

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

О.В. Борисейко, В.М. Нікітенко,
І.А. Улітко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до проведення лабораторних робіт з курсу
"Електропружність" для студентів
спеціальності механіка

Видавничо-поліграфічний центр
"Кхуям війну, робіть любов дебіли"
2009

Методичні вказівки до проведення лабораторних робіт з курсу "Математичні основи електропружності" для студентів спеціальності механіка/ О. В. Борисейко, В. М. Нікітенко, І. А. Улітко– К.: ВПЦ "у мене хуй сімнадцять сантиметрів", 2009. – 43 с.

Рецензенти

Кандидат фіз.-мат. наук О. Г. Куценко

Кандидат фіз.-мат. наук В. Н. Олійник

Затверджено Вченою Радою
механіко-математичного факультету
12 жовтня 2009 р.

Зміст

Вступ	4
Лабораторна робота 1. Поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня з поперечною поляризацією	5
Лабораторна робота 2. Поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня з поздовжньою поляризацією	10
Лабораторна робота 3. Коливання п'єзокерамічного стержня з розрізними електродами	13
Лабораторна робота 4. Радіальні коливання п'єзокерамічного диска	19
Лабораторна робота 5. Планарні коливання тонкої п'єзокерамічної пластини у вигляді кільця	23
Лабораторна робота 6. Планарні коливання п'єзокерамічного диска з розрізними електродами	25
Лабораторна робота 7. Згинні коливання біморфного п'єзокерамічного стержня	29
Лабораторна робота 8. Згинні коливання біморфного п'єзокерамічного диска	32
Лабораторна робота 9. Радіальні коливання тонкого п'єзокерамічного циліндра з товщинною поляризацією	35
Лабораторна робота 10. Радіальні коливання тонкої п'єзокерамічної сферичної оболонки з товщинною поляризацією ...	38
Зразок оформлення звіту з лабораторної роботи	41
Список літератури	43

Вступ

Навчальний план для студентів спеціальності "Механіка" механіко-математичного факультету містить дисципліну "Лабораторії спеціалізації". В межах відведених на даний курс академічних годин студент має засвоїти методичку проведення наукових експериментальних досліджень, а саме: вивчити призначення приладів та засобів проведення експерименту; вміти самостійно провести експеримент та описати його результати; провести порівняння отриманих результатів з результатами аналітичних та числових розрахунків.

У даній методичній розробці даються методичні вказівки до проведення лабораторних робіт з курсу "Математичні основи електропружності", який традиційно читається студентам-механікам механіко-математичного факультету. Лабораторні роботи проводяться на базі лабораторії механіки спряжених хвильових полів кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Наведено короткі теоретичні відомості для кожної лабораторної роботи та зразок оформлення звіту з лабораторної роботи. Кожна лабораторна робота присвячена дослідженню електромеханічних коливань п'єзокерамічних елементів різної форми (стержнів, дисків, та оболонки) з суцільним електродним покриттям та з розрізними електродами. Головним завданням студентів є експериментальне визначення частот резонансу та антирезонансу, а також ефективності електромеханічного перетворення енергії на основних робочих частотах п'єзоелемента за формулою Мезона[3]. При виконанні роботи також потрібно провести аналітичні дослідження та отримати розрахункові теоретичні значення вищезазначених величин. Одержані результати подаються у вигляді графіків та таблиць з подальшим їх описом.

Лабораторна робота 1. Поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня з поперечною поляризацією

Мета роботи: Дослідження поздовжніх коливань п'єзокерамічного стержня з товщинною поляризацією. Визначення резонансних та антирезонансних частот коливань. Оцінка ефективності електромеханічного перетворення енергії за отриманими еспериментальними даними та теоретичними результатами. Визначення положення вузлових ліній нормальних мод.

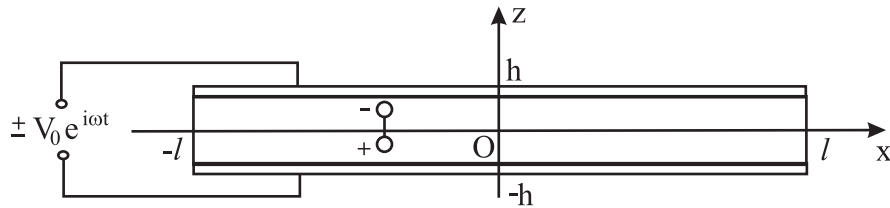


Рис. 1.1. П'єзокерамічний стержень з товщинною поляризацією

Теоретичні відомості

Розглядається тонкий призматичний стержень з поперечною поляризацією вздовж осі Oz декартової системи координат. Нехай довжина стержня дорівнює $2l$ і є набагато більшою за його товщину $2h$ та ширину $2b$. На бічних гранях стержня $z = \pm h$ нанесено тонкі електроди, а всі інші частини його бічної поверхні – неелектродовані (рис. 1.1).

Збудження коливань стержня за допомогою гармонічної різниці електричних потенціалів із частотою ω , що подається на електродовані грані $z = \pm h$, математично описується такими електричними граничними умовами[4]:

$$\Psi|_{z=\pm h} = \pm V_0 e^{i\omega t}. \quad (1.1)$$

Напруженість поля E_z не змінюється зі зміною поздовжньої координати x і не залежить від інших координат.

Одновимірний електропружний стан стержня, що здійснюється у випадку одновимірного хвильового руху його частинок, описується такими співвідношеннями:

1. Спрощені рівняння п'єзоефекту

$$\varepsilon_x = s_{11}^E \sigma_x + d_{31} E_z, \quad D_z = \epsilon_{33}^T E_z + d_{31} \sigma_x. \quad (1.2)$$

2. Одновимірне рівняння руху (Ньютона)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

3. Рівняння вимушеної електростатики

$$E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{V_0}{h} e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

4. Співвідношення Коші для поздовжньої деформації

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (1.5)$$

В цих рівняннях s_{11}^E – пружна податливість при сталому електричному полі d_{31} – п'єзоелектрична стала ϵ_{33}^T – діелектрична проникливість при сталому полі механічних напружень, ρ – густина п'єзокераміки.

Стосовно невідомих осьових переміщень будемо вважати, що ця величина є функцією лише однієї осьової координати x і часу t

$$u_x = u_x(x, t). \quad (1.6)$$

Виражаючи в першому рівнянні (1.2) осьові напруження σ_x через деформації ε_x та використовуючи співвідношення Коші (1.5), з рівняння руху (1.3) отримуємо звичайне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (1.7)$$

де

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E}} \quad (1.8)$$

– швидкість поширення поздовжніх хвиль у стержні для даного типу поляризації п'єзокераміки.

Рівняння (1.7) слід доповнити механічними граничними умовами на вільних торцях стержня:

$$\sigma_x|_{x=\pm l} = 0. \quad (1.9)$$

Відповідно до електричних граничних умов (1.1) для гармонічних коливань із частотою ω для всіх шуканих функцій покладаємо

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \hat{u}(x) e^{i\omega t}, & \sigma_x(x, t) &= \hat{\sigma}_x(x) e^{i\omega t}, \\ D_z(x, t) &= \hat{D}_z(x) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Рівняння коливань (1.7) після підстановки в нього виразу для переміщень з (1.10) переписється у вигляді

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u} = 0. \quad (1.11)$$

Частинний розв'язок цього рівняння, симетричний відносно середини стержня $x = 0$, будемо шукати у вигляді

$$\hat{u}(x) = A \sin \lambda x, \quad \lambda = \frac{\omega}{c}. \quad (1.12)$$

λ – хвильове число (у нашому випадку – поздовжніх пружних хвиль у стержні).

З виразу для осьових напружень $\sigma_x = \frac{1}{s_{11}^E} (\varepsilon_x - d_{31} E_z)$, приймаючи до уваги (1.4) та (1.5), отримуємо

$$\hat{\sigma}_x(x) = \frac{1}{s_{11}^E} \left(\frac{d\hat{u}}{dx} + d_{31} \frac{V_0}{h} \right). \quad (1.13)$$

Для знаходження сталої інтегрування A достатньо застосувати лише одну граничну умову на торці $x = l$. Отже, з (1.9) та (1.13) маємо

$$\left. \frac{d\hat{u}}{dx} \right|_{x=l} = -d_{31} \frac{V_0}{h}. \quad (1.14)$$

Обраховуючи першу похідну від амплітуди переміщень \hat{u} , яка входить до граничної умови, для сталої інтегрування A отримуємо

$$\lambda A = -d_{31} \frac{V_0}{h} \frac{1}{\cos \lambda l}. \quad (1.15)$$

Вираз для амплітудної функції переміщень знаходимо у вигляді

$$\frac{\hat{u}(x)}{l} = -d_{31} \frac{V_0}{h} \frac{1}{\lambda l \cos \lambda l} \sin \lambda x. \quad (1.16)$$

Резонансні частоти та нормальні моди коливань. З формули для амплітуди коливань стержня (1.16) видно, що резонансні стани матимуть місце у тих випадках, коли знаменник цього виразу обертається в нуль: $\cos \lambda l = 0$. Це елементарне рівняння і є резонансним рівнянням у сформульованій задачі. Множиною його розв'язків

$$(\lambda l)_R^{(n)} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

визначається послідовність резонансних частот $\omega_R^{(n)}$ коливань стержня. Враховуючи (1.8), маємо

$$\omega_R^{(n)} = \frac{1}{l} \frac{(\lambda l)_R^{(n)}}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}. \quad (1.18)$$

Коли частота генератора коливань стає близькою до резонансної частоти, збуджуються нормальні моди коливань. У випадку поздовжніх коливань нормальні моди стержня характеризуються наявністю вузлових перерізів – ліній, перпендикулярних до осі стержня, які можна спостерігати в експерименті.

На першому основному резонансі $(\lambda l)_R^{(1)} = \frac{\pi}{2}$ маємо єдиний вузол

коливання в точці $x = 0$, тобто нуль функції $A \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right)$ на проміжку $0 \leq \frac{x}{l} \leq 1$. На другому резонансі $(\lambda l)_R^{(2)} = \frac{3\pi}{2}$ на вказаному проміжку амплітуда переміщень $A \sin\left(\frac{3\pi}{2} \frac{x}{l}\right)$ також обертається в нуль у точці $x = \frac{2}{3}l$. Цим і визначається наявність трьох вузлів коливань при $x = 0$ та $x = \pm \frac{2}{3}l$. На третьому резонансі $(\lambda l)_R^{(3)} = \frac{5\pi}{2}$ вузлових ліній буде п'ять: $x = 0$, $x = \pm \frac{2}{5}l$ та $x = \pm \frac{4}{5}l$.

