компактний оператор B такий, що $B^2 = A$, при цьому, звичайно, $B = \sqrt{A}$, де оператор $\sqrt{A}$ визначений 1) у попередній задачі; 2) у задачі 50 з розділу 9.

Д4. Нехай A – компактний оператор у гільбертовому просторі H, тоді A^*A – компактний самоспряжений оператор. Покладемо $|A| := \sqrt{A^*A}$. Довести, що $A = W|A|$, де W – частково ізометричний оператор в H, тобто $W \in \mathcal{L}(H)$ і $\forall x \in H \ominus \operatorname{Ker} W \ : \ ||Wx|| = ||x||$.

Д5. Довести, що будь-який компактний оператор у гільбертовому просторі H зображується рівномірно збіжним рядом Шмідта: $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n (\cdot, \varphi_n) \psi_n$, де $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ – ортонормована послідовність власних функцій самоспряженого компактного оператора $|A| := \sqrt{A^*A}$, визначеного в задачі 17.3, $\{s_n : n \geq 1\}$ – відповідна послідовність власних чисел оператора $|A|$ і $\{\psi_n : n \geq 1\}$ – деяка ортонормована послідовність. Числа $s_n,\ n \geq 1,$ називають *сингулярними числами* оператора A.

Д6. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...),\ \forall k \geq 1\ :\ \alpha_k \geq 1,\ l_{2,\alpha}$ – гільбертів простір усіх послідовностей $x = (x_1, x_2, ...)$, які задовольняють умову $||x||_\alpha = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$, із відповідним скалярним добутком. Довести твердження: 1) $l_{2,\alpha} \subset l_2$ і норма оператора вкладення $A : l_{2,\alpha} \to l_2,\ Ax = x$, не перевищує одиниці; 2) оператор A компактний тоді й лише тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$; 3) $A \in S_2(l_{2,\alpha}, l_2)$ тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty$.

Д7. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір. Довести твердження:

1) для $A \in S_2(H)$ величина $||A||_2$ не залежить від вибору ортонормованого базису $\{e_n : n \geq 1\}$ і визначає норму в $S_2(H)$, яка мажорує норму $||A||$ оператора A; при цьому $(S_2(H), ||\cdot||_2)$ – банахів простір;

2) норма $||A||_2$ визначається скалярним добутком $(A, B)_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ag_n, Bg_n),\ A, B \in S_2(H)$, де $\{g_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис в H;

3) $A \in S_2(H)\ \Leftrightarrow\ A^* \in S_2(H)$;

4) $S_2(H)$ – двосторонній ідеал в $\mathfrak{L}(H)$, причому $\forall A \in S_2(H)$ $\forall B, C \in \mathfrak{L}(H)\ :\ ||BAC||_2 \leq ||B|| \cdot ||C|| \cdot ||A||_2$;

5) $S_2(H)$ – сепарабельний гільбертів простір з базисом, який складається з одновимірних операторів $A_{mn} = (\cdot, e_n)g_m,\ \{m, n\} \subset \mathbf{N}$, де $\{e_n : n \geq 1\}$ і $\{g_n : n \geq 1\}$ – деякі ортонормовані базиси в H;

6) якщо $A \in S_2(H)$, то A компактний;

7)* якщо $H = L_2(T, \mu)$, то $A \in S_2(H)$ тоді й тільки тоді, коли A – інтегральний оператор $(Ax)(t) = \int\limits_T K(t, s)x(s)d\mu(s),\ t \in T$, з ядром Гільберта – Шмідта: $\int\limits_T \int\limits_T |K(t, s)|^2 d\mu(t)d\mu(s) < \infty$.

Д8*. Оператор $A \in \mathfrak{L}(H)$ називають ядерним, якщо він має вигляд скінченної суми $A = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k C_k,\ \{B_k, C_k,\ k = 1, ..., n\} \subset S_2(H)$. Нехай $S_1(H)$ – множина всіх ядерних операторів у H. Довести твердження:

1) $S_1(H)$ – двосторонній ідеал у $\mathfrak{L}(H)$;

2) якщо $A \in S_1(H)$, то $A^* \in S_1(H)$;

3) якщо $A \in S_1(H)$ і $\{e_n : n \geq 1\}$ – деякий ортонормований базис у H, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(Ae_n, e_n)| < \infty$, причому вираз $SpA := \sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ae_k, e_k)$ не залежить від вибору базису $\{e_n : n \geq 1\}$. Його називають *слідом оператора* A.

4) $A \in S_1(H)$ тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$, де $s_n,\ n \geq 1,$ – сингулярні числа оператора A (див. задачу 30);

5) $A \in S_1(H)$ тоді й тільки тоді, коли $A = BC$, де $B, C \in S_2(H)$;

6) якщо $A \geq 0$, то $A \in S_1(H)$ тоді й тільки тоді, коли для деякого базису $\{e_n : n \geq 1\}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(Ae_n, e_n) < \infty$; при цьому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(Ae_n, e_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, де $\{\lambda_n : n \geq 1\} = \sigma_p(A)$, тобто матричний слід (ліва частина) збігається зі спектральним слідом (права частина) оператора A. (Зауважимо, що наведена рівність справджується для всіх операторів $A \in S_1(H)$ і без припущення, що $A \geq 0$ (теорема Лідського)).

7) функція $S_1(H) \ni A \mapsto ||A||_1 = Sp(|A|) \in \mathbf{R}$ є нормою.

Д9*. Нехай H_1, H_2 – сепарабельні гільбертові простори, $\{e_n : n \geq 1\}$, $\{f_n : n \geq 1\}$ – ортонормовані базиси в H_1 та H_2 відповідно. Оператор $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ називають оператором Гільберта – Шмідта, якщо його абсолютна норма $||A||_2 := \left(\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |(Ae_k, f_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ скінченна. Довести, що:

1) функції $\operatorname{sh} t,\ e^{ikt},\ t \in [-\pi, \pi],\ k \in \mathbf{Z}$, утворюють повну ортогональну систему в просторі $W_2^1([-\pi, \pi])$ (див. задачу 106 з розділу 11);

2) оператор вкладення простору $W_2^1([-\pi, \pi])$ у простір $L_2([\pi, \pi])$ є оператором Гільберта – Шмідта.

Д10*. (Нікольський). Довести, що теорема про спектр компактного оператора залишається правильною для оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, де X – банахів простір, якщо умову $A \in S_\infty(X)$ замінити вимогою, щоб $A^k \in S_\infty(X)$ для деякого $k \in \mathbf{N}$.

В14

О1. Навести приклад компактного оператора в l_2, для якого: 1) 0 не є власним значенням; 2) 0 є власним значенням скінченної кратності; 3) 0 є власним значенням нескінченної кратності.

О2. Нехай $A \in \mathcal{L}(L_2([0, \pi]))$, $(A\varphi_n)(t) = \frac{1}{n^2}\varphi_n(t),\ t \in [0, \pi]$, $n \geq 1$, де $\varphi_n(t) = \sin nt$. Довести, що A – інтегральний оператор Гільберта – Шмідта. Знайти його ядро K.

О3. Нехай K – парна 2π-періодична дійсна функція з $L_2([-\pi, \pi])$; $K(t) = \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{int},\ t \in \mathbf{R}$ – її розклад у ряд Фур'є. Розглянемо в $L_2([-\pi, \pi])$ оператор A, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-s)x(s)ds,\ t \in [-\pi, \pi]$.

1) Довести, що A – самоспряжений оператор Гільберта – Шмідта і функції $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int},\ t \in [-\pi, \pi],\ n \in \mathbf{Z}$, які утворюють ортонормований базис у просторі $L_2([-\pi, \pi])$, є власними функціями оператора A.

2) Знайти $\sigma(A),\ r(A)$ і $||A||$.

3) Зобразити A у вигляді ряду Шмідта.

I1. Нехай K – парна 2π-періодична дійсна функція, яка належить до $L_2([-\pi, \pi]); K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt,\ t \in \mathbf{R}$ – її розклад у ряд Фур'є. Розглянемо в $L_2([-\pi, \pi])$ оператор A, який діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t+s)x(s)ds,\ t \in [-\pi, \pi]$.

1) Довести, що A – самоспряжений оператор Гільберта – Шмідта; послідовності його власних чисел і ортонормованих власних функцій визначаються формулами $\lambda_0 = \pi a_0,\ \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \lambda_n^{(1)} = -\pi a_n,\ \varphi_n^{(1)}(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}; \lambda_n^{(2)} = \pi a_n,\ \varphi_n^{(2)}(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\ n \geq 1.$

2) Знайти $\sigma(A),\ r(A)$ і $||A||$.

