

Відкрита студентська олімпіада
механіко-математичного факультету
22 лютого 2007 року
Завдання для 1–2 курсів

Задача 1. Нехай p, q, r, s — натуральні числа. Обчислити границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{(k+p)(k+q)}{(k+r)(k+s)}. \quad (\text{Р. П. Ушаков})$$

Задача 2. Чи при всіх $n \geq 2$ число $\sum_{k=1}^n k C_{2n}^k$ ділиться на 8? (О. Г. Кукуш)

Задача 3. Двоє гравців по черзі замінюють зірочки в матриці $\begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$ розміру 10×10 натуральними числами від 1 до 100 (на кожному кроці можна ставити довільне ще невикористане число замість довільної зірочки). Якщо отримана матриця виявляється невикористаною, то виграє перший гравець, а якщо вивродженою, то другий. Чи має хтось із гравців виграти стратегію? Якщо має, то хто? (В. Б. Брайман)

Задача 4. Довести, що функція $f \in C^1((0, +\infty))$, яка задовольняє співвідношення

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^4 + \cos f(x)}, \quad x > 0,$$

є обмеженою на $(0, +\infty)$. (О. Н. Нестеренко)

Задача 5. Чи існує многочлен, який при всіх $1 \leq k \leq 2007$ набуває значення k рівно в k точках? (В. Б. Брайман)

Задача 6. Циферблат годинника є кругом радіуса 1. Годинна стрілка має вигляд круга радіуса $1/2$, що дотикається внутрішнім чином до кола циферблату, а хвилинна стрілка є відрізком довжини 1. Знайти площу фігури, яку утворюють усі можливі перетини стрілок протягом півдоби (тобто за один повний оберт годинної стрілки). (Г. М. Шевченко)

Задача 7. Знайти найбільше значення виразу $x_1^3 + \dots + x_{10}^3$ при $x_1, \dots, x_{10} \in [-1, 2]$ та $x_1 + \dots + x_{10} = 10$. (Д. Ю. Мітін)

Задача 8. Нехай $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ та $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$, $n \geq 2$. Довести, що для всіх непарних чисел p число $a_p - 1$ ділиться на p . (О. В. Рибак)

Задача 9. Знайти всі натуральні n , для яких існує безліч матриць A розміру $n \times n$ з цілими елементами таких, що $A^n = I$, де I одинична матриця. (А. В. Бондаренко, М. С. Вязовська)

Використання калькуляторів, літератури, мобільних телефонів,
ноутбуків та консультації з сусідами забороняються.