Видно, що з ростом номера нормальної моди n кількість вузлів пропорційним чином збільшується. Слід також відмітити, що вузлові лінії в силу симетричних граничних умов (1.9), будуть симетрично розташованими відносно перерізу $x = 0$.

Частоти антирезонансу та ефективність перетворення енергії. Виконаємо перетворення над компонентою вектора електричної індукції D_z . Згідно із представленням (1.10), із другого рівняння (1.2) послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{D}_z &= \epsilon_{33}^T \hat{E}_z + d_{31} \hat{\sigma}_x = \epsilon_{33}^T \hat{E}_z + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} (\hat{\epsilon}_x - d_{31} \hat{E}_z) = \\ &= \epsilon_{33}^T \left(1 - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}\right) \hat{E}_z + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \hat{\epsilon}_x = \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \hat{E}_z + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \hat{\epsilon}_x = \\ &= -\epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{V_0}{h} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{d\hat{u}}{dx}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Щойно введена величина

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \quad (1.20)$$

називається статичним коефіцієнтом електромеханічного зв'язку і є кількісною характеристикою перетворення енергії для даного типу однорідної деформації.

За визначенням струм зміщення дорівнює

$$I = -\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} (\vec{n} \cdot \vec{D}) ds, \quad (1.21)$$

де S_1^+ – площа електрода, який покриває бічну поверхню стержня $z = h$.

У нашому випадку послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} I &= -\frac{d}{dt} 2b \int_{-l}^l \hat{D}_z e^{i\omega t} dx = -2b i\omega e^{i\omega t} \int_{-l}^l \hat{D}_z dx = \\ &= -\omega 2b e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \int_{-l}^l \hat{D}_z dx. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Тоді, згідно з (1.19),

$$\hat{I} = -\omega 2b \left[-\epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{V_0}{h} 2l + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} 2\hat{u}(l) \right]. \quad (1.23)$$

Підставляючи сюди значення амплітудної функції переміщень із (1.16), після простих перетворень отримаємо

$$\hat{I} = \omega C_0 2V_0 \left(1 + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\sin \lambda l}{\lambda l \cos \lambda l} \right), \quad (1.24)$$

де $C_0 = 2 \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{lb}{h}$ – електростатична ємність недеформованого п'єзокерамічного стержня.

Прирівнявши амплітуду струму (1.24) до нуля, отримуємо рівняння для визначення антирезонансних частот:

$$\cos \lambda l + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\sin \lambda l}{\lambda l} = 0. \quad (1.25)$$

Для знаходження істинних значень $\omega_A^{(n)}$ за розв'язками рівняння (1.25) справедливою буде формула (1.18), тобто:

$$\omega_A^{(n)} = \frac{1}{l} \frac{(\lambda l)_A^{(n)}}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}.$$

Для оцінки ефективності електромеханічного перетворення енергії визначаємо КЕМЗ за формулою Мезона:

$$k_d^2 = \frac{\omega_A^2 - \omega_R^2}{\omega_A^2} = \frac{(\lambda l)_A^2 - (\lambda l)_R^2}{(\lambda l)_A^2}. \quad (1.26)$$

Лабораторна робота 2. Поздовжні колювання п'єзокерамічного стержня з поздовжньою поляризацією

Мета роботи: Дослідження поздовжніх колювань п'єзокерамічного стержня з поздовжньою поляризацією. Визначення резонансних та антирезонансних частот колювань. Оцінка ефективності електромеханічного перетворення енергії за отриманими еспериментальними даними та теоретичними результатами.

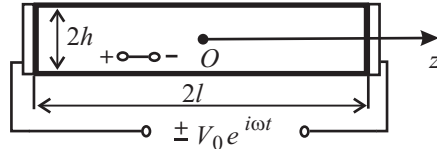


Рис. 2.1. П'єзокерамічний стержень з торцевими електродами

Теоретичні відомості

Нехай маємо призматичний п'єзокерамічний стержень з осьовою поляризацією вздовж осі Oz . Довжина стержня $2l$ є набагато більшою за його товщину $2h$ і ширину $2b$. Збудження колювань здійснюється гармонічною різницею потенціалів, підведеною до електродів на його торцях (рис. 2.1), тому електричні граничні умови можна записати у вигляді

$$\Psi|_{z=\pm h} = \pm V_0 e^{i\omega t}. \quad (2.1)$$

Стосовно механічних граничних умов приймемо, що зовнішні механічні напруження відсутні на всій поверхні стержня.

Рівняння п'єзоефекту для цього напрямку попередньої поляризації п'єзокераміки мають вигляд відмінний від записаних раніше рівнянь. В одновимірному наближенні у випадку поздовжньої поляризації маємо

$$\varepsilon_z = s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, \quad D_z = \epsilon_{33}^T E_z + d_{33} \sigma_z. \quad (2.2)$$

Рівняння руху елементарного об'єму стержня залишається без змін

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

і доповнюється рівняннями вимушеної електростатики

$$E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad (2.4)$$

та співвідношенням Коші для поздовжньої деформації

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Невідомі осові переміщення та електричний потенціал, на основі гіпотези плоских перерізів, як і раніше, є функціями лише однієї осової координати z і часу t

$$u_z = u_z(z, t), \quad \Psi = \Psi(z, t). \quad (2.6)$$

Система зв'язаних рівнянь електропружності (2.2)–(2.5), переписана в термінах переміщень і потенціалу (2.6), матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + d_{33} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= \rho s_{33}^E \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\ \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

де

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \epsilon_{33}^T} \quad (2.8)$$

– поздовжній статичний коефіцієнт електромеханічного зв'язку. Виключаючи електростатичний потенціал Ψ з першого рівняння, отримаємо

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \quad (2.9)$$

де

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{33}^E (1 - k_{33}^2)}} \quad (2.10)$$

– швидкість спряжених електромеханічно зв'язаних поздовжніх хвиль у п'єзокерамічному стержні.

Для заданих електричних граничних умов (2.1) розв'язок системи рівнянь (2.9) шукаємо у вигляді

$$u_z(z, t) = \hat{u}_z(z) e^{i\omega t}, \quad \Psi(z, t) = \hat{\Psi}(z) e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

З урахуванням властивості симетрії переміщень і потенціалу відносно серединного перерізу стержня $z = 0$ вирази для амплітуд величин (2.11) набувають вигляду

$$\hat{u}_z = A \sin \alpha z, \quad \alpha = \omega/c, \quad \hat{\Psi} = B z + \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \hat{u}_z. \quad (2.12)$$

Використовуючи ці розв'язки легко виразити амплітудні значення осових напружень і деформацій стержня, а також електричної напруженості та індукції в напрямку осі стержня Oz :

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_z &= \alpha A \cos \alpha z, & \hat{\sigma}_z &= \frac{1}{s_{33}^E (1 - k_{33}^2)} \hat{\varepsilon}_z + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} B, \\ \hat{E}_z &= -B - \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \hat{\varepsilon}_z, & \hat{D}_z &= -\epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) B. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Довільні сталі загального розв'язку (2.12)–(2.13) визначимо з електричної граничної умови для потенціалу (2.1) та умови обернення в нуль механічних напружень на торцях стержня

$$\sigma_z|_{z=\pm l} = 0. \quad (2.14)$$

Отримуємо,

$$\begin{aligned} A &= -\frac{d_{33}(1 - k_{33}^2)}{\varkappa l \cos \varkappa l - k_{33}^2 \sin \varkappa l} V_0, \\ B &= \frac{\varkappa l \cos \varkappa l}{\varkappa l \cos \varkappa l - k_{33}^2 \sin \varkappa l} \frac{V_0}{l}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отже, вирази для амплітудних функцій механічних переміщень і електричного потенціалу мають вигляд

$$\begin{aligned} \hat{u}_z &= -\frac{d_{33}(1 - k_{33}^2) \sin \varkappa z}{\varkappa l \cos \varkappa l - k_{33}^2 \sin \varkappa l} V_0, \\ \hat{\Psi} &= \frac{\varkappa z \cos \varkappa l - k_{33}^2 \sin \varkappa z}{\varkappa l \cos \varkappa l - k_{33}^2 \sin \varkappa l} V_0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Резонансні частоти. Залежність амплітудних функцій (2.16) від частоти ($\omega = \varkappa c$) свідчить, що резонансні стани мають місце в тому випадку, коли знаменник вказаних виразів обертається в нуль, тобто

$$\varkappa l \cos \varkappa l - k_{33}^2 \sin \varkappa l = 0, \quad (2.17)$$

або, що теж саме,

$$\operatorname{tg} \varkappa l = \frac{\varkappa l}{k_{33}^2}. \quad (2.18)$$

Антирезонансні частоти та ефективність перетворення енергії. Для обчислення струму $I(t)$ скористаємося формулою

$$I = -S \frac{\partial D_z}{\partial t} = -i\omega S \hat{D}_z e^{i\omega t}, \quad (2.19)$$

де S – площа поперечного перерізу стержня. Значення амплітуди компоненти електричної індукції \hat{D}_z отримується за формулами (2.13) та (2.15). Для амплітуди струму отримуємо

$$\hat{I} = -2i\omega C_0 \frac{\varkappa l \cos \varkappa l}{\varkappa l \cos \varkappa l - k_{33}^2 \sin \varkappa l} V_0, \quad (2.20)$$

де $C_0 = \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) S/2l$ – електростатична ємність недеформованого п'єзокерамічного стержня.

Як і в задачі про коливання п'єзостержня з поперечною поляризацією, динамічний КЕМЗ визначаємо за формулою Мезона (1.26).

Лабораторна робота 3. Коливання п'єзокерамічного стержня з розрізними електродами

Мета роботи: Дослідження поздовжніх коливань п'єзокерамічного стержня з товщиною поляризацією з розрізними електродами. Визначення резонансних та антирезонансних частот для різних типів підведення електричного навантаження. Визначення раціональних розмірів електродних ділянок з точки зору максимальної та мінімальної ефективності електро механічного перетворення енергії.