3) Зобразити A у вигляді ряду Шмідта.

I2. Знайти норму, спектр, власні числа та власні функції оператора $A : L_2([-\pi, \pi]) \to L_2([-\pi, \pi])$, який діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t,s)x(s)ds,\ t \in [-\pi, \pi]$, у таких випадках:

1) $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n \cos n(t-s),\ N \in \mathbf{N},\ \{\lambda_1, ..., \lambda_N\} \subset \mathbf{C}$;

2) $K(t,s) = \cos^4(t-s)$;

3) $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nt \cos ns$;

4) $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(2n+1)t \sin(2n+1)s$;

5) $K(t,s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)t \cos(2n+1)s$;

6) $K(t,s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)(t-s)$.

I3. Знайти норму, спектр, власні числа та власні функції оператора $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, який діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{a}^{b} K(t,s)x(s)ds$, $t \in [a,b]$, у таких випадках:

1) $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & t \le s, \\ s(1-t), & s \le t, \end{cases}$ $a = 0, b = 1;$

2) $K(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & t \le s, \\ \cos t \sin s, & s \le t, \end{cases}$ $a = 0, b = \pi;$

3) $K(t,s) = \begin{cases} \cos t \sin s, & t \le s, \\ \sin t \cos s, & s \le t, \end{cases}$ $a = 0, b = \pi;$

4) $K(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, & t \le s, \\ t(s+1), & s \le t, \end{cases}$ $a = 0, b = 1;$

5) $K(t,s) = \begin{cases} \sin t \sin(1-s), & t \le s, \\ \sin(1-t) \sin s, & s \le t, \end{cases}$ $a = 0, b = 1;$

6) $K(t,s) = \begin{cases} (1+t)(1-s), & t \le s, \\ (1-t)(1+s), & s \le t, \end{cases}$ $a = -1, b = 1.$

I4. Знайти спектр і спектральний радіус оператора $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, якщо:

1) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s) ds;$ 3) $(Ax)(t) = t^\alpha \int\limits_0^1 s^\beta x(s) ds, \ \alpha, \beta \ge 0;$

2) $(Ax)(t) = t \int\limits_0^1 s^2 x(s) ds;$ 4) $(Ax)(t) = e^t \int\limits_0^1 s x(s) ds;$

I5. Знайти спектр і спектральний радіус оператора $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$, якщо:

1) $(Ax)(t) = t^\alpha \int\limits_0^1 x(s) ds, \ \alpha > -\frac{1}{2};$

2) $(Ax)(t) = t \int\limits_0^1 s^2 x(s) ds;$

3) $(Ax)(t) = t^\alpha \int\limits_0^1 s^\beta x(s) ds,$ $\alpha, \beta \ge 0;$

4) $(Ax)(t) = e^t \int\limits_0^1 s x(s) ds;$

5) $(Ax)(t) = t \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{1+s^2} ds;$

I6. З'ясувати, чи буде оператор $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s) x(s) ds$ компактним і знайти його спектр в $L_2([a,b])$:

1) $K(t,s) = \cos(t-s), \ a = 0, \ b = 2\pi;$
2) $K(t,s) = \sin(t-s), \ a = 0, \ b = 2\pi;$
3) $K(t,s) = \cos(t+s), \ a = 0, \ b = \pi;$

4) $K(t,s) = ts - 2t^2s^2,\ a=-1,\ b=1;$
5) $K(t,s) = ts + t^2s^2,\ a=0,\ b=1.$
У кожному випадку знайти норму оператора A.

17. З'ясувати, чи буде оператор $(Ax)(t) = x(t) + \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ компактним і знайти його спектр в $L_2([a,b])$:
1) $K(t,s) = t^2s + 5ts^2,\ a=-1,\ b=1;$
2) $K(t,s) = \cos(t-s),\ a=-\pi,\ b=\pi.$

18. Знайти спектр, власні числа, спектральний радіус та норми операторів в l_2 :

1) $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...);$ 2) $Ax = (x_2, x_3, ..., x_{100}, 0, 0, ...).$

Заняття 15

МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ

Контрольні запитання

1. Означення інтегральних рівнянь Вольтерри та Фредгольма I та II роду.
2. Метод послідовних наближень для розв'язування інтегральних рівнянь.
2. Означення повторних ядер та резольвенти інтегрального рівняння.
3. Означення інтегрального рівняння з виродженим ядром. Зведення розв'язання інтегрального рівняння з виродженим ядром до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

A15

О1. Методом послідовних наближень розв'язати інтегральні рівняння, узявши $x_0(t) = 0$:

1) $x(t) = \int\limits_0^t \frac{x(s)}{1+s^2} ds + \operatorname{arctg} t,\ t \in [0, T],\ T > 0;$

2) $x(t) = \int\limits_0^1 e^{-t-s} x(s) ds + 1,\ t \in [0, 1];$

О2. Побудувати резольвенту інтегрального рівняння

$$x(t) = -\int\limits_0^t e^{t-s} x(s) ds + t^2 e^t,\ t \in [0, T],$$

та за її допомогою розв'язати рівняння у випадку.

С1. Побудувати резольвенту інтегрального рівняння

$$x(t) = 2\int\limits_0^t e^{t^2-s^2} x(s) ds + e^{t^2+2t},\ t \in [0, T].$$

та за її допомогою розв'язати рівняння.

О3. Побудувати резольвенту інтегрального рівняння $x(t) = 2\int\limits_0^1 ts x(s) ds + t,\ t \in [0, 1]$. та за її допомогою розв'язати рівняння.

О4. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t, s) x(s) ds + y(t),\ t \in [a, b],\ \lambda \in \mathbf{C}$$

з виродженим ядром:

1) $K(t,s) = te^s,\ y(t) = 1 + t,\ [a,b] = 0;1];$
2) $K(t,s) = ts + t^2s^2,\ y(t) = t^2 + t^4,\ [a,b] = [-1;1];$
3) $K(t,s) = \sin(2t+s),\ y(t) = \pi - 2t,\ [a,b] = [0;\pi];$

С2. Розв'язати інтегральне рівняння з виродженим ядром

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^1 (28t^5s^2 - 15t^3s)x(s)ds + \frac{1}{\sqrt[3]{t}},\ t \in (0,1],\ \lambda \in \mathbf{C}.$$

Д1. Довести, що диференціальне рівняння $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_n(t)x = f(t),\ t \in [0,T]$, з неперервними на $[0,T]$ коефіцієнтами $a_k,\ k = 1,...,n$, за початкових умов $x^{(k)}(0) = x_k,\ k = 0,1,...,n-1$, рівносильне інтегральному рівнянню $x(t) = \lambda \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [0,T]$, в якому $K(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}$, $y(t) = f(t) - x_{n-1}a_1(t) - (x_{n-1} + x_{n-2})a_2(t) - ... - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{x_k t^k}{k!} a_n(t)$.

Д2. Нехай R_λ – резольвента інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, з ядром $K \in C([a,b]^2)$ і $M := \max\limits_{a \le t,s \le b} |K(t,s)| > 0$. Довести, що R_λ задовольняє при $|\lambda| < (M(b-a))^{-1},\ \{t,s\} \subset [a,b]$ кожне з таких співвідношень:

1) $R_\lambda(t,s) = \lambda \int\limits_a^b K(t,u)R_\lambda(u,s)du + K(t,s);$

2) $R_\lambda(t,s) = \lambda \int\limits_a^b K(u,s)R_\lambda(t,u)du + K(t,s);$

3) $\frac{\partial R_\lambda(t,s)}{\partial \lambda} = \lambda \int\limits_a^b R_\lambda(t,u)R_\lambda(u,s)du.$

В15

І1. Методом послідовних наближень розв'язати інтегральні рівняння, узявши $x_0(t) = 0$:

1) $x(t) = \int\limits_0^t e^{-(t-s)}x(s)ds + 1,\ t \in [0,1];$

2) $x(t) = \int\limits_0^t (t-s)x(s)ds + 1,\ t \in [0,1];$

3) $x(t)=\int\limits_0^1 \frac{x(s)}{1+s^2}ds+\operatorname{arctg} t,\ t\in[0,1];$

4) $x(t)=\int\limits_0^1 \frac{te^{ts}}{2(e^t-1)}x(s)ds+\frac{1}{2},\ t\in[0,1];$

5) $x(t)=\int\limits_0^1 sx(s)ds+1,\ t\in[0,1];$

6) $x(t)=\int\limits_1^2 \frac{t}{2s}x(s)ds+1,\ t\in[1,2].$

12. Побудувати перші два послідовних наближення розв'язку інтегрального рівняння, узявши $x_0(t)=0$:

