Открытая студенческая олимпиада механико-математического факультета Киевского национального университета имени Тараса Шевченко 15 марта 2006 года

Задания для 1-2 курсов

1. Найти все натуральные n, такие, что многочлен $(x^4-1)^n+(x^2-x)^n$ делится на x^5-1.

2. О числе $z\in\mathbb{C}$ известно, что точки z^3, $2z^3+z^2$, $3z^3+3z^2+z$ и $4z^3+6z^2+4z+1$ являются вершинами вписанного четырехугольника. Найти $Re\, z$.

3. Найти минимум по всем единичным векторам $x_1,\ldots,x_{n+1}\in\mathbb{R}^n$ величины

$$\max_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_i,x_j).$$

4. Пусть E_m - единичная матрица размерности $m\times m$, $A\in R^{m\times n}$, B - симметрическая матрица размерности $n\times n$, причем блочная матрица $\begin{bmatrix} E_m & A \\ A^T & B\end{bmatrix}$ положительно определена. Доказать, что "матричный определитель"$B-A^TA$ также является положительно определенной матрицей.

5. Существует ли бесконечное множество квадратных симметрических матриц $\mathcal{M}$, такое, что для любых различных матриц $A,B\in\mathcal{M}$ $AB^2=B^2A$, но $AB\neq BA$?

6. Непрерывная функция $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ выпукла вверх, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. Доказать, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{f(n)\}=1$, где $\{a\}=a-[a]$ - дробная часть числа a.

7. Существует ли такая непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to(0,1)$, что последовательность $a_n=\displaystyle\int_{-n}^{n}f(x)\,dx$ сходится, а последовательность $b_n=\displaystyle\int_{-n}^{n}f(x)\ln f(x)\,dx$ расходится?

8. О многочлене $P(x)$ известно, что существует бесконечно много пар целых чисел (a,b), таких, что $P(a+3b)+P(5a+7b)=0$. Доказать, что многочлен $P(x)$ имеет целый корень.

9. Для произвольных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ доказать неравенство $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{a_i^2+a_j^2}\geqslant 0.$

Задания для 3-4 курсов

1. О числе $z\in\mathbb{C}$ известно, что точки z^3, $2z^3+z^2$, $3z^3+3z^2+z$ и $4z^3+6z^2+4z+1$ являются вершинами вписанного четырехугольника. Найти $Re\, z$.

2. Существует ли такая непрерывная функция $f:\mathbb{R}\to(0,1)$, что $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx<\infty$, а $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ln f(x)\,dx$ расходится?

3. Пусть E_m - единичная матрица размерности $m\times m$, $A\in R^{m\times n}$, B - симметрическая матрица размерности $n\times n$, причем блочная матрица $\begin{bmatrix} E_m & A \\ A^T & B\end{bmatrix}$ положительно определена.

Доказать, что "матричный определитель"$B - A^TA$ также является положительно определенной матрицей.

4. Существует ли бесконечное множество квадратных симметрических матриц $\mathcal{M}$, такое, что для любых различных матриц $A, B \in \mathcal{M}$ $AB^2 = B^2A$, но $AB \neq BA$?

5. а) Пусть случайные величины ξ и η (не обязательно независимые) имеют непрерывные функции распределения. Доказать, что $\min(\xi, \eta)$ также имеет непрерывную функцию распределения. б) Пусть случайные величини ξ и η имеют плотности распределений. Верно ли, что $\min(\xi, \eta)$ также имеет плотность распределения?

6. Можно ли выбрать в l_2 несчетное множество $\mathcal{A}$ элементов единичной нормы, такое, что для любых различных $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ из множества $\mathcal{A}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$ расходится?

7. Пусть ξ, η - независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathsf{P}(\xi \neq 0) = 1$. Доказать неравенство: $\mathsf{E}\dfrac{\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2} \geqslant 0$.

8. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найти наименьшее $\lambda > 0$, такое, что для произвольного выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in K$, такая, что образ K при гомотетии с центром в x и коэффициентом $(-\lambda)$ содержит K.

9. Пусть $X = L_1[0,1]$, а $T_n : X \to X$ - последовательность неотрицательных ($f \geqslant 0 \Longrightarrow T_n f \geqslant 0$) линейных непрерывных операторов, таких, что $\|T_n\| \leqslant 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - T_n f\|_X = 0$ для $f(x) \equiv x$ и для $f(x) \equiv 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - T_n f\|_X = 0$ для каждой $f \in X$.