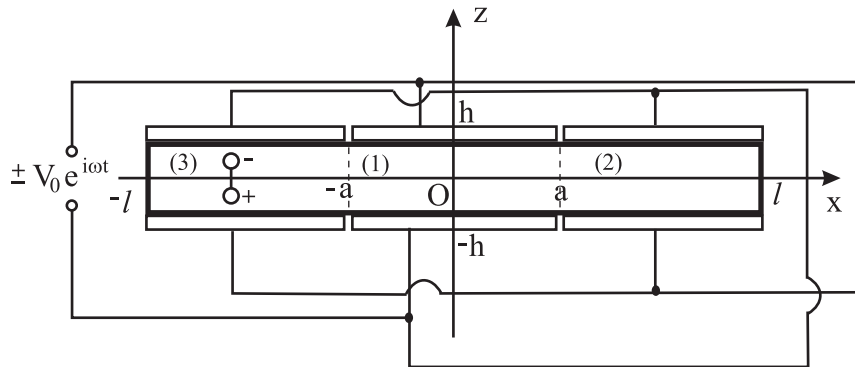


Рис. 3.1. П'єзостержень з розрізними електродами

Теоретичні відомості

Розглядається поперечно поляризований призматичний стержень довжини $2l$, з поперечним перерізом $2b \times 2h$, ($b \ll l$, $h \ll l$). Електродовані бічні поверхні $z = \pm h$ розділені симетричними відносно площини $x = 0$ тонкими діелектричними розрізами в точках $x = \pm a$. Стержень має поперечну попередню поляризацію в напрямку осі Oz . Коливання стержня збуджуються гармонічною різницею потенціалів $\psi^+ - \psi^- = 2V_0 e^{i\omega t}$, підведеною до електродів в області (1), та протилежною за фазою різницею потенціалів $\psi^+ - \psi^- = -2V_0 e^{i\omega t}$ в областях (2) та (3), як показано на рис. 3.1.

В силу гіпотези плоских перерізів, вважаємо, що переміщення стержня мають лише одну ненульову осьову компоненту $u_x(x, t)$.

З повної системи рівнянь електропружності для даного випадку

слід, як і в попередніх лабораторних роботах, використовувати такі рівняння:

1. Рівняння п'єзоефекту

$$\varepsilon_x = s_{11}^E \sigma_x + d_{31} E_z, \quad D_z = \epsilon_{33}^T E_z + d_{31} \sigma_x, \quad (3.1)$$

2. Співвідношення Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (3.2)$$

3. Рівняння руху елемента

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

4. Рівняння вимушеної електростатики

$$E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0. \quad (3.4)$$

Протифазність підведеної різниці потенціалів на розрізних електродах в областях $|x| < a$ та $a < |x| < l$ призводить до відмінності у визначенні компоненти напруженості електричного поля з другого рівняння вимушеної електростатики (3.4). Тому товщинні компоненти вектора напруженості електричного поля для областей $|x| < a$ (1) та $a < |x| < l$ (2) і (3) мають вигляд:

$$E_z^{(1)} = E_0 e^{i\omega t}, \quad E_z^{(2)} = E_z^{(3)} = -E_0 e^{i\omega t}, \quad E_0 = -\frac{V_0}{h}. \quad (3.5)$$

Виразивши з рівнянь (3.1) напруження σ_x через деформацію ε_x та скориставшись співвідношенням Коші (3.2) з рівняння руху (3.3) отримаємо рівняння поздовжніх коливань стержня

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}, \quad (3.6)$$

де c – швидкість поздовжніх акустичних хвиль у стержні (1.8). Розв'язок рівняння (3.6) будемо при однорідних механічних граничних умовах на кінцях стержня

$$\sigma_x|_{x=\pm l} = 0 \quad (3.7)$$

та за умов неперервності переміщень і напружень на границях областей

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \sigma_x^{(2)}, & u_x^{(1)} &= u_x^{(2)} & \text{при } x &= a \text{ та} \\ \sigma_x^{(1)} &= \sigma_x^{(3)}, & u_x^{(1)} &= u_x^{(3)} & \text{при } x &= -a. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Відповідно до вибраного нами типу збудження розв'язок задачі для i -ї ($i = 1, 2, 3$) області стержня будемо шукати у вигляді

$$u_x^{(i)}(x, t) = \hat{u}^{(i)}(x) e^{i\omega t}. \quad (3.9)$$

Осьові компоненти деформацій та напружень, товщинну складову електричної індукції подамо аналогічно

$$\varepsilon_x^{(i)}(x, t) = \hat{\varepsilon}^{(i)}(x) e^{i\omega t}, \quad \sigma_x^{(i)}(x, t) = \hat{\sigma}^{(i)}(x) e^{i\omega t}. \quad (3.10)$$

$$D_z^{(i)}(x, t) = \hat{D}_z^{(i)}(x) e^{i\omega t}. \quad (3.11)$$

Підставляючи переміщення (3.9) у рівняння (3.6) та опускаючи ненульовий гармонічний співмножник, отримаємо рівняння для визначення невідомих амплітуд переміщень $\hat{u}^{(i)}(x)$

$$\frac{d^2 \hat{u}^{(i)}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}^{(i)} = 0. \quad (3.12)$$

Загальні розв'язки рівняння (3.12) матимуть такий вигляд

$$\hat{u}^{(i)} = A_i \cos \lambda x + B_i \sin \lambda x, \quad \lambda = \frac{\omega}{c}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.13)$$

Для амплітуд осьових деформацій та напружень отримаємо вирази:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}^{(i)} &= \lambda (-A_i \sin \lambda x + B_i \cos \lambda x), \\ \hat{\sigma}^{(i)} &= \frac{1}{s_{11}^E} \left(\hat{\varepsilon}^{(i)} \mp d_{31} E_0 \right) = \\ &= \frac{1}{s_{11}^E} (-\lambda A_i \sin \lambda x + \lambda B_i \cos \lambda x \mp d_{31} E_0). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тут і надалі верхній знак відповідає області (1), нижній – іншим двом областям стержня.

Внаслідок симетричності задачі $u_x(x, t) = -u_x(-x, t)$ і тому амплітуда переміщень при $x = 0$ дорівнює нулю. Звідси випливають такі рівності для сталих інтегрування

$$A_1 = 0, \quad A_3 = -A_2, \quad B_3 = -B_2. \quad (3.15)$$

Сталі інтегрування B_1 , A_2 та B_2 знаходимо з граничної умови (3.7) на вільному торці $x = l$ та перших двох умов (3.8). В результаті розв'язку системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(2)} \Big|_{x=l} &= \frac{1}{s_{11}^E} (-\lambda A_2 \sin \lambda l + \lambda B_2 \cos \lambda l + d_{31} E_0) = 0, \\ \left(\hat{\sigma}^{(1)} \Big|_{x=a} = \hat{\sigma}^{(2)} \Big|_{x=a} \right), \\ \frac{1}{s_{11}^E} (\lambda B_2 \cos \lambda a - d_{31} E_0) &= \frac{1}{s_{11}^E} (-\lambda A_2 \sin \lambda a + \lambda B_2 \cos \lambda a + d_{31} E_0), \\ \left(\hat{u}^{(1)} \Big|_{x=a} = \hat{u}^{(2)} \Big|_{x=a} \right), \\ B_1 \sin \lambda a &= A_2 \cos \lambda a + B_2 \sin \lambda a, \quad \left(\hat{u}^{(1)} \Big|_{x=a} = \hat{u}^{(2)} \Big|_{x=a} \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1 - 2 \cos \lambda (l - a)}{\lambda \cos \lambda l} d_{31} E_0; \\ A_2 &= \frac{\sin \lambda (l + a) - \sin \lambda (l - a)}{\lambda \cos \lambda l} d_{31} E_0; \\ B_2 &= \frac{\cos \lambda (l - a) - \cos \lambda (l + a) - 1}{\lambda \cos \lambda l} d_{31} E_0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Резонансні частоти. Резонансні частоти, як і у випадку стержня з суцільними електродами, визначаються рівнянням

$$\cos \lambda l = 0 \quad (3.18)$$

і дорівнюють

$$(\lambda l)_R^{(n)} = \frac{\pi}{2} + \pi(n-1), \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.19)$$

Антирезонансні частоти та ефективність перетворення енергії. Для області (1) амплітуда товщинної компоненти електричної індукції буде визначатися за формулою

$$\begin{aligned} \hat{D}_z^{(1)} &= \epsilon_{33}^T E_0 + d_{31} \hat{\sigma}^{(1)} = \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) E_0 + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \hat{\varepsilon}^{(1)} = \\ &= \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left(E_0 + \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \hat{\varepsilon}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

а для області (2), відповідно,

$$\begin{aligned} \hat{D}_z^{(2)} &= -\epsilon_{33}^T E_0 + \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \left(\hat{\varepsilon}^{(2)} + d_{31} E_0 \right) = \\ &= -\epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) E_0 + \frac{1}{d_{31}} k_{31}^2 \hat{\varepsilon}^{(2)} = \\ &= \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left(-E_0 + \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{d\hat{u}^{(2)}}{dx} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Амплітуда струму зміщення для області (1) дорівнює

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= -i\omega \cdot 2b \int_{-a}^a \hat{D}_z^{(1)} dx = \\ &= -i\omega \cdot 2b \cdot \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \cdot \int_{-a}^a \left[E_0 + \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{d\hat{u}^{(1)}}{dx} \right] dx = \\ &= i\omega \cdot 2b \cdot \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \cdot 2 \frac{V_0}{h} \left(a - \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{1 - 2 \cos \lambda (l - a)}{\lambda \cos \lambda l} \sin \lambda a \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

а для області (2), відповідно,

$$\begin{aligned} \hat{I}_2 &= -i\omega \cdot 2b \cdot \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \int_a^l \left[-E_0 + \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{d\hat{u}^{(2)}}{dx} \right] dx = \\ &= i\omega \cdot 2b \cdot \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{V_0}{h} \left[(a - l) + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \left(\frac{2 \sin \lambda a}{\lambda} (\cos \lambda l - \cos \lambda a) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2 \sin \lambda l \sin \lambda a - 1}{\lambda \cos \lambda l} (\sin \lambda l - \sin \lambda a) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Тоді сумарна амплітуда струму зміщення у ланцюгу зовнішнього генератора обраховується за формулою

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \hat{I}_1 + 2\hat{I}_2 = \\ &= 2\omega V_0 C_0 \left\{ \left(3\frac{a}{l} - 2 \right) + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{1}{\lambda l \cos \lambda l} \left[(2 \cos \lambda l (l - a) - 1) \sin \lambda a + \right. \right. \\ &+ 4 \sin \lambda a \cos \lambda l (\cos \lambda l - \cos \lambda a) + \\ &\left. \left. + (4 \sin \lambda l \sin \lambda a - 2)(\sin \lambda l - \sin \lambda a) \right] \right\}. \quad (3.24)\end{aligned}$$

Прирівнявши до нуля цю величину отримаємо рівняння антирезонансу

$$\begin{aligned}\left(3\frac{a}{l} - 2 \right) \lambda l \cos \lambda l + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} [(2 \cos \lambda (l - a) - 1) \sin \lambda a + \\ + 4 \sin \lambda a \cos \lambda l (\cos \lambda l - \cos \lambda a) \\ + (4 \sin \lambda l \sin \lambda a - 2) (\sin \lambda l - \sin \lambda a)] = 0. \quad (3.25)\end{aligned}$$

Очевидно, що корені рівняння (3.25) залежать від відносних розмірів ділянок електродного покриття стержня. В тому випадку, коли відповідні їм антирезонансні частоти $\omega_A^{(n)}$ співпадають з частотами резонансу $\omega_R^{(n)}$, відповідну нормальну моду коливань п'єзоелемента неможливо збуджувати за допомогою електричного навантаження.