1) $x(t)=\int\limits_0^1 \frac{x(s)}{(1+s+t)^2}ds+1,\ t\in[0,1];$

2) $x(t)=\int\limits_0^1 \frac{1}{3}(ts+s^2)x(s)ds+t,\ t\in[0,1];$

3) $x(t)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{10}\operatorname{arctg}(ts)x(s)ds+1,\ t\in[0,\frac{\pi}{4}].$

13. Побудувати резольвенту інтегрального рівняння

$$x(t)=\lambda\int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds+y(t),\ t\in[0,T],$$

та за її допомогою розв'язати рівняння у таких випадках:

1) $K(t,s)=e^{t-s},\ \lambda=2,\ y(t)=\sin t;$
2) $K(t,s)=\frac{1+t^2}{1+s^2},\ \lambda=1,\ y(t)=1+t^2;$
3) $K(t,s)=3^{t-s},\ \lambda=-1,\ y(t)=t3^t;$
4) $K(t,s)=\frac{2+\cos t}{2+\cos s},\ \lambda=1,\ y(t)=e^t\sin t;$
5) $K(t,s)=\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} s},\ \lambda=-1,\ y(t)=t\operatorname{ch} t;$
6) $K(t,s)=e^{s-t},\ \lambda=1,\ y(t)=te^{\frac{t^2}{2}}.$

14. Побудувати резольвенту інтегрального рівняння $x(t)=\lambda\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds+y(t),\ t\in[a,b]$, та за її допомогою розв'язати рівняння у таких випадках:

1) $K(t,s)=\sin t\cos s,\ a=0,\ b=\frac{\pi}{2},\ \lambda=-1,\ y(t)=\cos t;$
2) $K(t,s)=te^s,\ a=-1,\ b=1,\ \lambda=\frac{e}{3},\ y(t)=(3t^2+1)e^{-t};$
3) $K(t,s)=t^2s^2,\ a=-1,\ b=1,\ \lambda=2,\ y(t)=e^t;$

4) $K(t,s) = (1+t)(1-s),\ a=-1,\ b=0,\ \lambda=1,$ $y(t)=\pi\cos\pi t;$
5) $K(t,s)=ts+t^2s^2,\ a=-1,\ b=1,\ \lambda=1,\ y(t)=3(t+1);$
6) $K(t,s) = 1+(2t-1)(2s-1),\ a=0,\ b=1,\ \lambda=\frac{1}{2},$ $y(t)=3t^2;$
7) $K(t,s) = \sin t\cos s+\cos 2t\sin 2s,\ a=0,\ b=2\pi,$ $\lambda=-\frac{1}{\pi},\ y(t)=\cos t+\sin t;$
8) $K(t,s) = \sin t\sin s+\cos 2t\cos 2s,\ a=0,\ b=2\pi,$ $\lambda=\frac{1}{2\pi},\ y(t)=\cos 2t;$
9) $K(t,s) = \cos t\cos s+3\sin 2t\sin 2s,\ a=0,\ b=2\pi,$ $\lambda=\frac{1}{6\pi},\ y(t)=5\cos t;$
10) $K(t,s) = 2+\cos t\cos s,\ a=0,\ b=2\pi,\ \lambda=-\frac{1}{8\pi},$ $y(t)=2t;$
11) $K(t,s)=e^t\cos s,\ a=0,\ b=\pi,\ \lambda=\frac{1}{e^\pi+1},\ y(t)=\frac{t}{4}.$

I5. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds+y(t),\ t\in[a,b],\ \lambda\in\mathbf{C}$$

з виродженим ядром:

1) $K(t,s)=1,\ y(t)=1,\ [a,b]=[-1;1];$
2) $K(t,s)=\sin(t-2s),\ y(t)=\cos 2t,\ [a,b]=[0;\pi];$
3) $K(t,s)=\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{s},\ y(t)=1-6t^2,\ [a,b]=[-1;1];$
4) $K(t,s)=t^4+5t^3s,\ y(t)=t^2-t^4,\ [a,b]=[-1;1];$
5) $K(t,s)=2ts^3+5t^2s^2,\ y(t)=7t^4+3,\ [a,b]=[-1;1];$
6) $K(t,s)=t^2-ts,\ y(t)=t^2+t,\ [a,b]=[-1;1];$
7) $K(t,s)=\cos(2t+s),\ y(t)=\sin t,\ [a,b]=[0;\pi];$
8) $K(t,s)=\sin(3t+s),\ y(t)=\cos t,\ [a,b]=[0;\pi];$
9) $K(t,s)=\sin s+s\cos t,\ y(t)=1-\frac{2t}{\pi},\ [a,b]=[0;\pi];$
10) $K(t,s)=\cos^2(t-s),\ y(t)=1+\cos 4t,\ [a,b]=[0;\pi];$
11) $K(t,s)=\cos t\cos s+\cos 2t\cos 2s,\ y(t)=\cos 3t,$ $[a,b]=[0;2\pi];$
12) $K(t,s)=\cos t\cos s+2\sin 2t\sin 2s,\ y(t)=\cos t,$ $[a,b]=[0;2\pi];$
13) $K(t,s)=\sin t\sin s+3\cos 2t\cos 2s,\ y(t)=\sin t,$ $[a,b]=[0;2\pi];$

I6. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds+y(t),\ t\in[a,b],$$

з виродженим ядром:

1) $K(t,s)=\sum\limits_{k=1}^{100}\frac{\sin kt\sin ks}{\sqrt{k}},\ y(t)=\sin\sqrt{2}t,\ [a,b]=[0;\pi];$

2) $K(t,s)=2e^{i(t-2s)}\cos(t+s),\ y(t)=e^{2it},\ [a,b]=[0;\pi];$

3) $K(t,s)=\operatorname{ch}(t+is),\ y(t)=1+2\sin^2\frac{1}{2}\operatorname{sh}t-i\sin 1\operatorname{ch}t,$ $[a,b]=[0;1];$

4) $K(t,s)=\begin{cases}ts, & 0\le s\le 1,\\ t^2s^2, & 1<s\le 2,\end{cases}\ y(t)=1,\ [a,b]=[0;2];$

5) $K(t,s)=\begin{cases}t^2+s, & 0\le s\le 1,\\ t^2+1, & 1<s\le 2,\\ t^3+s^3, & 2<s\le 3,\end{cases}\ y(t)=t^2,\ [a,b]=[0;3].$

Заняття 16
ТЕОРЕМИ ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Контрольні запитання

1. Означення характеристичного числа і власної функції інтегрального рівняння.
2. Альтернатива Фредгольма.

A16

О1. Установити, при яких $\lambda \in \mathbf{C}$ інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b e^{t-s} x(s) ds + 1,\ t \in [a,b]$, має розв'язок у просторі $L_2([a,b])$.

О2. Знайти всі значення параметрів p, q, r, при яких інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 + 2t + 3st) x(s) ds + pt^2 + qt + r,\ t \in [-1,1]$, має розв'язок у просторі $L_2([-1;1])$ для будь-яких $\lambda \in \mathbf{C}$.

О2. Знайти всі значення параметрів p, q, r, при яких інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s) x(s) ds + y(t),\ t \in [a,b]$, має розв'язок у просторі $L_2([a;b])$ для будь-яких $\lambda \in \mathbf{C}$:

1) $K(t,s) = ts + t^2 s^2,\ y(t) = pt^2 + qt + r,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
2) $K(t,s) = s \sin t + \cos s,\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$;

О3. При яких функціях $y \in C([0;\pi])$ інтегральне рівняння $x(t) = \int\limits_0^\pi \sin(t-s) x(s) ds + y(t),\ t \in [0;\pi]$, має розв'язок у просторі $C([0;\pi])$?

С1. Знайти всі значення λ, при яких інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s) x(s) ds + y(t),\ t \in [a,b],$$

має єдиний розв'язок для будь-якого $y \in C([a,b])$ у таких випадках:

1) $K(t,s) = \frac{1}{2} + \cos^2(t+s),\ [a,b] = [0, 2\pi]$;
2) $K(t,s) = t^2 s^2 - \frac{2}{45},\ [a,b] = [0,1]$;

С4. Знайти всі дійсні значення параметра p, при яких інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_0^1 (pt - s) x(s) ds + y(t),\ t \in [0,1]$, має розв'язок при всіх $\lambda \in \mathbf{R}$ та всіх $y \in L_2([0,1])$.

