Відкрита студентська олімпіада механіко-математичного факультету 22 лютого 2007 року Завдання для 3–4 курсів

Задача 1. *Дослідити на збіжність невласний інтеграл Рімана* $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x+\ln x}$. *(О. Г. Кукуш)*

Задача 2. *Циферблат годинника є кругом радіуса 1. Годинна стрілка має вигляд круга радіуса 1/2, що дотикається внутрішнім чином до кола циферблату, а хвилинна стрілка є відрізком довжини 1. Знайти площу фігури, яку утворюють усі можливі перетини стрілок протягом півдоби (тобто за один повний оберт годинної стрілки). (Г. М. Шевченко)*

Задача 3. *Довести, що функція* $f \in C^1\big((0,+\infty)\big)$, *яка задовольняє співвідношення*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^4+\cos f(x)},\ x>0,$$

є обмеженою на $(0,+\infty)$. *(О. Н. Нестеренко)*

Задача 4. *Чи існує многочлен, який при всіх* $1 \leqslant k \leqslant 2007$ *набуває значення* k *рівно в* k *точках?(В. Б. Брайман)*

Задача 5. *Нехай функція* $f : R \to [0,+\infty)$ *є вимірною за Лебегом і такою, що* $\int_A f d\lambda < +\infty$, *для будь-якої множини* A *з* $\lambda(A) < +\infty$ *(*λ*–міра Лебега). Довести, що існують константи* M *та інтегровна за Лебегом функція* $g : R \to [0,+\infty)$ *такі, що* $f(x) \leqslant g(x) + M$, *при всіх* $x \in R$.

Задача 6. *Дослідити на монотонність функцію* $f(\sigma) = \mathsf{M}\frac{1}{1+e^{\xi}}$, $\sigma > 0$, *де* ξ *— гауссівська випадкова величина з середнім* m *та дисперсією* σ^2, m *— дійсний параметр. (О. Г. Кукуш)*

Задача 7. *Знайти найбільше значення виразу* $x_1^3 + \ldots + x_{10}^3$ *при* $x_1, \ldots, x_{10} \in [-1, 2]$ *та* $x_1 + \ldots + x_{10} = 10$. *(Д. Ю. Мітін)*

Задача 8. *Нехай* A, B *— симетричні дійсні додатно визначені матриці, причому матриця* $A + B - E$ *також є додатно визначеною. Чи може бути від'ємно визначеною матриця*

$$A^{-1} + B^{-1} - \tfrac{1}{2}(A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1})?$$

(О. Г. Кукуш)

Задача 9. *Нехай* $P(z)$ *– многочлен зі старшим коефіцієнтом 1. Довести, що на одиничному колі* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *існує така точка* z_0, *для якої* $|P(z_0)| \geqslant 1$. *(О. В. Рибак)*

Використання калькуляторів, літератури, мобільних телефонів, ноутбуків та консультації з сусідами забороняються.