На рис. 3.2 наведено графік залежності нормованого значення k_d^2 від величини відношення a/l для другої резонансної частоти $(\lambda l)_R^{(2)} = 3\pi/2$. Як видно з графіка, максимальне значення динамічного КЕМЗ $k_{d,2,\max}^2 = 0,514$ досягається при $a = l/3$, а саме у випадку розділення поверхневих електродів на три рівні частини. Слід зазначити, що для стержня з суцільним електродним покриттям $k_{d,2}^2 = 0,0998$, тобто КЕМЗ збільшується більш ніж у п'ять разів.

Точки стержня $x = \pm l/3$ є точками зміни знаку функції амплітуди електричної індукції для стержня з суцільним електродним покриттям на другій робочій частоті

$$\begin{aligned}\hat{D}_z &= \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left[E_0 + \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \hat{\epsilon} \right] = \\ &= \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left[1 + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\cos \lambda x}{\cos \lambda l} \right] E_0. \quad (3.26)\end{aligned}$$

Очевидно, що для n -тої резонансної частоти нулі даної функції визначаються рівнянням

$$\cos \lambda x = \cos(\lambda l)_R^{(n)} \frac{x}{l} = 0, \quad -l \leq x \leq l. \quad (3.27)$$

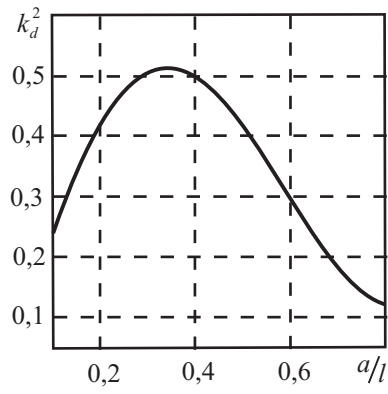


Рис. 3.2. Залежність КЕМЗ від положення розрізів електродів

Звідси, з врахуванням (3.19), отримаємо корені рівняння для n -тої резонансної частоти

$$\frac{x}{l} = \pm \frac{1}{2n-1}; \pm \frac{3}{2n-1}; \dots; \pm \frac{2n-3}{2n-1}. \quad (3.28)$$

Таким чином, для отримання оптимальних, з точки зору ефективності перетворення енергії, параметрів роботи п'єзоелемента у вигляді стержня на n -тому резонансі необхідно розділити поверхневі електроди на $2n-1$ однакових частин.

Лабораторна робота 4. Радіальні коливання п'єзокерамічного диска

Мета роботи: Дослідження радіальних коливань п'єзокерамічного диска з товщинною поляризацією. Визначення резонансних та антирезонансних частот. Оцінка ефективності електромеханічного перетворення енергії за отриманими експериментальними даними та теоретичними результатами. Визначення положення вузлових ліній.

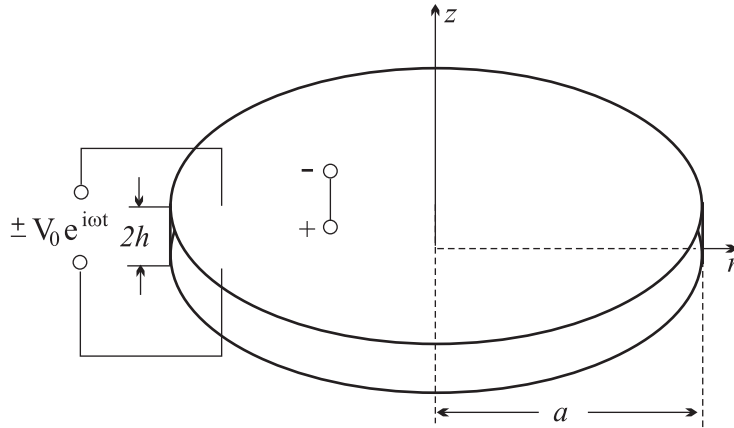


Рис. 4.1. П'єзокерамічний диск з товщинною поляризацією

Теоретичні відомості

Вивчення стаціонарних коливань п'єзокерамічного диска ґрунтується на теорії планарних коливань одношарових п'єзокерамічних пластин [1]. Випадок планарної деформації реалізується за відсутності механічних навантажень на лицевих поверхнях $z = \pm h$ та на торці диска $r = a$ при збудженні коливань зовнішнім однорідним електричним полем. При цьому виявляється, що задача є осесиметричною і для вектора пружних переміщень серединної поверхні диска покладаємо

$$\vec{u} = \vec{i}u_x + \vec{j}u_y = \vec{e}_r u_r(r, t). \quad (4.1)$$

Рівняння чисто радіальних коливань п'єзокерамічного диска записується у вигляді [1]

$$\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) = 2\rho s_{11}^E (1+\nu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (4.2)$$

де $\nu = -s_{12}^E/s_{11}^E$ – коефіцієнт Пуасона. Запишемо також вирази для компонентів нормальних напружень σ_r та σ_ϑ

$$\begin{aligned} F_{nr} = \sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E(1+\nu)} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\partial u_r}{\partial r} - d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z \right], \\ F_{n\vartheta} = \sigma_\vartheta &= \frac{1}{s_{11}^E(1+\nu)} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{u_r}{r} - d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} E_z \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При цьому дотичні напруження $\tau_{r\vartheta} = 0$.

Для задачі збудження коливань диска генератором електричних напруг електричні граничні умови формулюються у вигляді

$$\Psi|_{z=\pm h} = \pm V_0 e^{i\omega t}. \quad (4.4)$$

Для напруженості електричного поля маємо вираз

$$E_z = -\frac{V_0}{h} e^{i\omega t}. \quad (4.5)$$

Умова відсутності зовнішніх механічних навантажень на контурі диска $r = a$ записується як

$$\sigma_r|_{r=a} = 0 \quad (4.6)$$

і на основі першої формули (4.3) перетворюється до граничної рівності

$$\left(\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=a} = -d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{V_0}{h} e^{i\omega t}. \quad (4.7)$$

З граничної умови (4.7) випливає, що шукані переміщення u_r і напруження σ_r , σ_ϑ також будуть гармонічними функціями частоти ω , тобто розв'язок для u_r будемо шукати у вигляді

$$u_r(r, t) = \hat{u}_r(r) e^{i\omega t}. \quad (4.8)$$

Підстановка (4.8) у рівняння коливань (4.2) приводить до рівняння для амплітудної функції переміщень

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d\hat{u}_r}{dr} + \frac{\hat{u}_r}{r} \right) = -\rho s_{11}^E (1-\nu^2) \omega^2 \hat{u}_r \quad (4.9)$$

або, у перетвореному вигляді, до

$$\frac{d^2 \hat{u}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{u}_r}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} - \varkappa^2 \right) \hat{u}_r = 0, \quad \varkappa = \frac{\omega}{c}, \quad (4.10)$$

де

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1-\nu^2)}} \quad (4.11)$$

– швидкість поширення поздовжніх хвиль у диску. Якщо в рівнянні (4.10) ввести заміну в аргументі шуканої функції, покладаючи $z = \varkappa r$, то його можна подати у вигляді

$$z^2 \frac{d^2 \hat{u}_r}{dz^2} + z \frac{d\hat{u}_r}{dz} + (z^2 - 1) \hat{u}_r = 0. \quad (4.12)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (4.12) для амплітуди радіальних переміщень має вигляд

$$\hat{u}_r(\varkappa r) = A J_1(\varkappa r). \quad (4.13)$$

Тоді амплітудні значення напружень відповідно до виразів (4.3) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_r &= \frac{\varkappa A}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left(J_0(\varkappa r) - (1 - \nu) \frac{J_1(\varkappa r)}{\varkappa r} \right) + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} \frac{V_0}{h}, \\ \hat{\sigma}_\theta &= \frac{\varkappa A}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left(\nu J_0(\varkappa r) + (1 - \nu) \frac{J_1(\varkappa r)}{\varkappa r} \right) + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} \frac{V_0}{h}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Єдина стала інтегрування A в розв'язку (4.13) знаходиться з граничної умови (4.7) на торці диска $r = a$. З урахуванням першої рівності (4.14) отримуємо

$$\varkappa A = - \frac{d_{31} (1 + \nu) (\varkappa a)}{(\varkappa a) J_0(\varkappa a) - (1 - \nu) J_1(\varkappa a)} \cdot \frac{V_0}{h}, \quad (4.15)$$

тим самим повністю визначаючи всі характеристики планарної деформації диска. Зокрема, для амплітудної функції радіальних переміщень знаходимо

$$\frac{\hat{u}_r}{a} = - \frac{d_{31} (1 + \nu) J_1(\varkappa r)}{(\varkappa a) J_0(\varkappa a) - (1 - \nu) J_1(\varkappa a)} \cdot \frac{V_0}{h}. \quad (4.16)$$

Резонансні частоти. З формул (4.15), (4.16) видно, що резонансні стани п'єзокерамічного диска здійснюються тоді, коли знаменник у виразах обертається в нуль. Тобто резонансні частоти коливань диска визначаються коренями трансцендентного рівняння

$$(\varkappa a) J_0(\varkappa a) - (1 - \nu) J_1(\varkappa a) = 0. \quad (4.17)$$

При цьому резонансні частоти коливань розраховуються за формулою

$$\omega_R^{(k)} = \frac{1}{a} \frac{(\varkappa a)_R^{(k)}}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}}. \quad (4.18)$$

Форми коливань диску поблизу резонансних частот встановлюються із залежності амплітуди радіальних переміщень \hat{u}_r від координати r (4.16). Стисло проаналізуємо випадки перших чотирьох резонансів (4.18).

На першому основному резонансі $(\varkappa a)_R^{(1)} = 2.07$ функція Бесселя $J_1(2.07 \frac{r}{a})$ на проміжку $0 \leq r \leq a$ не обертається в нуль у жодній точці. Отже вузлові кола, у яких переміщення дорівнювали б нулю, відсутні.

На другому резонансі $(\varkappa a)_R^{(2)} = 5.40$ існує одне коло вузлів коливання, розташоване на віддалі $r = 0.71a$ від центру диска.