Д1. 1) Довести, що для інтегрального рівняння $x(t)=\lambda \int\limits_0^{+\infty} \sin(ts)x(s)ds,$ $t \in [0,+\infty)$, число $\lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ є власним і йому відповідають власні функції $x(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-at} \pm \frac{t}{a^2+t^2},\ t \geq 0,\ a > 0)$. Чи суперечить це твердженню теореми Фредгольма про скінченність числа лінійно незалежних власних функцій, які відповідають кожному характеристичному числу?

2)Довести, що $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ – характеристичне число інтегрального оператора з ядром $(Ax)(t) = \int\limits_0^{+\infty} \cos(ts)x(s)ds,\ 0 < t < +\infty,\ x \in L_2([0,+\infty))$ і йому відповідають власні функції

$$\varphi(t) = f(t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} \cos(ts)f(s)ds,$$

де f – довільна функція з класу $L_2([0,+\infty))$.

Д2. Довести, що кожне дійсне число $\lambda \geq \frac{1}{2}$ є характеристичним числом інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|}x(s)ds,\ t \in \mathbf{R}$, причому відповідні власні функції мають вигляд $x(t) = e^{i\alpha t},\ t \in \mathbf{R},\ \alpha \in \mathbf{R}$.

Д3. Звести інтегральні рівняння I роду $\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [a,b]$, диференціюванням до рівнянь II роду:

1) $K(t,s) = \frac{1}{|t-s|+4},\ t,s \in [a,b] = [0;1]$;
2) $K(t,s) = \sin|t-s|,\ t,s \in [a,b] = [1;2]$;

Д4. Звести за допомогою диференціювання інтегральне рівняння Вольтерра I роду $\int\limits_a^t t - s + 1)x(s)ds = t,\ t \in [0,1]$, до рівнянь II роду.

В16

І1. Установити, при яких $\lambda \in \mathbf{C}$ інтегральне рівняння $x(t) = \lambda\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, має розв'язок у просторі $L_2([a,b])$:

1) $K(t,s) = ts^3,\ y(t) = t^2,\ t \in [a;b]$;
2) $K(t,s) = t^2 s,\ y(t) = t,\ t \in [a;b]$;
3) $K(t,s) = ts^2e^{-s^4},\ y(t) = t,\ t \in [a;b]$;
4) $K(t,s) = \sin s,\ y(t) = \cos t,\ t \in [a;b]$;

5) $K(t,s) = se^t,\ y(t) = 1,\ t \in [a;b]$.

I2. Знайти всі значення параметрів p, q, r, при яких інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, має розв'язок у просторі $L_2([a;b])$ для будь-яких $\lambda \in \mathbf{C}$:

1) $K(t,s) = 1 + ts,\ y(t) = pt^2 + qt + r,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
2) $K(t,s) = t^2 + ts^2,\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
3) $K(t,s) = \frac{1}{2}(ts + t^2s^2),\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
4) $K(t,s) = \frac{ts}{2} + t^2s^2,\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
5) $K(t,s) = t^2s + ts^2,\ y(t) = pt + qt^3,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
6) $K(t,s) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{s},\ y(t) = pt^2 + qt + r,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
7) $K(t,s) = 3t + ts - 5t^2s^2,\ y(t) = pt,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
8) $K(t,s) = 3ts + 5t^2s^2,\ y(t) = pt^2 + qt,\ t \in [a,b] = [-1;1]$;
9) $K(t,s) = \cos(t+s),\ y(t) = p\sin t + q,\ t \in [a,b] = [0;\pi]$;
10) $K(t,s) = t\cos s + \sin t \sin s,\ y(t) = p + q\cos t$, $t \in [a,b] = [-\pi;\pi]$;
11) $K(t,s) = t\sin s + \cos t,\ y(t) = pt + q,\ t \in [a,b] = [-\pi;\pi]$.

O1. При яких функціях $y \in C([0;\pi])$ інтегральне рівняння $x(t) = \int\limits_0^\pi \sin(t-s)x(s)ds + y(t),\ t \in [0;\pi]$, має розв'язок у просторі $C([0;\pi])$?

I3. Знайти всі значення λ, при яких інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b],$$

має єдиний розв'язок для будь-якого $y \in C([a,b])$ у таких випадках:

1) $K(t,s) = \frac{1}{2} + \cos^2(t+s),\ [a,b] = [0,2\pi]$;
2) $K(t,s) = \sin(t-s),\ [a,b] = [0,2\pi]$;
3) $K(t,s) = \cos(2t-s),\ [a,b] = [0,2\pi]$;
4) $K(t,s) = \sin(t-s),\ [a,b] = [0,2\pi]$;
5) $K(t,s) = \cos(t+s),\ [a,b] = [0,\pi]$;
6) $K(t,s) = \cos(t+s),\ [a,b] = [0,\frac{\pi}{2}]$;
7) $K(t,s) = t^2s^2 - \frac{2}{45},\ [a,b] = [0,1]$;
8) $K(t,s) = \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{2}{5}},\ [a,b] = [0,1]$;
9) $K(t,s) = t^2s + ts^2,\ [a,b] = [-2,2]$;
10) $K(t,s) = ts - 2t^2,\ [a,b] = [-1,1]$;
11) $K(t,s) = t^2 - s,\ [a,b] = [-1,1]$;
12) $K(t,s) = \sin t \sin 4s + \sin 2t \sin 3s + \sin 3t \sin 2s + \sin 4t \sin s,\ [a,b] = [0,\pi]$.

Заняття 17
ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ З СИМЕТРИЧНИМ ЯДРОМ

Контрольні запитання

1. Властивості характеристичних чисел та власних функцій інтегрального рівняння з симетричним ядром.
2. Теорема Гільберта-Шмідта для інтегральних рівнянь з симетричним ядром.
3. Загальна формула розв'язку для рівнянь з симетричним ядром.

А17

О1. Знайти характеристичні числа, відповідні нормовані власні функції та розв'язки (при кожному λ, при якому вони існують) інтегрального рівняння із симетричним ядром $x(t) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \cos(t+s)x(s)ds + \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$.

О2. Знайти характеристичні числа, відповідні нормовані власні функції та розв'язки (при кожному λ, при якому вони існують) інтегрального рівняння із симетричним ядром $x(t) = \lambda \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [0,1],\ K(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & t \le s, \\ s(t-1), & s \le t, \end{cases}$ у таких випадках:

1) $y(t) = \sin \pi t$; 2) $y(t) = t$.

С1. Звести інтегральні рівняння $\mu x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, до диференціальних і розв'язати їх:

1) $y(t) = \frac{t}{2},\ K(t,s) = \frac{\pi^2}{8} \begin{cases} t(2-s), & 0 \le t \le s, \\ s(2-t), & s < t \le 2, \end{cases}$ $t \in [a,b] = [0;2],\ \mu = 1$;

С2. Характеристичні числа й відповідні нормовані власні функції інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_0^1 \min\{t,s\}x(s)ds + \sin \pi t,\ t \in [0,1]$, задаються формулами $\lambda_n = \pi^2(n+\frac{1}{2})^2,\ \varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin \pi(n+\frac{1}{2})t,\ t \in [0,1],\ n \ge 0$. Знайти розв'язки цього рівняння при кожному $\lambda \in \mathbf{C}$, при якому вони існують.

Д1. Довести, що при $\lambda < \frac{1}{2}$ розв'язок інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-|t-s|} x(s)ds + y(t),\ t \in \mathbf{R}$, з неперервною та обмеженою на $\mathbf{R}$ функцією y виражається формулою

$$x(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-\sqrt{1-2\lambda}|t-s|} y(s)ds + y(t),\ t \in \mathbf{R}.$$

Д2. 1) Довести, що розв'язок *рівняння Абеля* $y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^\alpha} ds$, $0 < \alpha < 1,\ y \in C^1([0,T])$, яке є частковим випадком рівняння Вольтерра I роду з ядром, що має "слабку особливість", задається формулою $x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{y'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds,\ x(0) = 0.$

Зауваження. Це рівняння є основним у теорії дробових похідних та дробових інтегралів.

2) Довести, що необхідною і достатньою умовою розв'язності рівняння Абеля на відрізку $[0,T]$ є умова: функція $f_{1-\alpha}(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha} ds$ абсолютно неперервна на відрізку $[0,T]$, тобто $f_{1-\alpha}(t) = \int\limits_0^t g(s)ds$, де $g \in L_1([0,T])$. При виконанні цієї умови розв'язок рівняння Абеля має вигляд $x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha} ds.$

Д3. *(Узагальнене рівняння Абеля).* Нехай $g : [0,T] \to \mathbf{R}$ – функція, що задовольняє умову $|g(t) - g(s)| \le |t-s|^\beta,\ 0 < \beta < 1.$ 1) Довести, що для кожного $t \in [0,T]$ існує інтеграл $\int\limits_0^t (t-s)^\gamma dg(s)$, де $\beta + \gamma > 0$.