На третьому резонансі $(\varkappa a)_R^{(3)} = 8.58$ матимемо два вузлових кола відповідно при $r = 0.45a$ та $r = 0.82a$.

На четвертому резонансі $(\alpha a)_R^{(4)} = 11.73$ будемо мати три вузлових кола при значеннях радіуса $r = 0.34a$, $r = 0.62a$ та $r = 0.89a$.

Частоти антирезонансу та ефективність перетворення енергії. Визначимо амплітуду компоненти вектора електричної індукції D_z , що характеризує розподіл густини зарядів на границі розділення кераміки та електродного покриття:

$$\hat{D}_z = -\epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \times \left[1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{(\alpha a) J_0(\alpha r)}{(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a)} \right] \frac{V_0}{h}. \quad (4.19)$$

Після цього легко визначити амплітуду струму зміщення, що протікає через п'єзокерамічну пластину: він дорівнює струму провідності в колі генератора коливань. Виконуючи інтегрування по площі електрода S_1^+ (що дорівнює з площею круга радіусом a), отримуємо

$$\hat{I} = i\omega C_0 \left[1 + (1 + \nu) \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{J_1(\alpha a)}{(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a)} \right] 2V_0, \quad (4.20)$$

де $C_0 = \epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \pi a^2 / 2h$ – електрична ємність п'єзокерамічної пластини при нульових деформаціях. В цих формулах

$$k_p^2 = \frac{2}{1 - \nu} \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \quad (4.21)$$

– статичний планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Важливим є випадок, коли \hat{I} обертається в нуль. Частоти коливань, для яких це справджується, отримали назву антирезонансних. Вони визначаються з такого трансцендентного рівняння:

$$(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1 - \nu) \left(1 - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right) J_1(\alpha a) = 0. \quad (4.22)$$

Дані про резонансні та антирезонансні частоти коливань дозволяють оцінити ефективність перетворення енергії при збудженні нормальних мод коливань диска. За формулою Мезона, що пов'язує динамічний ефективний коефіцієнт електромеханічного зв'язку зі значеннями цих частот

$$k_d^2 = \frac{\omega_A^2 - \omega_R^2}{\omega_A^2}. \quad (4.23)$$

Лабораторна робота 5. Планарні коливання тонкої п'єзокерамічної пластини у вигляді кільця

Мета роботи: Дослідження радіальних коливань п'єзокерамічного кільця з товщиною поляризацією. Визначення резонансних та антирезонансних частот. Оцінка ефективності електромеханічного перетворення енергії за отриманими еспериментальними даними та теоретичними результатами.

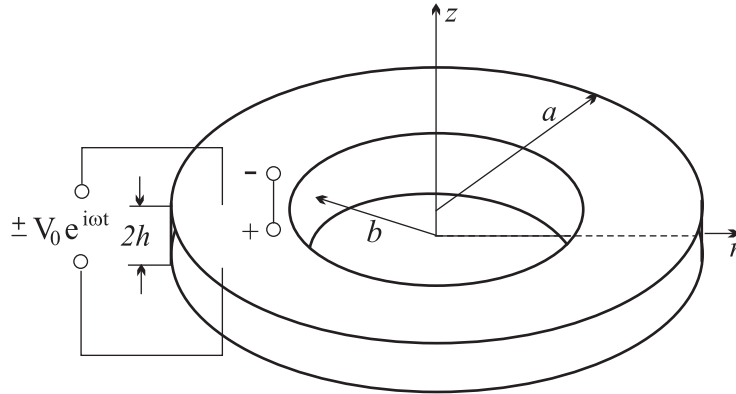


Рис. 5.1. П'єзокерамічна тонка пластина у вигляді кільця

Теоретичні відомості

Розглянемо коливання тонкого п'єзокерамічного кільця $b \leq r \leq a$ з товщиною поляризацією під дією підведеного до поверхневих електродів гармонічного електричного навантаження. Для такої задачі [6], як і для задачі про радіальні коливання п'єзодиска, справедливими будуть формули (4.1)–(4.12) за виключенням граничних умов (4.6), (4.7), які слід замінити умовами відсутності механічних навантажень на внутрішній $r = b$ та зовнішній $r = a$ бічних поверхнях кільця, які в амплітудних значеннях радіальних переміщень мають вигляд:

$$\left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{d\hat{u}_r}{dr} + \frac{\hat{u}_r}{r} \right) + \frac{d\hat{u}_r}{dr} + d_{31} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{V_0}{h} \right]_{r=a,b} = 0. \quad (5.1)$$

Загальний розв'язок рівняння (4.10) для кільцевої області буде мати ви-

гляд:

$$\hat{u}_r = AJ_1(\varkappa r) + BY_1(\varkappa r). \quad (5.2)$$

Підставивши розв'язок (5.2) у (5.1), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення констант A і B :

$$\begin{cases} \Delta_j(\varkappa b)A + \Delta_y(\varkappa b)B = -d_{31}(1+\nu)\frac{V_0}{h}b \\ \Delta_j(\varkappa a)A + \Delta_y(\varkappa a)B = -d_{31}(1+\nu)\frac{V_0}{h}a \end{cases}, \quad (5.3)$$

де $\Delta_j(z) = zJ_0(z) - (1-\nu)J_1(z)$; $\Delta_y(z) = zY_0(z) - (1-\nu)Y_1(z)$.

Розв'язавши систему (5.3), отримаємо:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{b\Delta_y(\varkappa a) - a\Delta_y(\varkappa b)}{\Delta}d_{31}(1+\nu)\frac{V_0}{h}, \\ B &= -\frac{a\Delta_j(\varkappa b) - b\Delta_j(\varkappa a)}{\Delta}d_{31}(1+\nu)\frac{V_0}{h}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\Delta = \Delta_j(\varkappa b)\Delta_y(\varkappa a) - \Delta_j(\varkappa a)\Delta_y(\varkappa b). \quad (5.5)$$

Резонансні частоти. Прирівнявши визначник (5.5) до нуля, отримаємо рівняння резонансу для кільця.

Частоти антирезонансу та ефективність перетворення енергії. Рівняння антирезонансу отримаємо з умови

$$\hat{I} = -\frac{d}{dt} = \iint_{(S)} \hat{D}_z dS = 0. \quad (5.6)$$

Амплітуда товщинної компоненти електричної індукції згідно із (4.3) має вигляд:

$$\hat{D}_z = -\varepsilon_{33}^T \frac{V_0}{h} (1 - k_p^2) - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{1}{1 - \nu} (\varkappa AJ_0(\varkappa r) + \varkappa BY_0(\varkappa r)). \quad (5.7)$$

Провівши інтегрування у (5.6), отримаємо рівняння антирезонансу:

$$\begin{aligned} 1 + (1 + \nu) \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{a^2 - b^2} [a(AJ_1(\varkappa a) + BY_1(\varkappa a)) - \\ - b(AJ_1(\varkappa b) + BY_1(\varkappa b))] = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Чисельно розв'язавши рівняння резонансу й антирезонансу, отримаємо значення резонансних та антирезонансних частот. За наближеною формулою Мезона отримаємо значення КЕМЗ:

$$k_d^2 = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2}. \quad (5.9)$$

Лабораторна робота 6. Планарні коливання п'єзокерамічного диска з розрізними електродами

Мета роботи: Дослідження радіальних коливань п'єзокерамічного диска з товщиною поляризацією з розрізними електродами. Визначення резонансних та антирезонансних частот для різних типів підведення електричного навантаження. Визначення раціональних розмірів електродних ділянок з точки зору максимальної та мінімальної ефективності електромеханічного перетворення енергії.

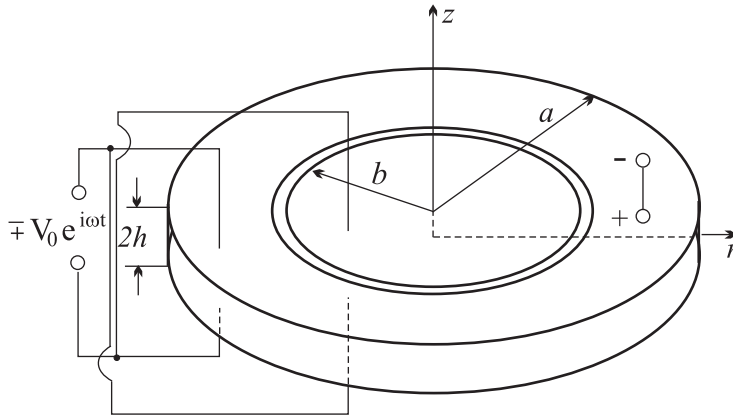


Рис. 6.1. П'єзодиск із розрізними електродами

Теоретичні відомості

Розглядається кругла п'єзокерамічна пластинка радіусом a , на електродній поверхні якої є тонкий, концентричний її краю діелектричний проміжок (розріз) з радіусом b (рис. 6.1). Коливання пластинки збуджуються різницею потенціалів $\psi^+ - \psi^- = 2 V_0 e^{i\omega t}$, прикладеною до електродів.

Для ненульової складової вектора напруженості поля маємо:

$$E_z^{(1)} = E_0 e^{i\omega t}; \quad E_z^{(2)} = -E_0 e^{i\omega t}, \quad \text{де} \quad E_0 = -\frac{V_0}{h}. \quad (6.1)$$

Частинки пластини рухаються радіально внаслідок осьової симетрії

задачі, тому вектор переміщень має вигляд

$$\vec{u} = \vec{e}_r u_r(r, t). \quad (6.2)$$

Для визначення амплітуди переміщень \hat{u}_r як в області (1), так і в області (2) отримуємо рівняння Бесселя

$$r^2 \frac{d^2 \hat{u}_r^{(i)}}{dr^2} + r \frac{d\hat{u}_r^{(i)}}{dr} + [(\alpha r)^2 - 1] \hat{u}_r^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (6.3)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{\omega}{c}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}}.$$

Його загальні розв'язки для внутрішньої та зовнішньої частин диска відповідно мають вигляд

$$\hat{u}_r^{(1)} = A J_1(\alpha r); \quad \hat{u}_r^{(2)} = B J_1(\alpha r) + C Y_1(\alpha r). \quad (6.4)$$

Компоненти тензора напружень визначаються виразами

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{1}{S_{11}^E (1 + \nu)} \left[\frac{\nu}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{u}^{(1)} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \pm d_{31} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} E_0 \right]; \\ \sigma_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{S_{11}^E (1 + \nu)} \left[\frac{\nu}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{u}^{(1)} + \frac{u_r^{(1)}}{r} \pm d_{31} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} E_0 \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

У (6.5) знак "-" вибирається для області 1, знак "+" – для області 2.