2) Довести, що розв'язок узагальненого рівняння Абеля $Y(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{-\gamma} dg(s),\ t \in [0,T],\ 0 < \gamma < 1$, має вигляд $g(t) = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int\limits_0^t (t-s)^\gamma dY(s)$, причому інтеграли в умові і в розв'язку існують.

Д4. Нехай $K(t)$ – неперервна на $\mathbf{R}$ парна функція з періодом 2π, і $\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{ikt}dt \ne 0,\ k \in \mathbf{Z}$. Довести, що тоді $\lambda_k = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{ikt}dt \right)^{-1}$ і $\varphi_k(t) = e^{-ikt}$ є характеристичними числами і відповідними власними функціями інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-s)x(s)ds.$

Д5. Нехай $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ – послідовність характеристичних чисел і $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ – відповідна ортонормована послідовність власних функцій інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b]$, із симетричним ядром $K \in C([a,b]^2)$. Довести:

1) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{|\varphi_n(t)|^2}{\lambda_n^2} = \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 ds,\ t \in [a,b]$;

2) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n^2} = \int\limits_{[a,b]^2} |K(t,s)|^2 dtds$;

3) $(Ax,x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{|(x,\varphi_n)|}{\lambda_n},\ x \in L_2([a,b]),\ A$ – інтегральний оператор з ядром K;

4) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n^{2m}} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K_m(t,s)|^2 dtds,\ m \geq 2,\ K_m$ – m-те повторне ядро ядра K.

Д6. Нехай функція y в інтегральному рівнянні з задачі О2 має вигляд $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k \sin k\pi t,\ t \in [0,1],\ 1 \leq m \leq +\infty$. При кожному $\lambda \in \mathbf{C}$ знайти умови на $C_k,\ k = \overline{1,m}$, при яких це рівняння має розв'язки. Знайти ці розв'язки.

В17

І1. Знайти характеристичні числа та відповідні нормовані власні функції інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b]$, у таких випадках:

1) $K(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^2+k},\ a = 0,\ b = \pi$;

2) $K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{s}(t+1)} + \frac{1}{\sqrt{1-s}(t+3)},\ a = 0,\ b = 1$;

3) $K(t,s) = \frac{1}{s^2(t^2+1)} + \frac{1}{t^2(1+s^2)},\ a = 1,\ b = +\infty$;

4) $K(t,s) = e^{-|t-s|},\ a = 0,\ b = 1$.

І2. Знайти характеристичні числа, відповідні нормовані власні функції та розв'язки (при кожному λ, при якому вони існують) інтегрального рівняння із симетричним ядром $x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, у таких випадках:

1) $K(t,s) = \cos^2(t-s),\ a = -\pi,\ b = \pi,\ y(t) = \sin 2t$;

2) $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & t \le s, \\ s(1-t), & s \le t, \end{cases} \quad a = 0,\ b = 1,$
$y(t) = \frac{1}{4}\sin 2\pi t + \frac{1}{9}\sin 3\pi t;$

3) $K(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, & t \le s, \\ t(s+1), & s \le t, \end{cases} \quad a = 0,\ b = 1,$
$y(t) = \sin \pi t + \pi \cos \pi t;$

4) $K(t,s) = \begin{cases} (e^t - e^{-t})(e^s + e^{2-s}), & t \le s, \\ (e^s - e^{-s})(e^t + e^{2-t}), & s \le t, \end{cases} \quad a = 0,\ b = 1,$
$y(t) = t;$

5) $K(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & t \le s, \\ \sin s \cos t, & s \le t, \end{cases} \quad a = 0,\ b = \frac{\pi}{2},$
$y(t) = \cos t;$

6) $K(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & t \le s, \\ \sin s \cos t, & s \le t, \end{cases} \quad a = 0,\ b = \pi,$
$y(t) = \sin \frac{3}{2} t;$

7) $K(t,s) = \begin{cases} \cos t \sin s, & t \le s, \\ \cos s \sin t, & s \le t, \end{cases} \quad a = 0,\ b = \pi,$
$y(t) = t;$

8) $K(t,s) = \begin{cases} \sin t \sin(1-s), & t \le s, \\ \sin(1-t)\sin s, & s \le t, \end{cases} \quad a = 0,\ b = 1,$
$y(t) = \cos \pi t;$

9) $K(t,s) = \min\{t,s\}, \quad a = 0,\ b = 1,\ y(t) = \sin \pi t.$

I3. Звести інтегральні рівняння $\mu x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t),\ t \in [a,b]$, до диференціальних і розв'язати їх:

1) $y(t) = te^t,\ K(t,s) = -\frac{1}{\operatorname{sh} 1} \begin{cases} \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(s-1), & 0 \le t \le s, \\ \operatorname{sh} s \operatorname{sh}(t-1), & s < t \le 1, \end{cases} \quad t \in [a,b] = [0;1],\ \mu = 1;$

2) $y(t) = \sin^3 \pi t,\ K(t,s) = \begin{cases} (s-1)t, & 0 \le t \le s, \\ (t-1)s, & s < t \le 1, \end{cases} \quad t \in [a,b] = [0;1],\ \mu = 0;$

3) $y(t) = 2t^2 - 3t + \frac{5}{2},\ K(t,s) = |t-s| + t^2,\ t \in [a,b] = [1;2],\ \mu = 0.$

14. Нехай K – 2π-періодична функція така, що $K(t) = |t|$, $t \in [-\pi, \pi]$. Знайти характеристичні числа та нормовані власні функції інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t+s)x(s)ds + y(t),\ t \in [-\pi, \pi]$, і для кожного $\lambda \in \mathbf{C}$ розв'язати його у таких випадках:

1) $y(t) = 1 + 2\sin t - \cos t$;
2) $y(t) = \cos 2t + \sin 3t$;
3) $y(t) = \operatorname{sign} t$;
4) $y(t) = t^2$.

15. Нехай K – функція з попередньої задачі. Знайти характеристичні числа та нормовані власні функції інтегрального рівняння $x(t) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-s)x(s)ds + y(t),\ t \in [-\pi, \pi]$, і для кожного $\lambda \in \mathbf{C}$ розв'язати його у таких випадках:

1) $y(t) = 1 + \sin t - 2\cos 2t$;
2) $y(t) = \sin t + \sin 2t + \sin 3t + \sin 4t$;
3) $y(t) = \operatorname{sign} t$;
4) $y(t) = t^2$.

Заняття 18
ОСНОВНІ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ

Контрольні запитання

1. Означення простору основних функцій $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ і збіжності в ньому.

2. Означення узагальненої функції. Регулярні та сингулярні узагальнені функції.

3. Означення носіїв основної та узагальненої функцій.

4. Збіжність у просторі $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

А18

О1. Нехай φ – ненульова функція з $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Чи збігаються у $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ послідовності:

1) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(x),\ x\in\mathbf{R}\ :\ n\geq 1\right\}$;
2) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(nx),\ x\in\mathbf{R}\ :\ n\geq 1\right\}$;
3) $\{\varphi(x+n),\ x\in\mathbf{R}\ :\ n\geq 1\}$;
4) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n}),\ x\in\mathbf{R}\ :\ n\geq 1\right\}$?

О2. Нехай $\varepsilon>0,\ K(\varepsilon)=[-\varepsilon,\varepsilon]$. Для довільної локально інтегровної функції $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ означимо функцію $f_\varepsilon:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ рівністю $f_\varepsilon(x)=\int\limits_{\mathbf{R}}\omega_\varepsilon(x-y)f(y)dy,\ x\in\mathbf{R}$. Довести твердження:

1) якщо $f=\chi_{[-a,a]}$ і $\varepsilon<a<+\infty$, то $f_\varepsilon\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$, причому $\forall x\in\mathbf{R}$: $0\leq f_\varepsilon(x)\leq 1;\ \forall x\in K(a-\varepsilon)\ :\ f_\varepsilon(x)=1$, та $\forall x\in\mathbf{R}\backslash K(a+\varepsilon)$: $f_\varepsilon(x)=0$;

2) якщо $f\in C(\mathbf{R})$ та $\operatorname{supp} f\subset[-a,a]$, то $f_\varepsilon\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$, причому $\operatorname{supp} f\subset K(a+\varepsilon)$.

О3. Користуючись означенням, довести, що такі функціонали є узагальненими функціями: 1) $F(\varphi)=\int\limits_{\mathbf{R}}x\varphi(x)dx$, $\quad 2) F(\varphi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi^{(n)}(n)$; $3) F(\varphi)=\int\limits_{-1}^{1}|x|\varphi'(x)dx$.

Чи є вони регулярними? Знайти носії цих узагальнених функцій.

О4. Довести, що функціонал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, який діє за формулою $(\mathcal{P}\frac{1}{x})(\varphi)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right)$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$, є сингулярною узагальненою функцією.

О5. Довести, що у просторі $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

1) $\frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \delta_0$;

2) $\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{\cdot}{\varepsilon}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)dx\ \delta_0,$

де $f \in L_1(\mathbf{R}),\ \delta_0$ – дельта-функція Дірака, яка зосереджена в точці 0.

О6. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\delta_n$ збігається в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ при довільних $\{a_n\ :\ n \geq 1\} \subset \mathbf{C}$.

Д1. Нехай функція ξ така сама, як в попередній задачі, а функція $\alpha \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ має єдиний нуль порядку 1 у точці $x = 0$. Нехай $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Довести, що до простору $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ належить також функція

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\xi(x)\varphi(0)}{\alpha(x)},\ x \in \mathbf{R}\backslash\{0\},$$

доозначена за неперервністю при $x = 0$.

Д2*. Нехай $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ і для довільної невід'ємної $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$: $f(\varphi) \geq 0$. Довести, що існує міра μ, яка визначена на σ-алгебрі борельових множин на $\mathbf{R}$ і така, що $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})\ :\ F(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)d\mu(x)$.

Д3*. Множина $M \subset \mathcal{D}(\mathbf{R})$ обмежена в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, якщо носії всіх функцій із M належать деякому відрізку $[a, b]$ і $\forall k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\ \exists C_k > 0\ \forall\varphi \in M\ :\ \max\limits_{a\leq x\leq b} |\varphi^{(k)}(x)| \leq C_k$. Довести, що всяка обмежена множина в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ відносно компактна, тобто з довільної послідовності її елементів можна виділити збіжну в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ підпослідовність.

Д3. Довести, що в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ $\frac{1}{x\pm i\varepsilon} \to \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x},\ \varepsilon \to 0+$ (формули Сохоцького).

Д4. Нехай f_ε – функція, визначена в попередній задачі. Довести твердження:

1) якщо $f \in L_p(\mathbf{R}),\ 1 \leq p < +\infty$, то для довільного $\varepsilon > 0\ :\ f_\varepsilon \in L_p(\mathbf{R}) \cap C^{\infty}(\mathbf{R})$ і $||f_\varepsilon||_{L_p(\mathbf{R})} \leq ||f||_{L_p(\mathbf{R})}$;

2) нехай $f = 0$ майже скрізь поза деяким компактом у $\mathbf{R}$, тоді

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} f \begin{cases} \text{у } C(\mathbf{R}), & \text{якщо } f \in C(\mathbf{R}); \\ \text{у } L_p(\mathbf{R}), & \text{якщо } f \in L_p(\mathbf{R}),\ 1 \leq p < \infty; \\ \text{майже скрізь}, & \text{якщо } f \in L_\infty(\mathbf{R}). \end{cases}$$

3)$\mathcal{D}(\mathbf{R})$ – скрізь щільна в $L_p(\mathbf{R}),\ 1 \leq p \leq +\infty$, і у просторі $C_0(\mathbf{R})$ фінітних неперервних функцій з нормою $||f|| = \max\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$.

O1. Нехай $n \in \mathbf{N}$; $\xi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $\xi(x) = 1$ в околі нуля; $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Довести, що простору $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ належать також функції:

1) $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\xi(x)\varphi(0)}{x}$, $x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, доозначена за неперервністю при $x = 0$.

2) $\psi(x) = \frac{1}{x^n}[\varphi(x) - \xi(x)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k]$, $x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, доозначена за неперервністю при $x = 0$.

O2. Довести, що $\delta_a(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbf{R})} 0$, $a \to +\infty$.

I1. Довести, що функціонал $F : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ є узагальненою функцією, тобто $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. В яких з цих випадків функція є регулярною? Знайти носій F :

1) $F(\varphi) = \varphi(0) + \varphi(1)$;
2) $F(\varphi) = \varphi'(0)$;
3) $F(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)dx$;
4) $F(\varphi) = \int\limits_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx$;
5) $F(\varphi) = \int\limits_{-2}^{2} \operatorname{sign} x\varphi'(x)dx$;
6) $F(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}} \ln|x|\varphi(x)dx$;
7) $F(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^x\varphi'(x)dx$;
8) $F(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-x}\varphi^{(n)}(x)dx,\ n \in \mathbf{N}$;
9) $F(\varphi) = \varphi'(1) + \int\limits_{0}^{2\pi} \sin x\varphi(x)dx$;
10) $F(\varphi) = \varphi(0) + \int\limits_{1}^{3} x\varphi''(x)dx$.

I2. Довести, що подані нижче функціонали є сингулярними узагальненими функціями:

1) $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}(\varphi) = Vp\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$;

2) $\mathcal{P}\frac{1}{x^3}(\varphi) = Vp\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^3}dx$;

3) $\mathcal{P}\frac{\cos nx}{x}(\varphi) = Vp\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\cos nx}{x}\varphi(x)dx$,

де $n \in \mathbf{N}$ – фіксоване, $Vp\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)dx := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} f(x)dx\right)$.

I3. Довести, що в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

1) $\mathcal{P}\frac{\cos nx}{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

2) $\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \delta_0$;

3) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \sqrt{\pi}\delta_0$;

4) $\frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \pi\delta_0$;

5) $\frac{\varepsilon}{x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \pi\delta_0$;

6) $t^n e^{ixt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,\ n \geq 0.$

I4. 1) Нехай $\{f, f_n : n \geq 1\} \subset L_{1,loc}(\mathbf{R})$ і $\forall a > 0 : f_n \to f$ в $L_1([-a,a])$. Довести, що $F_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbf{R})} F_f$. Чи вірне обернене твердження?

2) Нехай $\{f_n : n \geq 1\} \subset L_{1,loc}(\mathbf{R})$ і $f_n \to f (\operatorname{mod} m)$ на $\mathbf{R}$, $|f_n(x)| \leq g(x),\ x \in \mathbf{R},\ n \geq 1$, де $g \in L_{1,loc}(\mathbf{R})$. Довести, що $f \in L_{1,loc}(\mathbf{R})$ і $F_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbf{R})} F_f$.

Заняття 19
ДІЇ НАД УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Контрольні запитання

1. Означення множення узагальненої функції на нескінченно диференційовну функцію.
2. Означення похідної узагальненої функції. Властивості похідних.
3. Формула для обчислення похідної регулярної узагальненої функції.

A19

O1. Довести твердження:

1) $\forall \alpha \in C^\infty(\mathbf{R}) \ : \ \alpha\delta_0 = \alpha(0)\delta_0;$
2) $\forall a \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \ : \ \delta_0(ax) = \frac{1}{|a|}\delta_0(x);$
3) $x\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x},$

де $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, та $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$ – узагальнені функції, визначені в задачах 4 та 29.

O2. Знайти першу та другу похідну в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ функції F_f, де:

1) $f(x) = |x|, \ x \in \mathbf{R};$
2) $f(x) = \mathrm{sign}(\sin x), \ x \in \mathbf{R};$
3) $f(x) = \mathrm{sign}(x^2 - 1) \cdot 5^x.$

O3. Довести, що $|\sin x|'' + |\sin x| = 2\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} \delta_{n\pi}$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

O4. Використовуючи розклад $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}} \frac{1}{n^2}e^{inx}, \ x \in [0, 2\pi]$, довести в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ рівність $\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} e^{inx} = \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} \delta(x - 2n\pi).$

O5. Нехай послідовність $\{a_n \ : \ n \in \mathbf{Z}\}$ така, що виконуються нерівності $|a_n| \le A|n|^m + B, \ n \in \mathbf{Z}$, з деякими $A > 0, B > 0, m \in \mathbf{N}$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{inx}$ збіжний в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

O6. Використовуючи розклад $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}} \frac{1}{n^2}e^{inx}, \ x \in [0, 2\pi]$, довести, що $\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} e^{inx} = \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} \delta_{2\pi n}$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Д1. Довести, що узагальнені функції $\delta_0, \delta_0', ..., \delta_0^{(n)}$ лінійно незалежні в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Д2. Нехай ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\delta^{(k)}(x)$ збіжний в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Довести, що $\exists k_0 \in \mathbf{N} \, \forall k \ge k_0 \ : \ c_k = 0.$

Д3*. Нехай $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ і $\operatorname{supp} F = \{0\}$. Довести, що $F = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \delta^{(k)}$, $n \in \mathbf{N},\ c_k \in \mathbf{C},\ k = \overline{1,n}$.