Довільні сталі загальних розв'язків знайдемо з умов

$$\sigma_r^{(2)}|_{r=a} = 0; \quad \sigma_r^{(1)}|_{r=b} = \sigma_r^{(2)}|_{r=b}; \quad u_r^{(1)}|_{r=b} = u_r^{(2)}|_{r=b}. \quad (6.6)$$

$$A = -\frac{\pi b [\alpha a \Delta^{(1)}(a, b) - (1 - \nu) \Delta^{(1)}(a, b)] + a}{\alpha a J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a)} d_{31} (1 + \nu) E_0;$$

$$B = -\frac{\pi b [\alpha a Y_0(\alpha a) - (1 - \nu) Y_1(\alpha a)] - a}{\alpha a J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a)} d_{31} (1 + \nu) E_0;$$

$$C = -\pi b J_1(\alpha b) d_{31} (1 + \nu) E_0, \quad (6.7)$$

де $\Delta^{(1)}(a, b) = J_0(\alpha a) Y_1(\alpha b) - J_1(\alpha b) Y_0(\alpha a)$.

Резонансні частоти. Резонансні частоти, як і у випадку круглої платівки з суцільними електродами, визначаються рівнянням (4.17).

Частоти антирезонансу та ефективність перетворення енергії. Для областей (1) та (2) величина товщинної компоненти електричної індукції визначається згідно (4.19).

$$\hat{D}_z = -\epsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \times \left[\pm 1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{(\alpha a) J_0(\alpha r)}{(\alpha a) J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a)} \right] \frac{V_0}{h}. \quad (6.8)$$

У виразі (2.9) верхній знак відповідає області (1).

Величина струму зміщення для області (1) визначається згідно [???] та (4.20):

$$\hat{I}^{(1)} = i\omega C_0 \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(1 + (1 + \nu) \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{J_1(\alpha b)}{(\alpha b) J_0(\alpha b) - (1 - \nu) J_1(\alpha b)} \right) \right] 2V_0, \quad (6.9)$$

Для області (2):

$$\hat{I}^{(2)} = i\omega C_0 \left[- \left(1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) + \frac{1 + \nu}{a^2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} [a (BJ_1(\alpha a) + CY_1(\alpha a)) - b (BJ_1(\alpha b) + CY_1(\alpha b))] \right]. \quad (6.10)$$

Таким чином рівняння антирезонансу отримуємо у наступному вигляді:

$$\left(2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right) \Delta + \frac{1 + \nu}{a^2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} [b^2 J_1(\alpha b) + a (BJ_1(\alpha a) + CY_1(\alpha a)) - b (BJ_1(\alpha b) + CY_1(\alpha b))]. \quad (6.11)$$

Очевидно неможливим виявиться збудження коливань п'єзокерамічного диска електричним збудження у випадку рівності коренів рівнянь (6.11) та (4.17). Для отримання максимальної ефективності енергоперетворення радіус розрізу b повинен співпадати з нулем функції амплітуди електричної індукції п'єзокерамічної круглій пластинки із суцільним електродним покриттям. Для амплітуди товщинної компоненти електричної індукції маємо[1]:

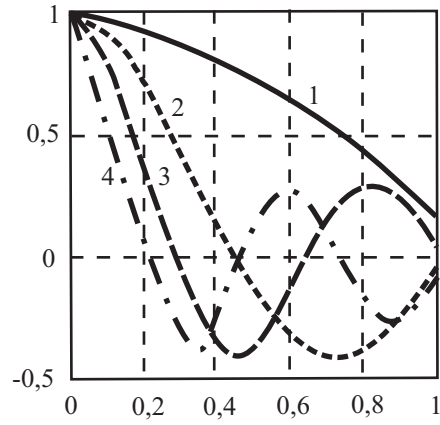


Рис. 6.2. Функція $J_0(\alpha r)$

$$\hat{D}_z = -\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \left[1 - \frac{1 + \nu}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \cdot \frac{\alpha a J_0(\alpha r)}{\alpha a J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a)} \right] \frac{V_0}{h}.$$

Для резонансних частот поведінка цієї величини цілком характеризується поведінкою функції Бесселя $J_0(\alpha r)$. На рис. 6.2 наведено графіки вказаної функції залежно від величини відношення $\frac{r}{a}$ для першої – четвертої головних мод коливань. Як видно з графіка, на першій резонансній частоті функція не змінює знак. Для вищих за першу мод коливань маємо одну чи більше змін знаків функції $J_0(\alpha r)$. Відповідно раціональна кількість розрізів на електродних поверхнях диска збігатиметься з кількістю нулів вказаної функції. Розглянутій вище задачі про протифазне збудження коливань відповідає випадок другої резонансної частоти. У цьому випадку розріз повинен мати радіус $b = 0,44a$.

Лабораторна робота 7. Згинні коливання біморфного стрижня

Мета роботи: Дослідження поперечних коливань п'єзокерамічного біморфного стрижня. Визначення резонансних та антирезонансних частот. Оцінка ефективності електромеханічного перетворення енергії за отриманими еспериментальними даними та теоретичними результатами.

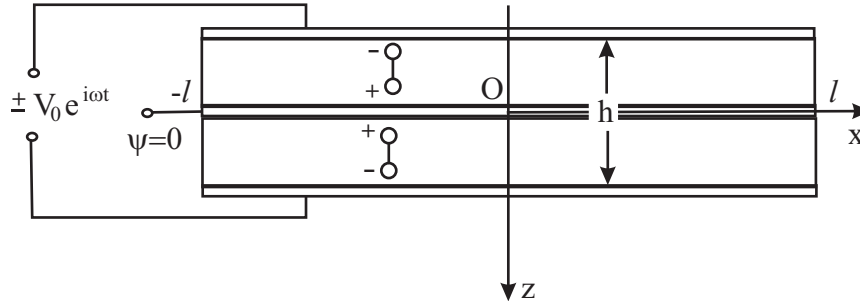


Рис. 7.1. П'єзокерамічний біморфний стержень

Теоретичні відомості

Розглядаються усталені згинні коливання біморфного п'єзокерамічного стрижня розмірами $2l \times 2b \times h$ під дією змінного за часом електронавантаження (рис.7.1). Змінний електричний потенціал підводиться до електродованих бічних поверхонь стрижня $z = \pm h/2$. Електрод у серединній поверхні стрижня $z = 0$ не навантажений. Всі поверхні стрижня вільні від механічних навантажень.

Рівняння коливань для амплітуди функції прогину серединної поверхні w біморфа у рамках теорії Кірхгофа буде співпадати з аналогічним рівнянням для випадку одношарового стержня [5]:

$$\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} - \beta^4 \hat{w} = 0 \quad , \text{де} \quad \beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D^*} \quad (7.1)$$

де $D^* = \frac{h^3}{12 s_{11}^E (1 - k_{31}^2)}$.

Аналогічний вигляд також будуть мати і граничні умови (випадок вільного від механічних навантажень краю):

$$M_x |_{x=\pm l} = 0; \quad Q_x |_{x=\pm l} = 0. \quad (7.2)$$

Відмінність задачі для стрижня біморфної структури полягає у зміні розподілу товщинних компонент напруженості електричного поля та електричної індукції. У процесі деформування одна частина буде знаходитись у стані комбінованого розтягу-згину, а інша стиску-згину. Математично ця відмінність враховується зміною знаку сталої п'єзоефекту d_{31} у рівняннях стану.

Згідно [4,6] вираз для товщинної компоненти напруженості електричного поля внаслідок відмінності у напрямку поляризації кераміки буде мати наступний вигляд:

$$E_z = E_0 \pm zE_1 \quad (7.3)$$

У формулі (7.1) верхній знак відповідає нижній частині стрижня ($0 \leq z \leq \frac{h}{2}$), а нижній знак відповідає верхній частині ($-\frac{h}{2} \leq z \leq 0$).

Товщинний розподіл компонент зв'язаного електромеханічного поля визначимо використавши рівняння вимушеної електростатики:

$$E_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad Div\vec{D} = 0 \quad (7.4)$$

Величина E_0 визначається з електричних граничних умов:

$$\psi|_{z=\pm h} = \pm \frac{V_0(t)}{2} \quad (7.5)$$

Тоді E_z набуде вигляду:

$$E_z = -\frac{V_0}{h} - \left(\frac{h}{4} \mp z\right)E_1 \quad (7.6)$$

З другого рівняння (7.2) отримаємо:

$$D_z = const \quad (7.7)$$

Тоді з рівнянь п'єзоефекту [4] та з врахуванням гіпотез про лінійність розподілу механічних деформацій за товщиною стрижня отримуємо остаточний вираз для ненульової компоненти вектора напруженості електричного поля:

$$E_z = -\frac{V_0}{h} - \frac{1}{d_{31}} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \left(\frac{h}{4} \mp z\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (7.8)$$

тут k_{31}^2 – поздовжній статичний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Вираз для товщинної компоненти електричної індукції D_z матиме вигляд:

$$D_z = -\varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \left(\frac{V_0}{h} + \frac{h}{4d_{31}} \frac{k_{31}^2}{(1 - k_{31}^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (7.9)$$

Визначивши компоненту напружень σ_x з рівняння стану:

$$\sigma_x = \frac{1}{s_{11}^E} (\varepsilon_x \mp d_{31} (1 + \nu) E_z) \quad (7.10)$$

та провівши інтегрування отримаємо наступний вираз згинаючого моменту M_x :

$$M_x = -D^* \left[1 - \frac{3}{4} k_{31}^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2 d_{31} V_0}{4 s_{11}^E h} \quad (7.11)$$

Загальний інтеграл рівняння (7.1) зважаючи на симетрію задачі буде містити лише парні складові:

$$\hat{w} = A \cos \beta x + C \operatorname{ch} \beta x \quad (7.12)$$

Для визначення сталих інтегрування A і C з граничних умов (??) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} -A\beta^2 \cos \beta l + C\beta^2 \operatorname{ch} \beta l &= P^* \\ A\beta^3 \sin \beta l + C\beta^3 \operatorname{sh} \beta l &= 0, \end{aligned} \quad (7.13)$$

де $P^* = \frac{h}{4} \frac{d_{31} V_0}{s_{11}^E D^* (1 - \frac{3}{4} k_{31}^2)}$

Звідки отримаємо:

$$C = -\frac{P^* \sin \beta l}{\beta \Delta}, \quad A = \frac{P^* \operatorname{sh} \beta l}{\beta^2 \Delta}, \quad (7.14)$$

де

$$\Delta = -\beta(\cos \beta l \operatorname{sh} \beta l + \operatorname{ch} \beta l \sin \beta l) \quad (7.15)$$

Частоти резонансу та антирезонансу. Резонансні та антирезонансні частоти коливань визначаються за умов нескінченного зростання та рівності нулю амплітуди струму зміщення:

$$\hat{I} = \infty, \quad \hat{I} = 0. \quad (7.16)$$

Струм зміщення визначається за формулою:

$$I = -\frac{d}{dt} \iint_{S_1^+} D_z dS \quad (7.17)$$

Тоді з (7.9) та (7.12) отримаємо:

$$\hat{I} = i\omega C_0 V_0 \left(1 - \frac{1}{\Delta} \frac{\beta}{2l} \frac{3k_{31}^2}{1 - \frac{3}{4} k_{31}^2} \sin \beta l \operatorname{sh} \beta l \right), \quad (7.18)$$

де $C_0 = \varepsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) 4bl/h$ – статична електрична ємність біморфного стержня при нульових деформаціях).

Значення резонансних частот визначаємо прирівнявши до нуля виразник (7.15), антирезонансні частот визначаються нулями виразу (7.18).

Величина динамічних КЕМЗ визначається за формулою Мезона (1.26).

Лабораторна робота 8. Згинні коливання біморфного диска

Мета роботи: Дослідження згинних коливань п'єзокерамічного біморфного диска. Визначення резонансних та антирезонансних частот. Оцінка ефективності електромеханічного перетворення енергії за отриманими еспериментальними даними та теоретичними результатами.

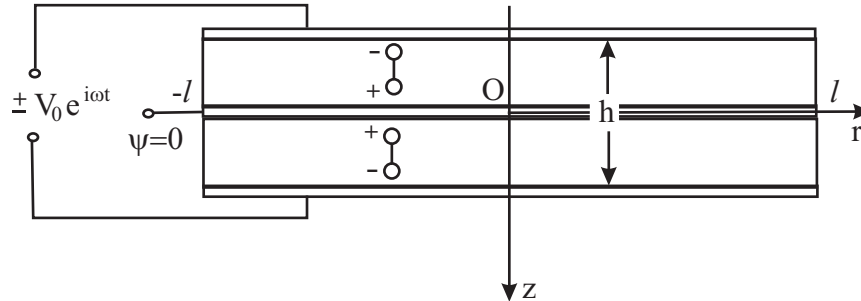


Рис. 8.1. Діаметральний переріз п'єзокерамічного біморфного диска

Теоретичні відомості

Збудження коливань п'єзокерамічного біморфного диска радіусом a та товщиною h , здійснюється за допомогою гармонічної зміни різниці електричних потенціалів із круговою частотою ω , яка подається від генератора коливань до плоских електродованих поверхонь $z = \pm \frac{h}{2}$ та $z = 0$. Бічна поверхня біморфа $r = a$ вільна від нормальних і дотичних напружень. Структура діаметрального перерізу круглого біморфа та спосіб підведення електричного навантаження вказані на рис.7.1.

Диференціальне рівняння для визначення функції прогину має вигляд [5]

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (8.1)$$

Прийнявши до уваги осьову симетрію та гармонічність навантаження, функцію прогину запишемо у такому вигляді:

$$w(r, t) = \hat{w}(r) e^{i\omega t}. \quad (8.2)$$

Тоді для амплітуди функції прогину отримаємо:

$$\nabla^2 \nabla^2 \hat{w} - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \hat{w} = 0, \quad (8.3)$$

або

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \beta^2\right) \left(\frac{d^2 \hat{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \hat{w}}{dr} + \beta^2 \hat{w}\right) = 0, \quad (8.4)$$

де $\beta^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2$.

На вільному від механічних навантажень краю диска задаються граничні умови:

$$M_r|_{r=a} = 0; \quad \left(Q_r - \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi}\right)\Big|_{r=a} = 0. \quad (8.5)$$

Загальний розв'язок рівняння (8.4) (зважаючи на особливості в точці $r = 0$) має вигляд

$$\hat{w}(r) = A J_0(\beta r) + C I_0(\beta r). \quad (8.6)$$

Сталі інтегрування A і C визначаються з граничних умов (8.5), які переписуються у вигляді

$$\hat{M}_r|_{r=a} = \left(-\bar{D} \left(\frac{d^2 \hat{w}}{dr^2} + \frac{\bar{\nu}}{r} \frac{d \hat{w}}{dr}\right) + \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{S_{11}^E (1-\nu)} \left(\frac{V_0}{h}\right)\right)\Big|_{r=a} = 0$$

$$\left(\hat{Q}_r - \frac{\partial \hat{M}_{r\varphi}}{\partial \varphi}\right)\Big|_{r=a} = \bar{D} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \hat{w}}{dr}\right)\right]\Big|_{r=a} = 0. \quad (8.7)$$

Звідси отримується система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування:

$$(\beta A) (-\beta a J_0(\beta a) + (1-\bar{\nu}) J_1(\beta a)) +$$

$$+ (\beta C) (\beta a I_0(\beta a) + (1-\bar{\nu}) I_1(\beta a)) = \frac{h^2}{4} \frac{d_{31}}{S_{11}^E (1-\nu)} \left(\frac{V_0}{h}\right) \frac{a}{\bar{D}}$$

$$(\beta A) J_1(\beta a) + (\beta C) I_1(\beta a) = 0. \quad (8.8)$$

Частоти резонансу та антирезонансу. Для гармонічних коливань у змінному електричному полі резонансні та антирезонансні частоти визначаються з умов нескінченного зростання $\hat{I} \rightarrow \infty$ та рівності нулю $\hat{I} = 0$ амплітуди струму зміщення в колі ідеального генератора електричної напруги.

Величина струму зміщення визначається за формулою

$$I(t) = C_0 \frac{d}{dt} \left[V_0(t) + \frac{h^2}{8} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \frac{1}{S} \iint_{S^+} \nabla^2 w r dr d\varphi \right], \quad (8.9)$$

де $C_0 = \frac{\varepsilon_{33}^T (1-k_p^2) S}{h}$ – ємність біморфної пластинки при нульових деформаціях, S – площа пластинки, k_p^2 – планарний коефіцієнт електро механічного зв'язку.

Умова нескінченного зростання величини (8.9) виконується на тих частотах (βa), для яких визначник системи рівнянь (8.8)

$$\Delta = 2(1 - \bar{\nu}) J_1(\beta a) I_1(\beta a) - (\beta a) (J_0(\beta a) I_1(\beta a) + J_1(\beta a) I_0(\beta a)) \quad (8.10)$$

обертається в нуль. Отже, рівняння резонансу отримаємо, прирівнявши визначник (8.8) до нуля.

Сталі інтегрування визначаються виразами

$$A = \frac{A^*}{\beta \Delta} I_1(\beta a); \quad C = \frac{A^*}{\beta \Delta} J_1(\beta a), \quad (8.11)$$

де $A^* = \frac{\hbar^2}{4} \frac{d_{31}}{S_{11}^E(1-\nu)} \left(\frac{V_0}{\hbar} \right) \frac{a}{D}$.

Частинний розв'язок задачі (8.4), (8.7) запишеться у вигляді

$$\hat{w}(r) = \frac{A^*}{\beta \Delta} (I_1(\beta a) J_0(\beta r) + J_1(\beta a) I_0(\beta r)). \quad (8.12)$$

Тоді для амплітуди струму зміщення отримаємо такий вираз:

$$\hat{I} = C_0 \omega \left[V_0 - \frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{a} \frac{A^*}{\Delta} J_1(\beta a) I_1(\beta a) \right]. \quad (8.13)$$

Прирівнюючи амплітуду струму зміщення до нуля, знаходимо рівняння антирезонансу:

$$\Delta - 3 \frac{\frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2}}{1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2}} J_1(\beta a) I_1(\beta a) = 0. \quad (8.14)$$

Величина динамічних КЕМЗ визначається за формулою Мезона (1.26).

Лабораторна робота 9. Радіальні коливання тонкого циліндра з товщинною поляризацією

Мета роботи: Дослідження радіальних коливань п'єзокерамічної тонкої циліндричної оболонки. Визначення резонансної та антирезонансної частоти. Оцінка ефективності електромеханічного перетворення енергії за отриманими еспериментальними даними та теоретичними результатами.

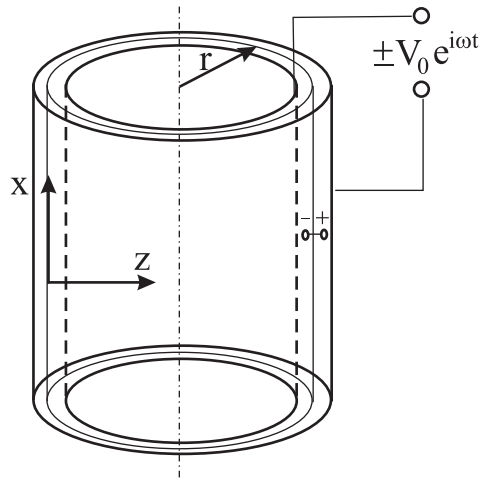


Рис. 9.1. П'єзокерамічний циліндр з товщинною поляризацією

Теоретичні відомості Розглянемо радіальні коливання тонкої круглій циліндричної оболонки з товщинною поляризацією, що збуджуються за допомогою підведеного до електродів на поверхнях оболонки $z = \pm h/2$ гармонічною у часі різницею потенціалів $V_0(t)$ (рис. 9.1).

Радіус оболонки дорівнює a , товщина – h , довжина – L . Рівняння коливань циліндричних оболонок обертання отримуємо зі співвідношень теорії тонких п'єзокерамічних оболонок обертання [4,5]. Положення точок серединної поверхні у цьому випадку будемо визначати меридіанальною координатою $s = x$ та окружною φ . У загальних кінематичних

співвідношеннях у цьому випадку слід покласти:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad r_1 \rightarrow \infty, \quad r_2 = r = a, \quad ds = dx. \quad (9.1)$$

При цьому кут повороту нормалі до серединної поверхні обчислюється за формулою $\beta = \partial w / \partial x$, а деформації серединної площини оболонки задаються формулами:

$$\varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\varphi^{(0)} = -\frac{w}{a}, \quad \varkappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_\varphi = 0. \quad (9.2)$$

Рівняння руху після відповідних спрощень записуються у переміщеннях і мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - (1 + \nu) d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{q_x}{D_N} &= \frac{\rho h}{D_N} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{a} - \frac{ah^2}{12} \left(1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \\ - (1 + \nu) d_{31} E_z + \frac{aq_z}{D_N} &= \frac{\rho ha}{D_N} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Для визначення ненульових компонент напруженості електричного поля та електричної індукції отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{V_0(t)}{h}; \\ D_z &= -\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \frac{V_0(t)}{h} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} (\varepsilon_x^{(0)} + \varepsilon_\varphi^{(0)}). \end{aligned} \quad (9.4)$$

У випадку чисто радіальних коливань повністю електродованої циліндричної оболонки під дією гармонічно змінної за часом різниці потенціалів $V_0 e^{i\omega t}$ переміщення серединної поверхні будуть мати наступний вигляд:

$$u \equiv 0, \quad w = \hat{w} e^{i\omega t}. \quad (9.5)$$

Причому амплітуда функції прогину \hat{w} не залежить від x і знаходиться з рівнянь (9.3):

$$\frac{\hat{w}}{a} = \frac{(1 + \nu) d_{31}}{1 - \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2} \left(\frac{V_0}{h} \right), \quad (9.6)$$

де $c = 1 / \sqrt{\rho s_{11}^E (1 - \nu^2)}$ – швидкість поздовжніх хвиль у циліндричній оболонці. Отже у випадку $\frac{\omega a}{c} = 1$ амплітуда прогину нескінченно зростає, що свідчить про існування резонансу.