Д4*. Нехай $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}),\ \operatorname{supp} f \subset [-a,a], \eta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ і $\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in [-a-\varepsilon, a+\varepsilon]\ :\ \eta(x) = 1$. Довести, що функція $g(z) = (f(\xi), \eta(\xi)e^{iz\xi}),\ z = x+iy \in \mathbf{C}$, не залежить від η, ціла і задовольняє при деякому $n \geq 0$ і довільному $\gamma > 0$ нерівність $|g(z)| \leq C_\gamma e^{(a+\gamma)|y|}(1+|x|)^n$.

В19

О1. Нехай $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}),\ \operatorname{supp} f \subset [-a,a],\ \eta \in C^\infty(\mathbf{R})$ і $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x \in [-a-\varepsilon, a+\varepsilon]\ :\ \eta(x) = 1$. Довести, що $\eta f = f$.

О2. Довести, що в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

1) $x^n \mathcal{P}\frac{1}{x} = x^{n-1},\ n \geq 1;$
2) $x^n \mathcal{P}\frac{1}{x^2} = x^{n-2},$

де $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, та $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$ – узагальнені функції, визначені в задачах О4 та І2 з попереднього заняття.

О3. Довести, що для будь-яких $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}),\ a \in \mathbf{R}$ і $n \in \mathbf{N}$ правильна рівність $(f(x+a))^{(n)} = f^{(n)}(x+a)$.

О4. Довести, що операції диференціювання та множення на функцію $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ є неперервними операторами в $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, тобто що із збіжності $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbf{R})} \varphi,\ n \to \infty$, випливає: а) $D\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbf{R})} D\varphi$, б) $\alpha\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbf{R})} \alpha\varphi$.

І1. Обчислити при $n \geq 1$:

1) $\theta^{(n)}(x-a);$
2) $(\theta(x)\sin x)';$
3) $(\theta(x)\cos x)';$
4) $(\theta(x)e^{ax})^{(n)};$
5) $(\operatorname{sign} x)^{(n)};$
6) $(x \operatorname{sign} x)';$
7) $|x|^{(n)};$
8) $(\operatorname{sign}(\cos x))^{(n)};$
9) $[x]^{(n)},$

де $\theta(x) = \chi_{[0,+\infty)}(x),\ x \in \mathbf{R}$ – функція Хевісайда, $[x]$ означає цілу частину x.

І2. Знайти похідні перших трьох порядків від функцій F_f, де:

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0,\\ x+1, & 0\le x\le 1,\\ x^2+1, & x\ge 1;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1,\\ (x+1)^2, & -1\le x\le 0,\\ x^2+1, & x\ge 0;\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & |x|\le \pi,\\ 0, & |x|>\pi;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\ x\ge 2,\\ x^2, & 0\le x\le 1,\\ (x-2)^2, & 1\le x\ge 2;\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|\le \pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

I3. Довести, що в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

1) $\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}$;

2) $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$;

3) $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = -2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}$;

4) $x^k\delta_0^{(n)} = (-1)^k k! C_n^k \delta_0^{(n-k)},\ n\ge k,\ k,n\in\mathbf{N}$;

5) $x^k\delta_0^{(n)} = 0,\ n<k,\ k,n\in\mathbf{N}$;

6) $\alpha\delta_0^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_n^k\alpha^{(n-k)}(0)\delta_0^{(k)},\ \alpha\in C^\infty(\mathbf{R})$,

де $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, та $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$ – узагальнені функції, визначені в задачах 4 та 29.

O5. Нехай $\alpha\in C^\infty(\mathbf{R})$ і $f\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Довести, що $(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$. Обчислити $(\alpha\theta)'$, де θ – функція Хевісайда.

O6. Довести, що в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ $x\delta_0^{(n)} = -n\delta_0^{(n-1)},\ n\in\mathbf{N}$.

O7. Довести, що в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ $|\cos x|'' + |\cos x| = 2\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}\delta_{(k+\frac{1}{2})\pi}$.

O8. Довести, що в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\cos(2k+1)x = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k\delta_{\pi k}$.

Заняття 20
ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Контрольні запитання

1. Означення фундаментального розв'язку диференціального оператора.
2. Теорема про існування фундаментального розв'язку лінійного диференціального оператора з постійними коефіцієнтами.
3. Поняття первісної узагальненої функції.

А20

О1. Нехай $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ та $\forall a \in \mathbf{R} \ : \ F(\cdot + a) = F(\cdot)$. Довести, що $f = const$, тобто $\exists C \in \mathbf{C} \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \ : < f, \varphi >= C \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)dx$.

О2. Нехай $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}),\ xF(x) = 0$. Довести, що $\exists c \in \mathbf{C} \ : \ F = c\delta$.

О3. Знайти загальний розв'язок у $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ рівнянь: а) $y'' = 0$; б) $(x+1)y'' = 0$; в) $(x+1)y'' = 1$.

О4. Довести, що $u = C_1 + C_2\theta(x) + \ln|x|$, де C_1, C_2 – довільні сталі, θ – функція Хевісайда, є загальним розв'язком у $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ рівняння $xu' = 1$.

О5. Нехай z – розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $Lz = z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + ... + a_n(x)z = 0,\ \{a_1, ..., a_n\} \subset C^\infty(\mathbf{R})$, який задовольняє умови $z(a) = z'(a) = ... = z^{(n-2)}(a) = 0,\ z^{(n-1)}(a) = 1$, де $a \in \mathbf{R}$. Довести, що:

1) для довільного $a \in \mathbf{R}$ функція $\mathcal{E}(x,a) = \theta(x-a)z(x,a),\ x \in \mathbf{R}$, задовольняє у $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ рівняння $L\mathcal{E} = \delta_a$, тобто $\mathcal{E}$ – фундаментальний розв'язок оператора L;
2) якщо всі коефіцієнти L сталі, то $\mathcal{E}(x,a) = \mathcal{E}(x-a,0) = \mathcal{E}_0(x-a)$.

О6. Нехай $a \in \mathbf{R}\backslash\{0\},\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{d^2u}{dx^2} + a^2u = \varphi$.

С1. Знайти фундаментальний розв'язок оператора $D + aI,\ a \in \mathbf{R}$, та загальний розв'язок рівняння $\frac{du}{dx} + au = \varphi,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

С2. Знайти фундаментальний розв'язок оператора $L = \frac{d}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}$, тобто для кожного $a \in \mathbf{R}$ знайти таку узагальнену функцію $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(x,a)$, що $D\mathcal{E}(x) - \frac{2x}{1+x^2}\mathcal{E}(x) = \delta_a(x)$.

Д1. Довести, що загальним розв'язком у $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ рівняння $x^n y(x) = 0,\ n \in \mathbf{N}$, є узагальнена функція $y = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(x),\ \{c_0, ..., c_{n-1}\} \subset \mathbf{C}$.

Д2. Довести, що загальним розв'язком у $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ рівняння $x^n u^{(m)} = 0$, $n > m$, є узагальнена функція $u = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum\limits_{k=m}^{n-1} b_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k x^k$, де $a_k,\ b_k,\ c_k$ – довільні сталі.

В20

О1. Нехай $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ має єдиний нуль порядку 1 у точці $x = 0$. Знайти загальний розв'язок у $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ рівняння $\alpha f = 0$.

О2. Знайти загальний розв'язок у $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ рівняння $\sin x \cdot y(x) = 0$.

О3. Нехай $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{d^2u}{dx^2} + a^2 u = \varphi$.

І1. Знайти загальні розв'язки в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ рівнянь:

1) $(x-1)u = 0$;
2) $(x^2-1)u = 0$;
3) $xu = \mathcal{P}\frac{1}{x}$;
4) $\cos x \cdot u = 0$;
5) $x^2 u' = 0$;
6) $(x+1)^2 u'' = 0$;
7) $x(x-1)u = 0$;
8) $xu = 1$;
9) $x^2 u = 0$;
10) $xu' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$;
11) $x^2 u' = 1$;
12) $(x+1)u''' = 0$.