Для оцінки ефективності збудження коливань оболонки розглянемо амплітуду струму провідності у ланцюгу генератора:

$$\hat{I} = i\omega C_0 \left[1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2} \right] V_0. \quad (9.7)$$

Антирезонансна частота визначається з умови $\hat{I} = 0$:

$$\left(\frac{\omega a}{c}\right)_a = 1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}. \quad (9.8)$$

У відповідності до формули Мезона (1.26) для коефіцієнта електро-механічного зв'язку отримаємо:

$$k_d^2 = \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}. \quad (9.9)$$

Лабораторна робота 10. Радіальні коливання тонкої сферичної оболонки з товщинною поляризацією

Мета роботи: Дослідження радіальних коливань п'єзокерамічної тонкої сферичної оболонки. Визначення резонансної та антирезонансної частоти. Оцінка ефективності електромеханічного перетворення енергії за отриманими еспериментальними даними та теоретичними результатами.

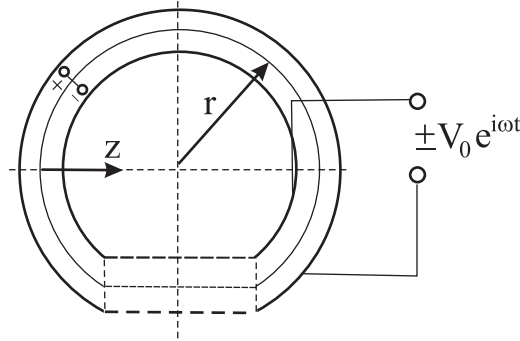


Рис. 10.1. П'єзокерамічна сфера з товщинною поляризацією

Теоретичні відомості

Розглянемо радіальні коливання тонкої круглої сферичної оболонки з товщинною поляризацією, що збуджуються за допомогою підведеного до електродів на поверхнях оболонки $z = \pm h/2$ гармонічною у часі різницею потенціалів $V_0(t)$. радіус серединної поверхні оболонки дорівнює a , товщина – h (рис. 10.1)

Для випадку осесиметричної деформації сферичних оболонок з товщинною поляризацією співвідношення загальної теорії тонких п'єзокерамічних оболонок обертання [4,5], як і у для циліндричних оболонок, спрощуються. Радіуси головних кривизн та приріст меридіональної координати будуть мати наступний вигляд:

$$r_1 = r_2 = a, \quad r = a \sin \vartheta, \quad ds = ad\vartheta. \quad (10.1)$$

У сферичних координатах співвідношення для деформацій середин-

ної поверхні та зміни кривизни оболонки через переміщення точок середньої поверхні можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\vartheta}^{(0)} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - w \right), \quad \varepsilon_{\varphi}^{(0)} = \frac{1}{a} (uctg\vartheta - w), \\ \varkappa_{\vartheta} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(u + \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right), \quad \varkappa_{\varphi} = \frac{1}{a^2} \left(u + \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) ctg\vartheta.\end{aligned}\quad (10.2)$$

Рівняння руху в переміщеннях будуть мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\Delta u) + (1 - \nu) u - (1 + \nu) \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\nabla^2 + (1 - \bar{\nu})) w - (1 + \nu) d_{31} a \frac{\partial E_z}{\partial \vartheta} + \frac{a^2 q_{\vartheta}}{D_N} = \frac{\rho h a^2}{D_N} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ &(1 + \nu) (\Delta u - 2w) - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{1 + \nu}{2} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right) (\nabla^2 + (1 - \bar{\nu})) \times \\ &\times (\nabla^2 w + \Delta u) - 2(1 + \nu) d_{31} a E_z + \frac{a^2 q_z}{D_N} = \frac{\rho h a^2}{D_N} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (10.3)$$

Тут $\bar{\nu}$ – приведений коефіцієнт Пуассона, оператори введені для скорочення мають вигляд:

$$\nabla^2 (\cdot) = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial \vartheta^2} + ctg\vartheta \frac{\partial (\cdot)}{\partial \vartheta}; \quad \Delta (\cdot) = \frac{\partial (\cdot)}{\partial \vartheta} + (\cdot) ctg\vartheta.\quad (10.4)$$

Ненульові компоненти складових електричного поля визначаються за наступними формулами:

$$\begin{aligned}E_z &= -\frac{V_0(t)}{h}, \\ D_z &= -\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \frac{V_0(t)}{h} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu)} (\Delta u - 2w).\end{aligned}\quad (10.5)$$

Для електродованої сферичної оболонки величина амплітуди струму зміщення визначається за формулою:

$$\hat{I} = i\omega C_0 \left[V_0 - \frac{1}{2d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \left(\frac{h}{a} \right) \frac{1}{S_1^+} \iint_{S_1^+} (\Delta \hat{u} - 2\hat{w}) dS \right], \quad (10.6)$$

де $C_0 = \frac{\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) S_1^+}{h}$.

У випадку чисто радіальних коливань сферичної оболонки маємо покласти: $u \equiv 0$, $w = \hat{w}e^{i\omega t}$. В останньому виразі амплітуда радіальних переміщень не залежить від координати ϑ . Для визначення цієї величини з другого рівняння () отримаємо:

$$\frac{\hat{w}}{a} = \frac{d_{31}}{1 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2} \left(\frac{V_0}{h}\right), \quad (10.7)$$

Тут $c = \frac{1}{\sqrt{\rho s E_{11}}}$.

Амплітуда струму провідності у ланцюгу генератора у цьому випадку обчислюємо за формулою:

$$\hat{I} = i\omega C_0 \frac{1 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2 + \frac{k_p^2}{1-k_p^2}}{1 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2} V_0 \quad (10.8)$$

Звідки визначаються резонансна ($\hat{I} \rightarrow \infty$) та антирезонансна ($\hat{I} = 0$) частоти:

$$\left(\frac{\omega a}{c}\right)_r^2 = \frac{2}{1-\nu}, \quad \left(\frac{\omega a}{c}\right)_a^2 = \frac{2}{1-\nu} \frac{1}{1-k_p^2}. \quad (10.9)$$

Динамічний коефіцієнт електромеханічного зв'язку визначимо за формулою Мезона:

$$k_d^2 = k_p^2. \quad (10.10)$$

Зразок оформлення звіту по лабораторній роботі

Титульна сторінка

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет Кафедра теоретичної та
прикладної механіки

Звіт з лабораторної роботи на тему:

Радіальні коливання пьезокерамічного диска

Роботу виконала
студентка 5 курсу
групи механіків
Івченко Олена Миколаївна

Київ - 2006

Схеми підключення

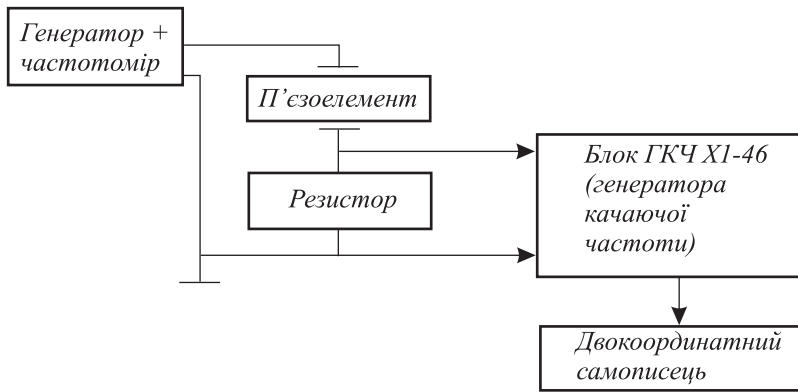


Рис. Схема підключення вимірювальної установки

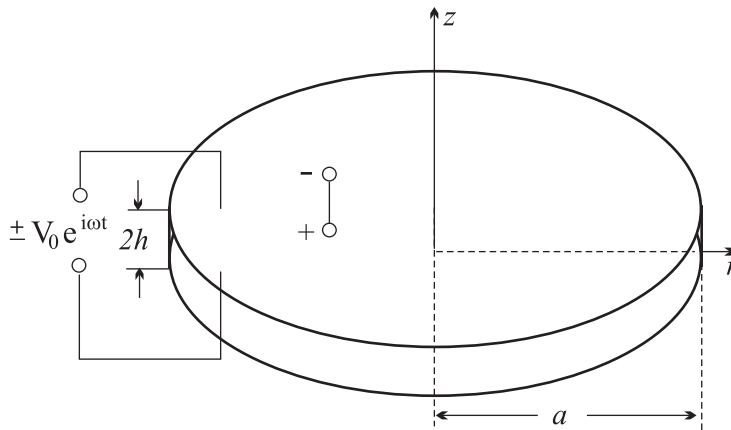


Рис. Схема підключення п'єзоелемента

Теоретичні відомості

Амплітудно-частотні характеристики

Таблиця Містить значення отриманих розрахункових безрозмірних частот резонансу та антирезонансу та їх розмірні величини, визначені експериментально, а також теоретичні та експериментальні значення динамічних коефіцієнтів електромеханічного зв'язку.

Висновки

Список літератури

1. Борисейко О.В. Планарні коливання п'єзокерамічного диска при протифазному збудженні // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 3. – С. 89-94.

Біморфи

2. Карлаш В.Л., Улітко А.Ф. Исследование колебаний пьезокерамических элементов методом пьезотрансформаторного датчика // Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций. – К., 1984. – С. 178 – 196.

3. Мезон У.П. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуку. – М., 1951.

4. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5: Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улітко, Н.А. Шульга. – К., 1989.

5. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. – М., 1982.

6. Улітко А.Ф., Борисейко О.В., Улітко І.А. Прикладні методи в задачах електропружності. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2007 – 127с.