І2. Знайти фундаментальний розв'язок оператора L та загальний розв'язок рівняння $Lu = \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, у таких випадках:

1) $L = D^2 - a^2 I,\ a \in \mathbf{R}$;
2) $L = (D \pm aI)^n,\ a \in \mathbf{R},\ n \geq 2$;
3) $L = D^2 + 4D$;
4) $L = D^2 - 2D + 1$;
5) $L = D^2 + 3D + 2$;
6) $L = D^2 - 4D + 5$;
7) $L = D^3 - a^3,\ a \in \mathbf{R}$;
8) $L = D^3 - 3D^2 + 2D$;
9) $L = D^4 - a^4,\ a \in \mathbf{R}$;
10) $L = D^4 - 2D^2 + 1$.

І3. Знайти фундаментальний розв'язок $\mathcal{E}$ оператора L у таких випадках:

1) $L = D - 2x$;
2) $L = D + 3x^2$;
3) $L = D - \sin x$;
4) $L = D + \cos x$;
5) $L = D + 4x \sin(x^2 + \frac{\pi}{3})$;
6) $L = D - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$;
7) $L = D - 4x^3 + 4x - 1$;
8) $L = D - 2^x$;
9) $L = D + x^2 3^{x^3+1}$.

Заняття 21
УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Контрольні запитання

1. Означення простору швидко спадних основних функцій $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ і збіжності в ньому.
2. Означення повільно зростаючої узагальненої функції.
3. Означення та властивості перетворення Фур'є в $\mathcal{S}(\mathbf{R}),\ L_1(\mathbf{R}),\ L_2(\mathbf{R})$. Теорема Парсеваля.
4. Означення та властивості перетворення Фур'є узагальнених функцій.

A21

О1. Чи належать до простору $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ функції $e^{-x^2}, e^{-x}, xe^{-x^2}, \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbf{R}$?

О2. 1) Нехай $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ і $k \geq 1$. Довести, що $\varphi^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

2) Нехай $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ і P – многочлен. Довести, що $P\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

О5. Довести, що $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$, причому $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ щільний в $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

О6. Нехай φ – ненульова функція з $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Чи збігаються в $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ послідовності:

1) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(x),\ x \in \mathbf{R} \,:\, n \geq 1\right\}$;
2) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(nx),\ x \in \mathbf{R} \,:\, n \geq 1\right\}$;
3) $\left\{\frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n}),\ x \in \mathbf{R} \,:\, n \geq 1\right\}$;
4) $\{\varphi(x+n),\ x \in \mathbf{R} \,:\, n \geq 1\}$?

О7. Довести, що $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ і для довільного $k \geq 1\ :\ \delta_0^{(k)} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

О8. Довести, що $e^{x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, але e^{x^2} не породжує регулярну узагальнену функцію з простору $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

О9. Довести, що ряд $\sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} e^{k^2}\delta_k$ збігається в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, але розбігається в $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

О10. Нехай $a > 0$. Знайти перетворення Фур'є функцій: 1) $e^{-ax^2},\ x \in \mathbf{R}$; 2) $xe^{-ax^2},\ x \in \mathbf{R}$.

О11. Довести твердження:

1) $F[\delta_h] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ihy},\ y \in \mathbf{R},\ h \in \mathbf{R}$;
2) $F[x^k] = \sqrt{2\pi}(-i)^k\delta_0^{(k)},\ k \geq 1$;
3) $F[\delta_0^{(k)}] = \frac{(-iy)^k}{\sqrt{2\pi}},\ k \geq 1$.

О12. Довести, що $F[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ та $F[1] = \sqrt{2\pi}\delta$, де F діє в $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

Д1. Довести, що при всіх $f \in L_2(\mathbf{R})$, $(F^2[f])(x) = f(-x)$ майже для всіх $x \in \mathbf{R}$.

Д2. Для оператора перетворення Фур'є F у просторі $L_2(\mathbf{R})$ знайти $\sigma_p(F), \sigma(F)$. Довести, що функції Ерміта є власними функціями оператора F. Скористатись задачею Д4.А3.

В21

О1. Нехай функція ψ належить до $C^\infty(\mathbf{R})$, дорівнює нулю на $(-\infty, a)$ та обмежена разом з усіма похідними. Довести, що функція $\psi(x)e^{-\sigma x}$, $x \in \mathbf{R}$, належить до простору $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, якщо $\sigma > 0$.

О2. Довести, що $\mathcal{S}'(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ і відповідний оператор вкладення неперервний.

О3. Нехай $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ і P – многочлен. Означимо функціонал $< Pf, \varphi >=< f, P\varphi >$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Довести, що $Pf \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

О4. Довести, що ряд $\sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} a_k\delta_k$ збігається в $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, якщо $\forall k \in \mathbf{Z}$: $|a_k| \le C(1+|k|)^m$, де $C > 0$ і $m \ge 0$ – деякі сталі.

О5. 1) Нехай $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, f вимірна за Лебегом та $\exists m \ge 0$: $\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|^m}dx < \infty$. Довести, що f визначає регулярну узагальнену функцію F_f з $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, яка задається рівністю $< F_f, \varphi >= \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)dx$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

2) Довести, що функція $f(x) = e^x \cos e^x$ не задовольняє умови п.1, проте визначає регулярну узагальнену функцію за формулою п.1, де інтеграл слід розуміти як інтеграл Рімана.

О6. Означимо на $L_1(\mathbf{R})$ перетворення Фур'є $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{iyx}f(x)dx$, $y \in \mathbf{R}$. Нехай $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy$ – згортка функцій f і g, де $f \in L_1(\mathbf{R}), g \in L_2(\mathbf{R})$. Довести, що $\forall y \in \mathbf{R}$: $\widehat{f * g}(y) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(y)\hat{g}(y)$.

І1. Знайти перетворення Фур'є функцій:

1) $\theta(x)e^{-ax}$, $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$;
2) $e^{-a|x|}$, $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$;
3) $xe^{-a|x|}$, $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$;
4) $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{\pi}(x^2+a^2)}$, $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$;
5) $\chi_{[0,a]}(x)$, $a > 0$;
6) $\chi_{[-a,a]}(x)$, $a > 0$;
7) $x^2e^{-ax^2}$, $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$;
8) $e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(ax)$, $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$.

О8. Нехай F – це перетворення Фур'є в $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Довести:

1) $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})\ :\ (F[f])^{(k)} = F[(ix)^k f],\ k \geq 1;$
2) $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})\ :\ F[f^{(k)}] = (-iy)^k F[f],\ k \geq 1;$

I2. Довести правильність у $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ рівностей:

1) $F[\frac{1}{2}(\delta_h + \delta_{-h})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(hy),\ h \in \mathbf{R};$
2) $F[\frac{1}{2i}(\delta_h - \delta_{-h})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(hy),\ h \in \mathbf{R};$
3) $F[3x^2 + 2x - 1] = \sqrt{2\pi}(-3\delta_0'' + 2i\delta_0' - \delta_0);$
4) $F[\mathrm{sh}(hx)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_{-ih} - \delta_{ih}),\ h \in \mathbf{R};$
5) $F[\mathrm{ch}(hx)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_{-ih} + \delta_{ih}),\ h \in \mathbf{R};$
6) $F[\theta] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y}$(Вказівка: скористатись 1) з I1 та формулою Сохоцького з Д3.A18);
7) $F[\theta(x-h)] = (\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y})e^{ihy},\ h \in \mathbf{R};$
8) $F[x\theta(x)] = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\delta_0' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y^2};$
9) $F[\operatorname{sign} x] = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y};$
10) $F[|x|] = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{y^2};$

ЛІТЕРАТУРА

1) Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск, 1978.
2) Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анадиз и интегральные уравнения. – Минск, 1984.
3) Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. – М., 1976.
4) Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. В 2 т. – Х., 1977-78.
5) Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К., 1990.
6) Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. – М., 1989.
7) Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М., 1979.
8) Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М., 1971.
9) Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ в задачах. – М., 1969.
10) Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. – К., 1990.
11) Городецький В.В., Нагнибіда М.І. Узагальнені функції. Теореми і задачі. – К., 1996.
12) Городецький В.В., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. У 2 ч. – К., 1997.
13) Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. – Т.1. Общая теория. – М., 1962.
14) Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. – К., 1987.

15) Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., 1984.

16) Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М., 1988.

17) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1989.

18) Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М., 1984.

19) Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М., 1965.

20) Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М., 1948.

21) Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – Т.1. Функциональный анализ. – М., 1977.

22) Рудин У. Функциональный анализ. – М., 1975.

23) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М., 1984.

24) Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. – М., 1970.

25) Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. – М., 1960.

26) Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М., 1984.